الرياضيات

العامة

الجزء الخاص

بالشرح و التمارين





تطبيق
التعلُّم التفاعلى

الممتاز الرياضيات العامة القسم الأدبى الصف الثانى الثانوى الفصل الدراسى الأول

المعاصر 2024

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى

القسم الأدبى

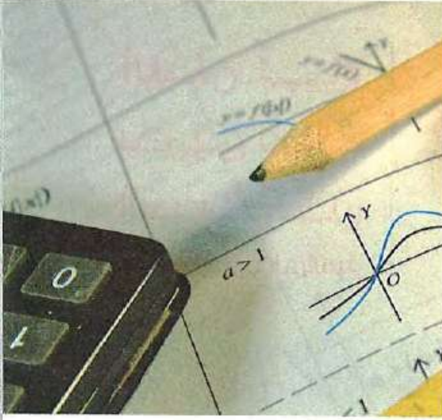
الفصل الدراسى الأول

١٧٠ جنيهًا

محتويات الكتاب

أولًا : الجبـــر

الوحدة 1 الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات



متطلبات قبلية على الوحدة الأولى. ٩

الــدرس الأول | الدوال الحقيقية (تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد). ١٢

الـدرس الثانى | الدوال الزوجية والدوال الفردية. ٢٧

الـدرس الثالث | التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال. ٣٨

الـدرس الرابـع | التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية. ٤٦

الدرس الخامس | حل معادلات القيمة المطلقة. ٦٣

الدرس السادس | حل متباينات القيمة المطلقة. ٧٥

• **تطبيقات حياتية على دروس الوحدة.** ٨٢

الوحدة 2 الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها



الــدرس الأول | الأسس الكسرية والمعادلات الأسية. ٨٥

الـدرس الثانى | الدالة الأسية وتطبيقاتها. ٩٩

الـدرس الثالث | الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى. ١١٥

الـدرس الرابـع | بعض خواص اللوغاريتمات. ١٢٧

• **تطبيقات حياتية على دروس الوحدة.** ١٤١

ثانيًا : التفاضل وحساب المثلثات

الوحدة 3 النهايات

الـدرس الأول | مقدمة فى النهايات «إيجاد النهاية عدديًا و بيانيًا». ١٤٥
الـدرس الثانى | إيجاد نهاية الدالة جبريًا. ١٥٥
الـدرس الثالث | نظرية (٤) «القانون». ١٦٦
الـدرس الرابع | نهاية الدالة عند اللا نهاية. ١٧٣

الوحدة 4 حساب المثلثات

مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها. ١٨٤
الـدرس الأول | قانون الجيب «قاعدة الجيب». ١٨٦
الـدرس الثانى | قانون جيب التمام «قاعدة جيب التمام». ١٩٨
الـدرس الثالث | حل المثلث. ٢٠٩
• تطبيقات حياتية على دروس الوحدة. ٢١٩

يمكنك

حـل امتحان تفاعلى إلكترونى على كل درس باستخدام تقنية :



QR Code

2



افتح التطبيق وامسح



QR code

باستخدام الكاميرا الخاصة بالهاتف وابدأ حل الامتحان مباشرة

1



قم بتحميـل أحد تطبيقات

QR code reader

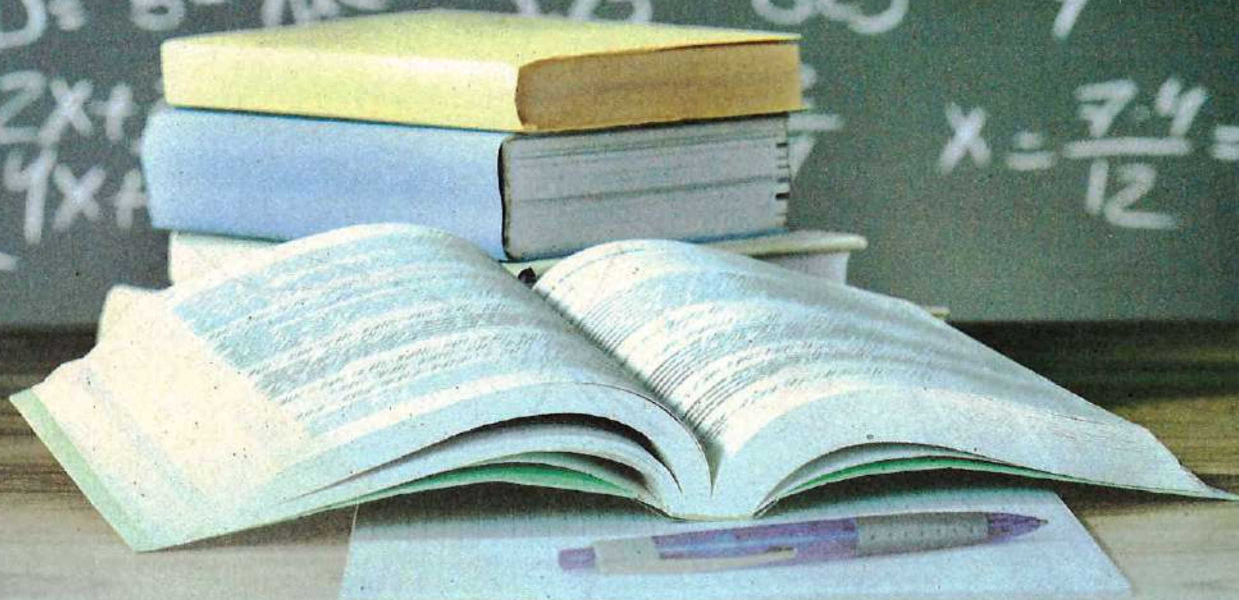
على هاتفك الذكى من







◄ بعد الانتهاء من الامتحان يمكنك معرفة نتيجتك لتقييم نفسك مع عرض تقرير مفصل بالإجابات الصحيحة.



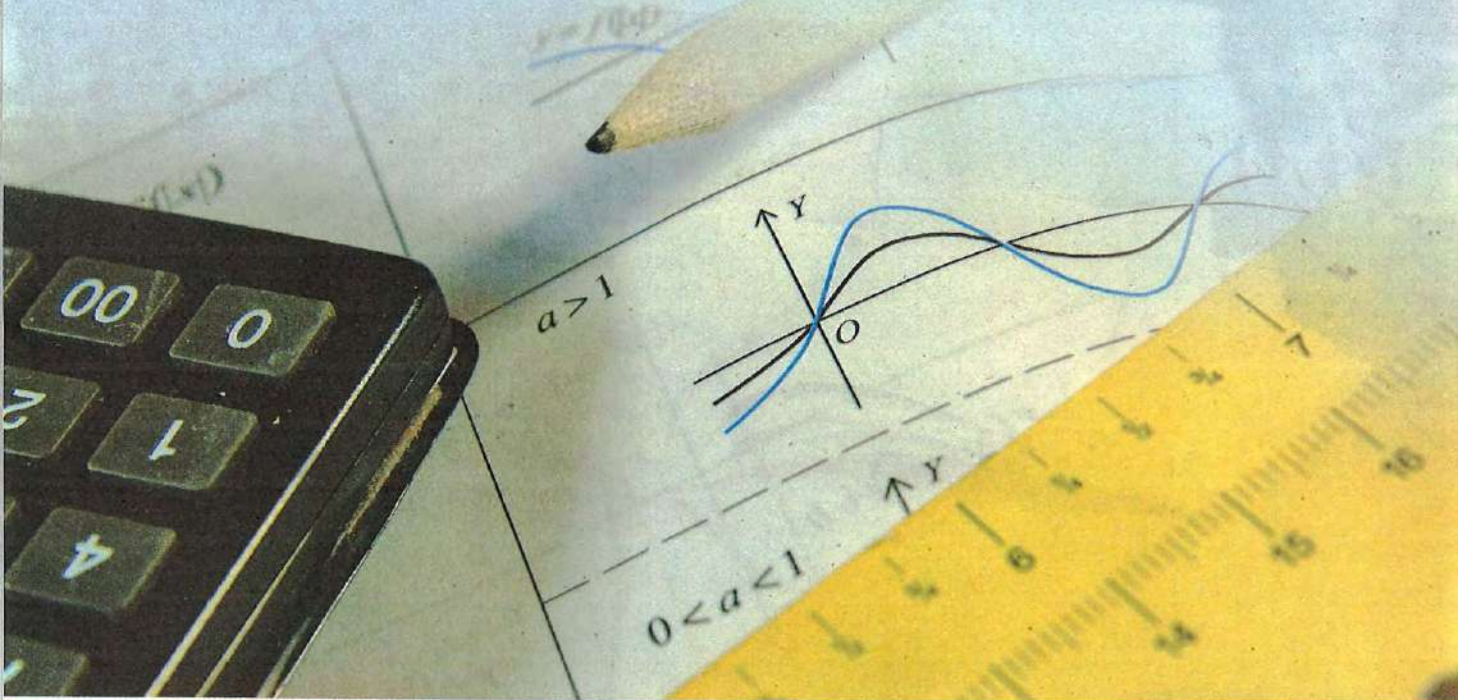
أولًا الجبر

الوحدة 1 الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات.

الوحدة 2 الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها.

الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات



متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

الدرس 1 الدوال الحقيقية (تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد).

الدرس 2 الدوال الزوجية والدوال الفردية.

الدرس 3 التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال.

الدرس 4 التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية.

الدرس 5 حل معادلات القيمة المطلقة.

الدرس 6 حل متباينات القيمة المطلقة.

فى نهاية الوحدة : تطبيقات حياتية على دروس الوحدة.

متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

* **إذا كانت س ، ص مجموعتين غير خاليتين فإن :**

الدالة من المجموعة س إلى المجموعة ص هى علاقة تربط كل عنصر من عناصر س بعنصر واحد فقط من عناصر ص وتسمى س بمجال الدالة ، ص بالمجال المقابل.

، مجموعة صور عناصر مجموعة المجال س بـ «مدى الدالة» وهى مجموعة جزئية من المجال المقابل ص

* الدالة د تكتب رياضيًا د : س ⟵ ص ، قاعدة الدالة تكتب ص = د (س)

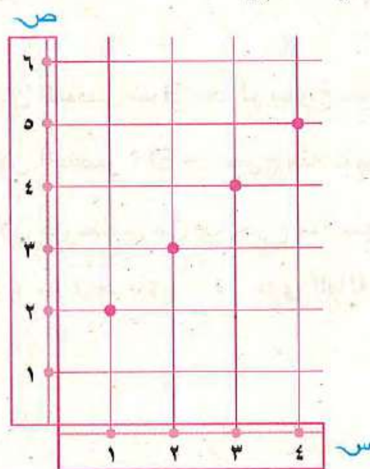
* بيان الدالة = {(س ، ص) ، س ∈ س ، ص ∈ ص ، ص = د (س)}

* يمكن تمثيل الدالة بالمخطط السهمى أو البيانى (الديكارتى)

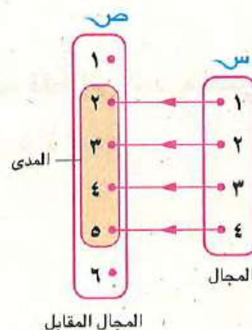
فمثلًا : إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

وكانت الدالة د : س ⟵ ص حيث د (س) = س + ١

فإن بيان الدالة = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٥)}



المخطط البيانى (الديكارتى)



المخطط السهمى

* **لاحظ أن :**

ليس كل علاقة من س إلى ص دالة ولكن كل الدوال من س إلى ص هى علاقات تحقق أن :

– كل عنصر من س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى الأزواج المرتبة فى بيان العلاقة.

– كل عنصر من س يخرج منه سهم واحد وواحد فقط إلى أحد عناصر ص فى المخطط السهمى.

– كل خط رأسى يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة فى المخطط البيانى.

* الدالة د : د (س) = $أ_0 + أ_1 س + أ_2 س^2 + أ_3 س^3 + \dots + أ_ن س^ن$

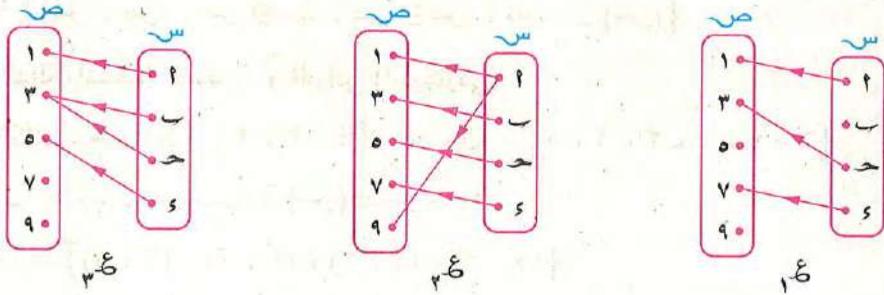
حيث $أ_0$ ، $أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ ، ... ، $أ_ن$ ثوابت ، $أ_ن$ ∈ ح – {٠} ، ن ∈ ط تسمى كثيرة حدود من الدرجة ن وكل من مجالها والمجال المقابل هو ح ما لم يذكر خلاف ذلك.

* الدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ $س^{ن}$ حيث أ ∈ ح* ، ن ∈ $ص_+$ تسمى دالة قوى لذلك عند جمع أو طرح دوال قوى مع ثوابت نحصل على دالة كثيرة حدود.

* مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود د هى مجموعة قيم س التى تجعل د (س) = صفر وهى تساوى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع الشكل البيانى للدالة مع محور السينات.

مثال

بين مع ذكر السبب أى العلاقات المبينة بالمخططات السهمية الآتية تمثل دالة وأيها لا تمثل دالة وإذا كانت دالة أذكر المجال والمدى :



الحـــل

* $ع_1$ لا تمثل دالة لأن العنصر ب ∈ س لم يخرج منه أى سهم.

* $ع_2$ لا تمثل دالة لأن العنصر أ ∈ س خرج منه سهمان.

* $ع_3$ تمثل دالة لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص

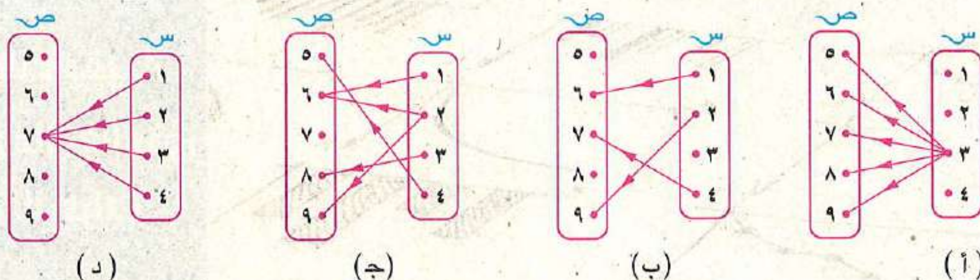
، مجال الدالة = {أ ، ب ، ح ، ء} ، مدى الدالة = {١ ، ٣ ، ٥}

تمـارين على متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

من أسئلة الكتاب المدرسى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أى المخططات السهمية الآتية يمثل دالة من س إلى ص ؟



② العلاقة المبينة بمجموعة الأزواج المرتبة والتى لا تمثل دالة هى ....

(أ) {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧) ، (٧ ، ٩)}

(ب) {(٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٥)}

(جـ) {(٠ ، ٣) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣)}

(د) {(-٣ ، ٥) ، (-١ ، ٥) ، (٠ ، ٥) ، (٢ ، ٥)}

③ إذا كانت د : ح ⟵ ح وكانت د تربط العدد بنصف مربعه مضافًا إليه ٣ فإن : د (٢) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٥

④ إذا كانت ط هى مجموعة الأعداد الطبيعية أى مما يأتى يمثل دالة من ط ⟵ ط ؟

(أ) د (س) = $\frac{٢ س}{٣}$ (ب) ر (س) = ١ − س

(جـ) هـ (س) = ٢ س + ٣ (د) ن (س) = $\frac{١}{س - ٢}$

⑤ إذا كانت د : {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ⟵ ح حيث د (س + ٢) = ٣ س + ١

فإن : د (٣) = ...

(أ) ١٠ (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ١

⑥ مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س^٣ - ٨}{٤}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٨} (جـ) ح − {٢} (د) ح − {٤}

⑦ إذا كانت د : $ح^+$ ⟵ ح ، د (س) = $\frac{س^٢ + ١}{س}$ فإن مجال الدالة هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٠} (جـ) $ح^+$ (د) ح − {-١}

الدرس

1

الـدوال الحقيقيـة (تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد)

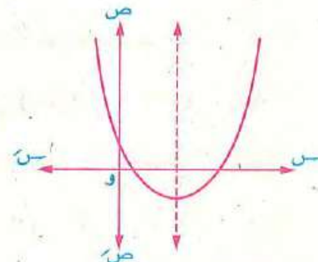
الدالة الحقيقية

الدالة د : س ← ص تسمى دالة حقيقية إذا كان كل من المجال (س) والمجال المقابل (ص) هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية فعلية منها.

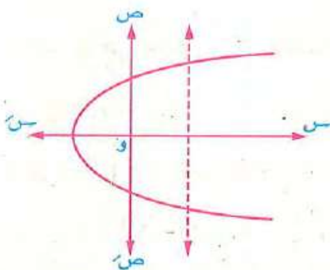
• **تحديد كون العلاقة من س ← ص دالة أم لا :**

1 **جبريًا** : العلاقة تكون دالة إذا كان كل قيمة للمتغير س ∈ س يناظرها قيمة واحدة فقط للمتغير ص ∈ ص

2 **بيانيًا (اختبار الخط الرأسى)** : العلاقة لا تمثل دالة إذا وجد خط مستقيم رأسى (يوازى محور الصادات) يقطع الشكل البيانى فى أكثر من نقطة :



التمثيل البيانى للعلاقة يمثل دالة من س ← ص



التمثيل البيانى للعلاقة لا يمثل دالة من س ← ص

مثال 1

بين أيًا من العلاقتين الآتيتين تمثل دالة وأيهما لا تمثل دالة على ح مع ذكر السبب :

1 ص = $س^2$ + ٣ 2 $ص^2$ = $س^2$ + ٩

الحــل

1 العلاقة ص = $س^2$ + ٣ تمثل دالة لأن كل قيمة حقيقية للمتغير س يناظرها قيمة وحيدة فقط للمتغير ص

فمثلًا : عند س = ٣ ∴ ص = ١٢ ، وعند س = −٢ ∴ ص = ٧ ، .... وهكذا

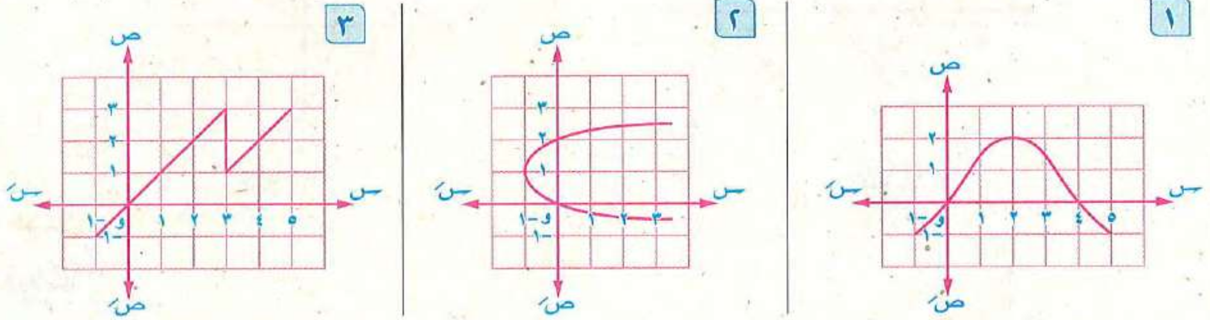
٢ العلاقة $ص^٢ = س^٢ + ٩$ لا تمثل دالة

لأنه توجد على الأقل قيمة حقيقية للمتغير س يناظرها قيمتان مختلفتان للمتغير ص

فمثلاً : عند س = ٤ ∴ $ص^٢ = ٢٥$ ∴ ص = ± ٥

مثال ٢

بين أيًا من الأشكال البيانية الآتية يمثل دالة على ح وأيها لا يمثل دالة مع ذكر السبب :



الحـــل

١ يمثل دالة لأن كل خط رأسى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة على الأكثر.

٢ لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسى يقطع المنحنى فى أكثر من نقطة واحدة.

٣ لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسى يمر بالنقطة (٣ ، ٠) ويقطع المنحنى فى أكثر من نقطة واحدة.

ملاحظتان

١ العلاقة ص = ٤ (تمثل بخط مستقيم أفقى يوازى محور السينات) تعبر عن دالة من س إلى ص لأن كل عنصر من س يرتبط بعنصر واحد فقط من ص

٢ العلاقة س = ٤ (تمثل بخط مستقيم رأسى يوازى محور الصادات) لا تعبر عن دالة من س إلى ص لأن العنصر س = ٤ ارتبط بعدد لا نهائى من عناصر ص

تحديد مجال الدوال الحقيقية

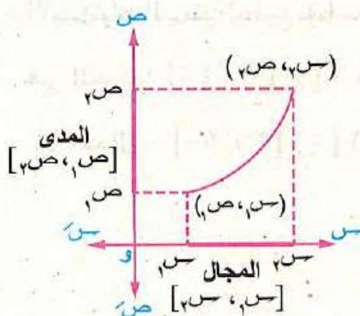
يتعين مجال الدالة من قاعدتها أو من الشكل البيانى لها.

أولاً تعيين مجال ومدى الدالة من الشكل البيانى لها

من الشكل البيانى للدالة يمكن استنتاج مجال ومدى الدالة فيكون :

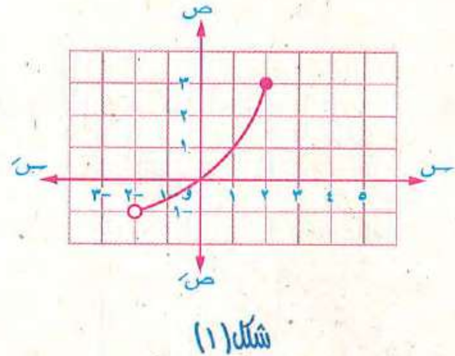
١ مجال الدالة هو مجموعة الإحداثيات السينية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.

٢ مدى الدالة هو مجموعة الإحداثيات الصادية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.

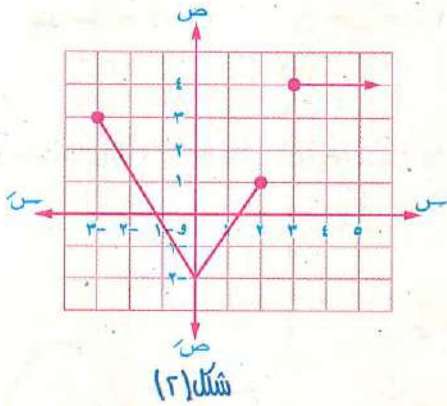


مثال ٣

عين مجال ومدى كل من الدالتين الممثلتين بالشكلين الآتيين :



شكل(١)



شكل(٢)

الحـــل

فى شكل(١) :

* الإحداثيات السينية لجميع نقط منحنى الدالة

هى الفترة]-٢ ، ٢]

∴ المجال =]-٢ ، ٢]

* الإحداثيات الصادية لجميع نقط منحنى الدالة

هى الفترة]-١ ، ٣]

∴ المدى =]-١ ، ٣]

لاحظ أن

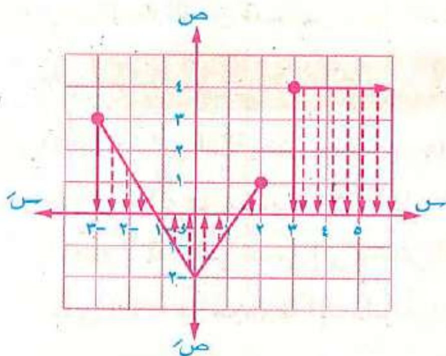
* الدائرة المفرغة عند النقطة (-٢ ، -١) توضح أن النقطة ∌ بيان الدالة وبالتالى -٢ ∌ مجال الدالة ، -١ ∌ مدى الدالة
* الدائرة المغلقة عند النقطة (٢ ، ٣) توضح أن النقطة ∋ بيان الدالة وبالتالى ٢ ∋ مجال الدالة ، ٣ ∋ مدى الدالة

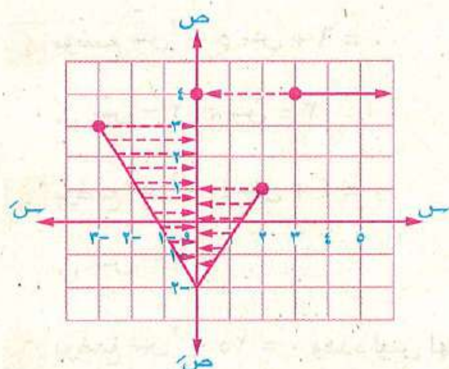
فى شكل(٢) :

* الإحداثيات السينية لجميع نقط منحنى الدالة

هى الفترتين [-٣ ، ٢] ، [٣ ، ∞[

∴ المجال = [-٣ ، ٢] ∪ [٣ ، ∞[





* ∵ الإحداثيات الصادية لجميع نقط الشعاع الأفقى هى ص = ٤ ، الإحداثيات الصادية لجزء المنحنى الآخر هى الفترة [-٢ ، ٣]

∴ المدى = [-٢ ، ٣] ∪ {٤}

ثانيًا تعيين مجال الدالة إذا عُلمت قاعدتها

١ الدالة كثيرة الحدود

مجال الدالة كثيرة الحدود يساوى ح ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

فمثلًا : د : د (س) = ٣ كثيرة حدود ثابتة مجالها = ح

، د : د (س) = ٢ س + ١ كثيرة حدود من الدرجة الأولى مجالها = ح

، د : د (س) = $س^٢$ - ٤ س + ٣ كثيرة حدود من الدرجة الثانية مجالها = ح

٢ الدالة الكسرية

إذا كانت د دالة كسرية حيث د (س) = $\frac{هـ (س)}{ن (س)}$ ، هـ ، ن كثيرتى حدود

فإن مجال الدالة د هو ح - مجموعة أصفار المقام.

مثال ٤

عين مجال كل من الدوال الكسرية المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = $\frac{١}{س}$

٢ د (س) = $\frac{٣}{س - ٢}$

٣ د (س) = $\frac{س - ١}{٢ س^٢ + ٥ س}$

٤ د (س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٥ س + ٦}$

٥ د (س) = $\frac{س + ١}{س^٢ - ٤ س + ٤}$

٦ د (س) = $\frac{س}{س^٢ + ٢٥}$

الحل

١ المجال = ح - {٠}

٢ المجال = ح - {٢}

٣ بوضع ٢ $س^٢$ + ٥ س = ٠ ∴ س (٢ س + ٥) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = $\frac{-٥}{٢}$ ∴ المجال = ح - {٠ ، $\frac{-٥}{٢}$}

٤ بوضع $س^٢ - ٥ س + ٦ = ٠$ ∴ $(س - ٢)(س - ٣) = ٠$

∴ س = ٢ أ، س = ٣   ∴ المجال = ح - {٢ ، ٣}

٥ بوضع $س^٢ - ٤ س + ٤ = ٠$ ∴ $(س - ٢)^٢ = ٠$

∴ س = ٢   ∴ المجال = ح - {٢}

٦ بوضع $س^٢ + ٢٥ = ٠$ وهذه ليس لها حل فى ح أى لا توجد أصفار حقيقية للمقام

∴ المجال = ح

٣ دالة الجذر النونى

إذا كانت د (س) = $\sqrt[ن]{هـ (س)}$ حيث ن ∈ $ص^+$ ، ن > ١ ، هـ (س) كثيرة حدود

أولاً : عندما ن عدد فردى   فإن مجال الدالة د هو ح

ثانيًا : عندما ن عدد زوجى   فإن مجال الدالة د هو مجموعة قيم س التى تحقق

هـ (س) ≥ ٠ حيث ن تسمى دليل الجذر.

مثال ٥

عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = $\sqrt{س + ٢}$ ٢ د (س) = $\sqrt{-٢ س + ٣}$

٣ د (س) = $\sqrt[٣]{٩ - س^٢}$ ٤ د (س) = $\frac{٣}{\sqrt{س - ٤}}$

الحل

١ ∵ دليل الجذر عدد زوجى   ∴ الدالة معرفة بشرط س + ٢ ≥ ٠

∴ س ≥ -٢   ∴ المجال = [-٢ ، ∞[

٢ ∵ دليل الجذر عدد زوجى   ∴ -٢ س + ٣ ≥ ٠

∴ س ≤ $\frac{٣}{٢}$ ∴ المجال =]-∞ ، $\frac{٣}{٢}$]

٣ ∵ دليل الجذر عدد فردى   ∴ المجال = ح

٤ ∵ دليل الجذر عدد زوجى   ∴ الدالة تكون معرفة بشرط أن : س - ٤ > ٠

∴ س > ٤   ∴ المجال =]٤ ، ∞[

٤ الدالة مجزأة المجال «ذات المقاطع»

هى دالة معرفة بقواعد مختلفة فى فترات مختلفة من مجالها ومجال هذه الدالة يساوى اتحاد الفترات المعرفة فيها قواعدها.

مثال ٦

عين مجال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

١ د (س) = { ٢ − س ، س < ٠ ؛ س − ٢ ، س > ٠ }

٢ د (س) = { س^٢ ، −٢ ≤ س < ٠ ؛ س ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ ١/س ، س > ١ }

الحل

١ الدالة د معرفة على فترتين كما يلى :

معرفة عندما س ∈]−∞ ، ٠[

، معرفة عندما س ∈]٠ ، ∞[

∴ مجال د =]−∞ ، ٠[∪]٠ ، ∞[= ح − {٠}



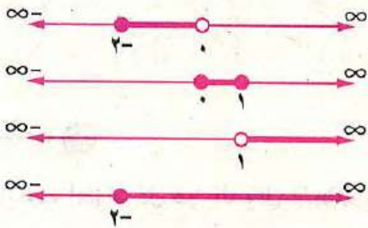
٢ الدالة د معرفة على ثلاث فترات كما يلى :

معرفة عندما س ∈ [−٢ ، ٠[

، معرفة عندما س ∈ [٠ ، ١]

، معرفة عندما س ∈]١ ، ∞[

∴ مجال د = [−٢ ، ٠[∪ [٠ ، ١] ∪]١ ، ∞[= [−٢ ، ∞[



تعيين اطراد الدالة من الشكل البيانى لها

* يقصد ببحث اطراد دالة ما تحديد الفترات التى تكون فيها الدالة تزايدية والفترات التى تكون فيها الدالة تناقصية والفترات التى تكون فيها الدالة ثابتة.

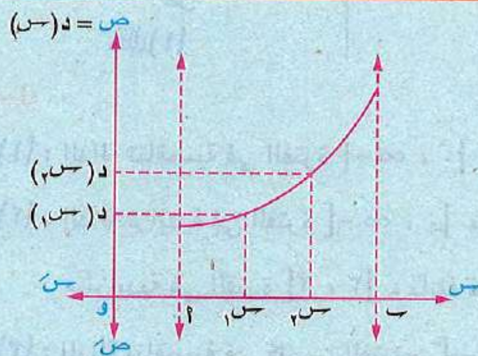
تعريف ① تزايد الدالة

يقال للدالة د إنها تزايدية فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

س٢ > س١ ⟸ د (س٢) > د (س١)

لكل س١ ، س٢ ∈]أ ، ب[



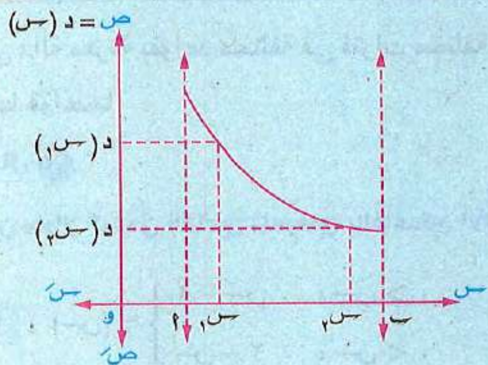
تعريف ② تناقص الدالة

يقال للدالة د إنها تناقصية فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

$س_٢ > س_١ \Leftarrow د(س_٢) < د(س_١)$

لكل $س_١$ ، $س_٢ \in$]أ ، ب[



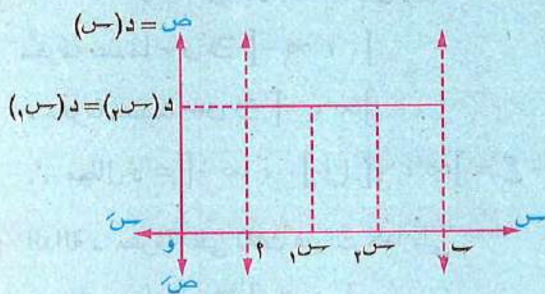
تعريف ③ ثبوت الدالة

يقال للدالة د إنها ثابتة فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

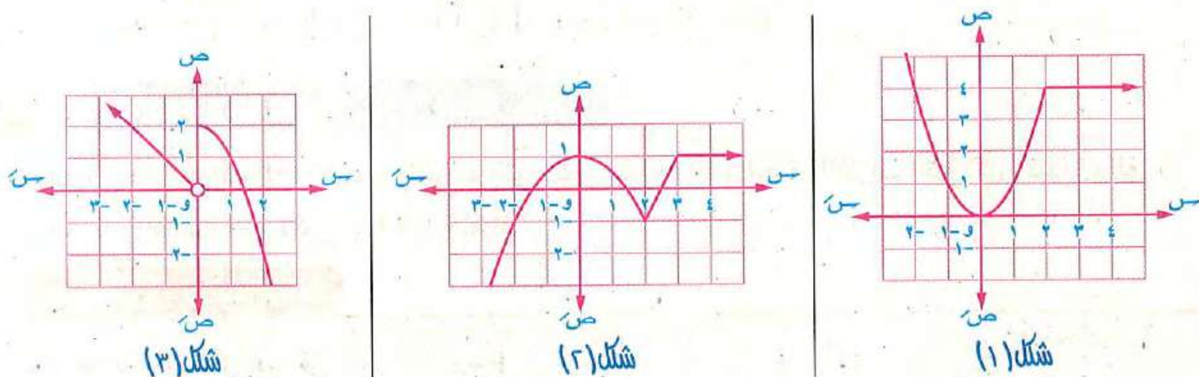
$س_٢ > س_١ \Leftarrow د(س_٢) = د(س_١)$

لكل $س_١$ ، $س_٢ \in$]أ ، ب[



مثال ٧

ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :



الحـــل

شكل (١) : الدالة تناقصية فى الفترة]− ∞ ، ٠[، تزايدية فى الفترة]٠ ، ٢[، ثابتة فى الفترة]٢ ، ∞[

شكل (٢) : الدالة تزايدية فى الفترة]− ∞ ، ٠[، تناقصية فى الفترة]٠ ، ٢[

، تزايدية فى الفترة]٢ ، ٣[، ثابتة فى الفترة]٣ ، ∞[

شكل (٣) : الدالة تناقصية فى كل من الفترتين]− ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

نشاط (العمليات على الدوال)

* إذا كانت $د_1$ ، $د_2$ دالتين مجالاهما $م_1$ ، $م_2$ فإن :

1. $(د_1 \pm د_2)$ (س) = $د_1$ (س) $\pm$ $د_2$ (س) ، مجال $(د_1 \pm د_2)$ هو $م_1 \cap م_2$
2. $(د_1 \times د_2)$ (س) = $د_1$ (س) $\times$ $د_2$ (س) ، مجال $(د_1 \times د_2)$ هو $م_1 \cap م_2$
3. $\left(\frac{د_1}{د_2}\right)$ (س) = $\frac{د_1 (س)}{د_2 (س)}$ حيث $د_2$ (س) $\neq$ ٠

، مجال $\left(\frac{د_1}{د_2}\right)$ هو $(م_1 \cap م_2)$ − ص $(د_2)$ حيث ص $(د_2)$ مجموعة أصفار $د_2$

ونلاحظ أنه فى جميع العمليات على الدوال يكون مجال الدالة الناتجة يساوى تقاطع مجالى الدالتين مع استثناء القيم التى تجعل المقام يساوى الصفر فى عملية القسمة.

مثال

إذا كانت د : $ح^+$ ⟵ ح حيث د (س) = ٢ $س^٢$ − ٧ س + ٥

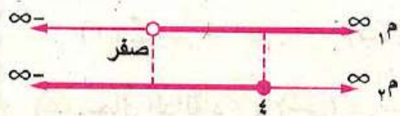
، ر :]− ∞ ، ٤] ⟵ ح حيث ر (س) = ٢ س − ٥ **أوجد :**

1. (د + ر) (س)
2. (د − ر) (س)
3. (د × ر) (س)
4. $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (س)

وعين مجال كل منهم ثم احسب قيمة كل من :

(د + ر) (٣) ، (د − ر) (٠) ، (د × ر) (−٣) ، $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (١)

الحـــل



مجال د = $م_1$ = $ح^+$ ، مجال ر = $م_2$ =]− ∞ ، ٤]

∴ المجال المشترك للدالتين = $م_1 \cap م_2$ = $ح^+ \cap$]− ∞ ، ٤] =]٠ ، ٤]

1. (د + ر) (س) = (٢ $س^٢$ − ٧ س + ٥) + (٢ س − ٥) = ٢ $س^٢$ − ٥ س ، المجال =]٠ ، ٤]
2. (د − ر) (س) = (٢ $س^٢$ − ٧ س + ٥) − (٢ س − ٥) = ٢ $س^٢$ − ٩ س + ١٠ ، المجال =]٠ ، ٤]
3. (د × ر) (س) = (٢ $س^٢$ − ٧ س + ٥) (٢ س − ٥)

= ٤ $س^٣$ − ٢٤ $س^٢$ + ٤٥ س − ٢٥ ، المجال =]٠ ، ٤]

4. $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (س) = $\frac{٢ س^٢ - ٧ س + ٥}{٢ س - ٥}$ = $\frac{(٢ س - ٥)(س - ١)}{٢ س - ٥}$ = س − ١ ، المجال =]٠ ، ٤] − $\left\{\frac{٥}{٢}\right\}$

القيم العددية : ● (د + ر) (٣) = ٢ × ٩ − ٥ × ٣ = ٣

● (د − ر) (٠) غير معرفة لأن صفر ∌]٠ ، ٤]

● (د × ر) (−٣) غير معرفة لأن −٣ ∌]٠ ، ٤]

● $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (١) = صفر



تمارين 1 على الدوال الحقيقية (تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد)

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة ....

(أ) ص = ٣ س + ١ (ب) ص = $\text{س}^{٢}$ − ٤ (جـ) س = $\text{ص}^{٢}$ − ٢ (د) ص = جا س

(٢) فى جميع العلاقات التالية تكون ص دالة فى س ماعدا العلاقة ....

(أ) ص = جتا س (ب) ص = ٢ (جـ) ص = $\text{س}^{٢}$ − ١ (د) $\text{ص}^{٢}$ = $\text{س}^{٢}$ + ١

(٣) الدالة د : د (س) = ٥ مجالها هو ....

(أ) ح (ب) ح^{+} (جـ) {٥} (د) {٠ ، ٥}

(٤) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\text{٢ س + ١}}{\text{س − ٢}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {$-\frac{١}{٢}$} (جـ) ح − {$-\frac{١}{٢}$ ، ٢} (د) ح − {٢}

(٥) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س + ٥}}{\text{(س + ٥) (س − ٥)}}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٥ ، −٥} (جـ) ح − {٥} (د) ح − {٥ ، −٥}

(٦) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س}^{٢}\text{ + ١}}{\text{س}^{٢}\text{ + ٤ س}}$ هو ....

(أ) ح − {١ ، −١} (ب) ح − {٠ ، −٤} (جـ) ح (د) ح − {٠ ، ٤}

(٧) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{\text{٥ + ٢ س}}{\text{س}^{٢}\text{ + س + ١}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٥} (جـ) ح − {٢} (د) ح − {−٢ ، −٥}

(٨) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{\text{٧}}{\text{س}^{٣}\text{ − س}}$ هو ....

(أ) ح − {٣} (ب) ح − {٧} (جـ) ح − {٠ ، ١} (د) ح − {٠ ، ١ ، −١}

(٩) مجال الدالة د حيث د : ح^{+} ⟵ ح ، د (س) = $\frac{\text{س − ١}}{\text{٤ س}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٠} (جـ) ح^{+} (د) ح − {١}

(١٠) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٢}{س^٢ - ٦ س + ك}$ هو ح - {٣} فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ± ٩ (د) ١٨

(١١) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٣}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح - {٣} (جـ) [٣ ، ∞[(د)]-∞ ، ٣]

(١٢) مجال الدالة د حيث د (س) = $\sqrt{٤ - س}$ هو ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٤] (جـ)]٤ ، ∞[(د)]-∞ ، ٤[

(١٣) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt[٣]{س - ٥}$ هو ....

(أ) [٥ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٥] (جـ) ح (د) ح$^+$

(١٤) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt[٣]{٩ - س^٢}$ هو ....

(أ) [-٣ ، ٣] (ب) ح (جـ) ح -]-٣ ، ٣[(د)]-٣ ، ٣[

(١٥) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ٤}}$ هو ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]٤ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ٤[(د)]-∞ ، ٤]

(١٦) مجال الدالة د حيث د (س) = $\sqrt[٤]{س^٢ + ٤}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح - {٤} (جـ) ح - {٠} (د) ح - {-٢ ، ٢}

(١٧) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{س^٢ - ٥ س - ٦}}$ هو ....

(أ) ح - {٥} (ب) ح - {٦} (جـ) ح - {١ ، -٦} (د) ح - {-١ ، ٦}

(١٨) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\sqrt{س - أ}}$ هو]-٣ ، ∞[فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) ± ٣ (د) $\sqrt{٣}$

(١٩) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\sqrt{س^٢ + أ}}$ هو ح فإن : أ لايمكن أن تساوى ....

(أ) ٥ (ب) $\sqrt{٤}$ (جـ) صفر (د) ٩

(٢٠) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} -٤ س + ٣ & ، س < ٣ \\ -س^٣ & ، ٣ \le س \le ٨ \\ ٣ س^٢ + ١ & ، س > ٨ \end{cases}$ فإن : د (١٠) = ...

(أ) -٣٧ (ب) -١٠٠٠ (جـ) ٣٠١ (د) ٤٣

(٢١) مجال الدالة د حيث د (س) = { -٢ ، س < ٢ ؛ ٣ ، س > ٢ } هو ....

(أ) ح (ب) ح - {٣} (جـ) ح - {-٢} (د) ح - {٢}

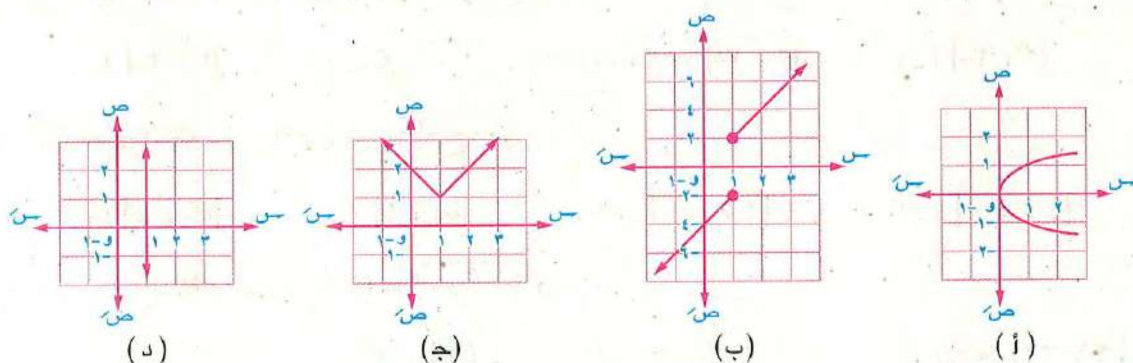
(٢٢) مجال الدالة د حيث د (س) = { س ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ ٢ - س ، ١ < س ≤ ٢ } هو ....

(أ) ح - {١} (ب) [٠ ، ٢] (جـ) ح - {٠ ، ٢} (د)]٠ ، ٢[

(٢٣) مجال الدالة د : د (س) = { ٠ ، س ≤ ٠ ؛ ١ ، س > ٣ } هو ....

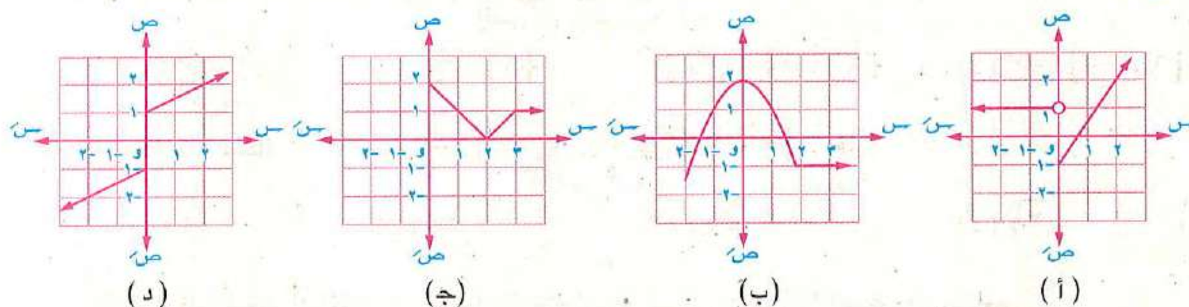
(أ) {٠ ، ١} (ب)]٠ ، ٣] (جـ) ح (د) ح -]٠ ، ٣]

(٢٤) الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو ....



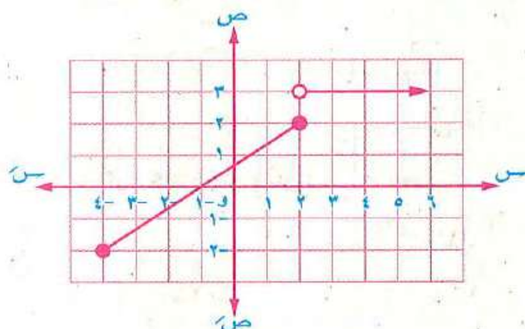
(أ) (ب) (جـ) (د)

(٢٥) أى الأشكال البيانية الآتية لا يمثل دالة فى س ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٢٦) الشكل المقابل يمثل ....



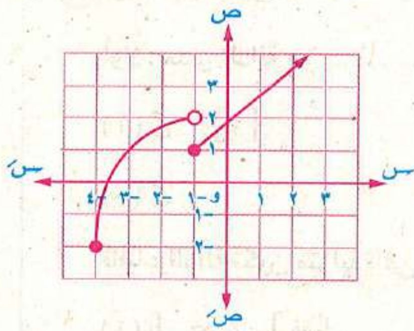
(أ) دالة د : [-٤ ، ٢] ⟵ ح

(ب) دالة د : [-٤ ، ∞[⟵ ح

(جـ) دالة د : [-٤ ، ٢] ⟵ [-٢ ، ٣]

(د) علاقة بين س ، ص ولا تمثل دالة.

(٢٧) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن مجالها هو ....

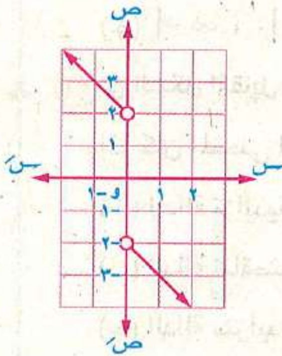
(أ) ح - {-٤ ، -١}

(ب)]-٤ ، -١[

(جـ) [-٤ ، ∞[

(د) [-٤ ، ∞[- {-١}

(٢٨) الشكل المقابل يمثل دالة فى س مجالها ....



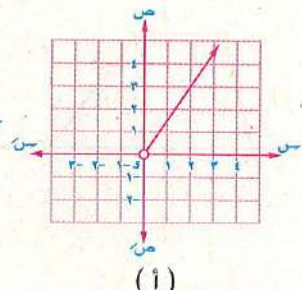
(أ) ح

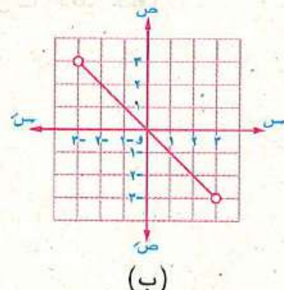
(ب) ح -]-٢ ، ٢[

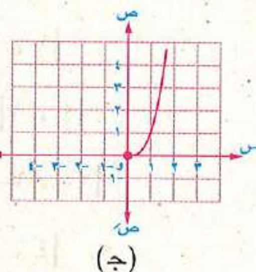
(جـ) ح - [-٢ ، ٢]

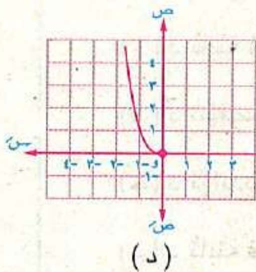
(د) ح - {٠}

(٢٩) أى من الأشكال الآتية تمثل منحنى دالة يكون فيه المدى ≠ المجال ؟

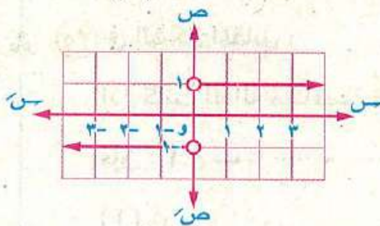

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

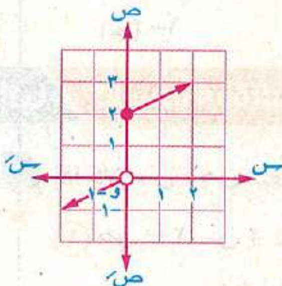
(٣٠) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



(أ) {١}　　　(ب) {١ ، -١}

(جـ) {-١}　　　(د) ح - {٠}

(٣١) الشكل المقابل يمثل دالة فى س مداها ....



(أ) ح - [٠ ، ٢]　　　(ب) ح - {٠}

(جـ) ح -]٠ ، ٢[　　　(د) ح -]٠ ، ٢]

(٣٢) في الشكل المقابل :

أولاً : مدى الدالة هو ....

(أ) ح − {٠}　　(ب) ح − [−٢ ، ٢]

(جـ) ح　　(د) [−٢ ، ٢]

ثانيًا : الدالة تكون متزايدة في ....

(أ)]− ∞ ، ٠[فقط.　　(ب)]٠ ، ∞[فقط.

(جـ)]− ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[　　(د) ح − [−٢ ، ٢]

(٣٣) في الشكل المقابل :

إذا كان المنحنى المرسوم يمثل الدالة د أى العبارات الآتية صحيحة ؟

(أ) الدالة تزايدية على مجالها

(ب) الدالة تناقصية في]− ∞ ، ٠[وتزايدية في]٠ ، ∞[

(جـ) الدالة متزايدة في كل من]− ∞ ، ٢[،]−٢ ، ∞[

(د) الدالة تزايدية في كل من]− ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

(٣٤) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د أى العبارات الآتية خطأ ؟

(أ) د ثابتة في]−٢ ، ١[

(ب) د تناقصية في]١ ، ٤[

(جـ) د تزايدية في]−٣ ، −٢[

(د) د ثابتة في]−٣ ، ٤[

(٣٥) في الشكل المقابل :

إذا كانت الدالة متناقصة في]٠ ، أ[وثابتة في]ب ، ∞[

فإن : أ − ب = ...

(أ) ٥　　(ب) ١

(جـ) −١　　(د) ٣

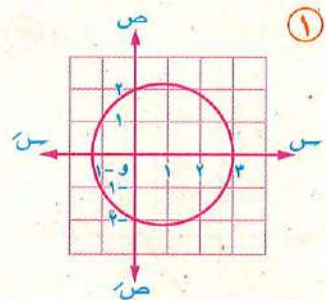
ثانيًا الأسئلة المقالية

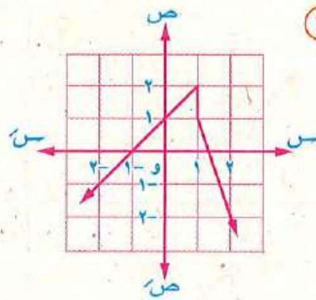
١ إذا كان س ، ص متغيرين حقيقيين فحدد أى علاقة مما يأتى تمثل دالة في س وأيها لا :

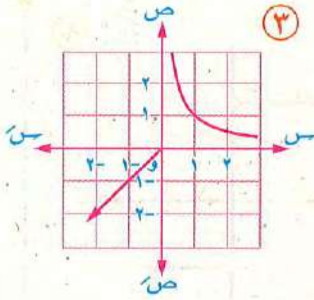
(١) ص = ٢ س + ٥　|　(٢) $ص^٢ = س + ٤$　|　(٣) $ص = \sqrt{س^٢ + ٤}$

(٤) $(س − ص)^٢ = ٥$　|　(٥) ص = ٢　|　(٦) س = ٣

٢ فى كل شكل من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت ص تمثل دالة فى س أم لا :

①


②


③


---

٣ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① د (س) = $\frac{٢ س + ٣}{س^٢ - ٣ س + ٢}$

② د (س) = $\frac{٨}{س^٢ - ٦ س + ٩}$

③ د (س) = $\frac{س + ٣}{٣ س^٢ - س - ٢}$

④ د (س) = $\frac{س + ١}{س^٣ + ١}$

---

٤ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① د (س) = $\sqrt{س}$

② د (س) = $\frac{٤}{\sqrt[٣]{٢ س - ٥}}$

③ د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س + ٤}}$

④ د (س) = $\frac{١}{\sqrt{٣ - س}}$

---

٥ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① د (س) = $\begin{cases} -٣ & ، س < ٣ \\ ٥ - س & ، س \geq ٣ \end{cases}$

② د (س) = $\begin{cases} س^٢ - ١ & ، س \leq ٢ \\ -٥ & ، ٢ < س < ٤ \end{cases}$

③ د (س) = $\begin{cases} ٣ س & ، س \in [٠ ، ٢] \\ ٦ & ، س \in]٢ ، ٤[\\ س + ٢ & ، س \in [٤ ، ٦] \end{cases}$

---

٦ إذا كانت د : س ⟵ ح وكانت س = {١ ، ٢ ، -٢ ، -٣}

أوجد مدى الدالة إذا كانت : د (س) = ٥ س - ٣

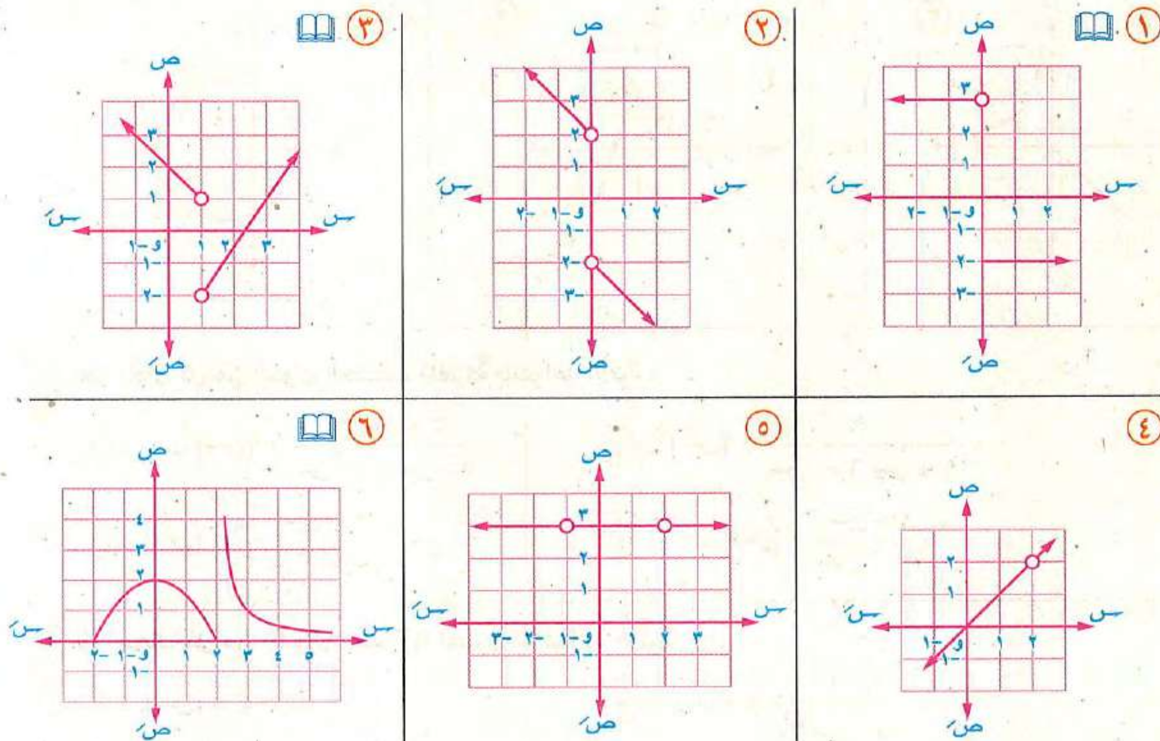
---

٧ إذا كانت ر : {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ⟵ ص+ حيث ر (س) = ٤ س - ٣

① اكتب مدى الدالة.

② إذا كانت ر (ك) = ١٧ فأوجد قيمة : ك

٨ عين مجال ومدى ثم ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :



ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت العلاقة بين مجموع قياسات زوايا المضلع الداخلة (ص) ، عدد أضلاع المضلع (س) هى ص = π (س − ٢) فإن مجال الدالة ص = ...

(أ) $ح^{+}$ (ب) ح − {٢} (جـ) $ص^{+}$ (د) $ص^{+}$ − {١ ، ٢}

(٢) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س}{\sqrt[3]{س} - ٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٢} (جـ) ح − {٠ ، ٢} (د) ح − {٨}

(٣) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س}{\sqrt[3]{س} - س}$ هو ....

(أ) $]0 ، \infty[$ (ب) $]-\infty ، 0[$ (جـ) $]0 ، \infty[$ − {١} (د) $]0 ، \infty[$ − {٣}

(٤) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ١} - ٣}$ هو ....

(أ) $[1 ، \infty[$ (ب) $[1 ، \infty[$ − {٣} (جـ) $[1 ، \infty[$ − {١٠} (د) $]-3 ، \infty[$

الدرس

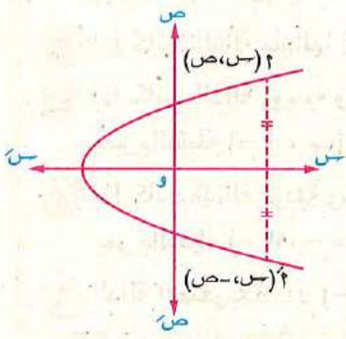
2

الدوال الزوجية والدوال الفردية

تمهيد

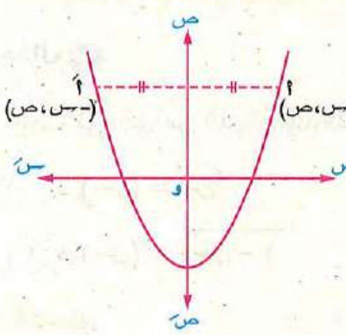
١ التماثل حول محور السينات

يكون الشكل البيانى متماثلًا حول محور السينات إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أَ (س ، − ص) تقع على الشكل البيانى حيث أَ صورة أ بالانعكاس فى محور السينات.



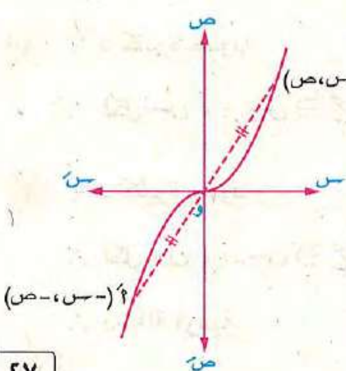
٢ التماثل حول محور الصادات

يكون الشكل البيانى متماثلًا حول محور الصادات إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أَ (− س ، ص) تقع على الشكل البيانى حيث أَ صورة أ بالانعكاس فى محور الصادات.



٣ التماثل حول نقطة الأصل «و»

يكون الشكل البيانى متماثلًا حول نقطة الأصل (و) إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أَ (− س ، − ص) تقع على الشكل البيانى حيث أَ صورة أ بالانعكاس فى نقطة الأصل (و)



الدالة الزوجية والدالة الفردية

- **الدالة الزوجية :** يقال إن الدالة د زوجية إذا كانت : د (– س) = د (س) لكل س ، – س فى مجال الدالة د ويكون الشكل البيانى للدالة الزوجية متماثلًا حول محور الصادات.
- **الدالة الفردية :** يقال إن الدالة د فردية إذا كانت : د (– س) = – د (س) لكل س ، – س فى مجال الدالة د ويكون الشكل البيانى للدالة الفردية متماثلًا حول نقطة الأصل.

ملاحظـات

1. إذا كانت : د (– س) $\neq$ د (س) ، د (– س) $\neq$ – د (س)
فإن الدالة د ليست زوجية وليست فردية.
2. عند بحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط انتماء كل من العنصرين س ، – س إلى مجال الدالة وإذا لم يتحقق الشرط كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون الحاجة لإيجاد د (– س)
3. إذا كانت الدالة مجالها ح – {أ} ، أ $\neq$ صفر فإن الدالة ليست زوجية وليست فردية بدون بحثها.
4. إذا كانت الدالة زوجية ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (أ ، ب) فإن منحنى الدالة أيضًا يمر بالنقطة (– أ ، ب)
5. إذا كانت الدالة فردية ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (أ ، ب) فإن منحنى الدالة أيضًا يمر بالنقطة (– أ ، – ب)
6. الدالة الصفرية د : د (س) = ٠ هى زوجية وفردية فى نفس الوقت.

مثال ١

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (س) = $س^٢$ | ٢ د (س) = ٢ $س^٣$

٣ د (س) = $\sqrt{س - ١}$ | ٤ د (س) = جا س

الحـل

١ ∵ د كثيرة حدود ∴ مجال د = ح

∴ لكل س ، – س ∈ ح يكون : د (– س) = $(– س)^٢$ = $س^٢$ = د (س) ∴ د دالة زوجية.

٢ ∵ د كثيرة حدود ∴ مجال د = ح

∴ لكل س ، – س ∈ ح يكون : د (– س) = ٢ $(– س)^٣$ = ٢ $(– س^٣)$ = –٢ $س^٣$ = – د (س)

∴ د دالة فردية.

٣ ∵ مجال د هو مجموعة قيم س التى تجعل س − ١ ≥ ٠ أى : س ≥ ١

∴ مجال د = [١ ، ∞[

∴ لكل س ∈ [١ ، ∞[لا يوجد − س ∈ [١ ، ∞[

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

لاحظ أن

٣ ∈ [١ ، ∞[

ولكن −٣ ∉ [١ ، ∞[

٤ ∵ مجال الدالة د : د (س) = جتا س هو ح

∴ لكل س ، − س ∈ ح يكون :

د (− س) = جتا (− س) = جتا س = د (س)

∴ د دالة زوجية.

تذكر أن

جا (− س) = − جا س

جتا (− س) = جتا س

طا (− س) = − طا س

ملاحظتان

١ تُسمى الدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ $س^{ن}$ حيث أ ≠ ٠ ، ن ∈ $ص_{+}$ دالة القوى وتكون الدالة د : زوجية إذا كان ن عددًا زوجيًا ، فردية إذا كان ن عددًا فرديًا.

٢ د (س) = جتا س ، د (س) = قا س دوال زوجية بينما د (س) = جا س ، د (س) = قتا س ، د (س) = طا س ، د (س) = ظتا س دوال فردية.

مثال ٢

إذا كانت د دالة زوجية حيث : د (س) = أ $س^{٢}$ + ب س + ٥ وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (١ ، ٦)

فأوجد : قيمة كل من أ ، ب

الحل

∵ الدالة زوجية ومنحناها يمر بالنقطة (١ ، ٦) ∴ المنحنى يمر بالنقطة (−١ ، ٦)

عند النقطة (١ ، ٦) ∴ ٦ = أ + ب + ٥ (١)

، عند النقطة (−١ ، ٦) ∴ ٦ = أ − ب + ٥ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ١٢ = ٢ أ + ١٠ ∴ ٢ أ = ٢ ∴ أ = ١

، بالتعويض فى (١) : ∴ ٦ = ١ + ب + ٥ ∴ ب = صفر

خواص هامة

إذا كانت كل من $د_{١}$ ، $د_{٢}$ دالة زوجية وكل من $ر_{١}$ ، $ر_{٢}$ دالة فردية ، فإن :

١ $د_{١}$ ± $د_{٢}$ دالة زوجية.

٢ $ر_{١}$ ± $ر_{٢}$ دالة فردية.

٣ $د_{١}$ ± $ر_{١}$ دالة ليست زوجية وليست فردية.

٤ كل من ($د_{١}$ × $د_{٢}$) ، $\left(\frac{د_{١}}{د_{٢}}\right)$ دالة زوجية.

٥ كل من ($ر_{١}$ × $ر_{٢}$) ، $\left(\frac{ر_{١}}{ر_{٢}}\right)$ دالة زوجية.

٦ كل من ($د_{١}$ × $ر_{١}$) ، $\left(\frac{د_{١}}{ر_{١}}\right)$ دالة فردية.

مثال ٣

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (س) = $س^٢$ + جتا س   ٢ د (س) = $س^٣$ + جا س

٣ د (س) = ٣ $س^٤$ ظا س

الحـــل

١ د (− س) = $(− س)^٢$ + جتا (− س) = $س^٢$ + جتا س = د (س)   ∴ د دالة زوجية.

حل آخر :

بفرض أن : د (س) = $د_١$ (س) + $د_٢$ (س) حيث $د_١$ (س) = $س^٢$ ، $د_٢$ (س) = جتا س

∵ $د_١$ (− س) = $(− س)^٢$ = $س^٢$ = $د_١$ (س)   ∴ $د_١$ دالة زوجية.

، ∵ $د_٢$ (− س) = جتا (− س) = جتا س = $د_٢$ (س)   ∴ $د_٢$ دالة زوجية.

∴ $د_١$ + $د_٢$ دالة زوجية.   ∴ د دالة زوجية.

٢ د (− س) = $(− س)^٣$ + جا (− س) = − $س^٣$ − جا س = − ($س^٣$ + جا س) = − د (س) ∴ د دالة فردية.

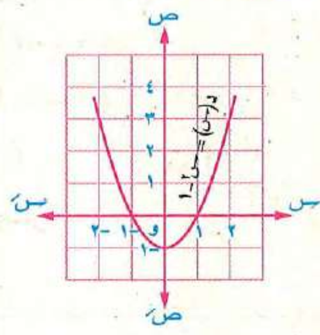
لاحظ أن : الدالة الناتجة من جمع دالتين فرديتين هى دالة فردية.

٣ د (− س) = ٣ $(− س)^٤$ ظا (− س) = ٣ $س^٤$ (− ظا س) = −٣ $س^٤$ ظا س = − د (س) ∴ د دالة فردية.

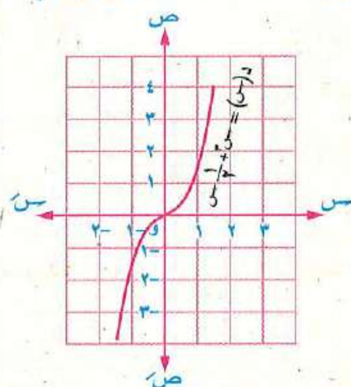
لاحظ أن : الدالة الناتجة من ضرب دالتين إحداهما زوجية والأخرى فردية هى دالة فردية.

مثال ٤

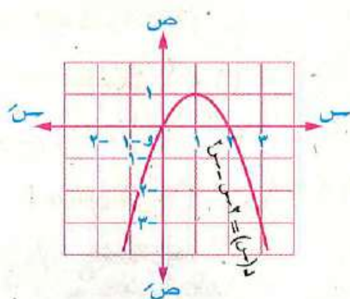
كل من الأشكال الآتية يوضح الشكل البيانى للدالة د ، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أم فردية أم غير ذلك وحقق إجابتك جبريًا :



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحـــل

شكل (١) : د (س) = $س^٢$ − ١ ∵ مجال الدالة د = ح والمنحنى متماثل حول محور الصادات ∴ الدالة د زوجية.

التحقق الجبرى : ∵ لكل س ، − س ∈ ح

د (− س) = $(− س)^٢$ − ١ = $س^٢$ − ١ = د (س)   ∴ الدالة د زوجية.

شكل(٢) : د $(س) = س^٣ + \frac{١}{٢} س$ ∵ مجال الدالة د = ح والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل و ∴ الدالة د فردية.

التحقق الجبرى : ∵ لكل س ، − س ∈ ح

د $(-س) = (-س)^٣ + \frac{١}{٢}(-س) = -س^٣ - \frac{١}{٢} س = -\left(س^٣ + \frac{١}{٢} س\right) = -$ د $(س)$ ∴ الدالة د فردية.

شكل(٣) : د $(س) = ٢ س - س^٢$

∵ مجال الدالة د = ح والمنحنى ليس متماثلًا حول محور الصادات وليس متماثلًا حول نقطة الأصل

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

التحقق الجبرى : لكل س ، − س ∈ ح

د $(-س) = ٢(-س) - (-س)^٢ = -٢ س - س^٢ = -(٢ س + س^٢)$

∴ د $(-س) \neq$ د $(س)$ ، د $(-س) \neq -$ د $(س)$ ∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

مثال ٥

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د $(س) = ٣ س^٤ - ٥ س^٢ + ١$

٢ د $(س) = س^٣ + ٢ س - ٥$

٣ د $(س) = \frac{س - جا ٣ س}{١ + س^٢}$

٤ د $(س) = \frac{س - ظا س}{س^٣ + س}$

الحل

١ ∵ د $(-س) = ٣(-س)^٤ - ٥(-س)^٢ + ١ = ٣ س^٤ - ٥ س^٢ + ١ =$ د $(س)$

∴ الدالة د زوجية.

٢ ∵ د $(-س) = (-س)^٣ + ٢(-س) - ٥ = -س^٣ - ٢ س - ٥ = -(س^٣ + ٢ س + ٥)$

∴ د $(-س) \neq$ د $(س)$ ، د $(-س) \neq -$ د $(س)$ ∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

٣ ∵ د $(-س) = \frac{(-س) - جا ٣(-س)}{١ + (-س)^٢} = \frac{(-س) - (-جا ٣ س)}{١ + س^٢} = \frac{-(س - جا ٣ س)}{١ + س^٢} = -$ د $(س)$

∴ الدالة د فردية.

٤ ∵ د $(-س) = \frac{(-س) - ظا (-س)}{(-س)^٣ + (-س)} = \frac{-س - (-ظا س)}{-س^٣ - س} = \frac{-س + ظا س}{-س^٣ - س}$

$= \frac{-(س - ظا س)}{-(س^٣ + س)} = \frac{س - ظا س}{س^٣ + س} =$ د $(س)$

∴ الدالة د زوجية.

تمارين 2
على الدوال الزوجية والدوال الفردية



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة الزوجية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = س^{٣} (ب) د (س) = جا س

(جـ) د (س) = س جتا س (د) د (س) = س جا س

(٢) الدالة الفردية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = س^{٢} جا س (ب) د (س) = ظا^{٢} س

(جـ) د (س) = جتا س (د) د (س) = ١

(٣) نوع الدالة د : د (س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ هى ....

(أ) زوجية. (ب) فردية. (جـ) لا زوجية ولا فردية. (د) خطية.

(٤) الدالة د : د (س) = س جتا س ....

(أ) زوجية. (ب) فردية. (جـ) ليست زوجية ولا فردية. (د) خطية.

(٥) كل مما يأتى قواعد دوال زوجية ما عدا ....

(أ) د (س) = جا س (ب) د (س) = جتا س (جـ) د (س) = س^{٢} − ١ (د) د (س) = ١

(٦) القاعدة التى لا تمثل دالة زوجية فيما يلى هى ....

(أ) ص = $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$ (ب) ص = قا س

(جـ) ص = س^{٢} + جا س (د) ص = ٣ س^{٤} + ٢٧

(٧) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{\text{جا س}}$ فإن : ....

(أ) د (س) = $\frac{١}{\text{د (س)}}$ (ب) د (س) = − د (−س)

(جـ) د (س) = د (−س) (د) د (−س) = د $\left(\frac{١}{\text{س}}\right)$

(٨) إذا كانت د دالة فردية ، د (١) = ٢ فأى من النقط الآتية تقع على منحنى د ؟

(أ) (−١ ، ٢) (ب) (−١ ، −٢) (جـ) (١ ، −٢) (د) (−١ ، ٠)

(٩) إذا كانت د دالة فردية ، أ ∋ مجال د فإن : د (أ) + د (− أ) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ د (أ) (جـ) ٢ أ (د) د (أ)

(١٠) اذا كانت : د (س) دالة فردية فإن : د (أ) − د (− أ) = ...

(أ) صفر (ب) د (أ) (جـ) ٢ د (أ) (د) د (٢ أ)

(١١) اذا كانت : د (س) دالة زوجية فإن : د (أ) − د (− أ) = ...

(أ) صفر (ب) د (أ) (جـ) ٢ د (أ) (د) د (٢ أ)

(١٢) إذا كانت د دالة زوجية ، ٢ ∋ مجال د فإن : د (٢) + د (−٢) = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ٢ د (٢)

(١٣) إذا كانت الدالة د دالة زوجية فى الفترة [أ ، ب] فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) − أ (جـ) ٢ أ (د) $أ^٣$

(١٤) إذا كانت د دالة حيث د :]−٥ ، ٥[⟵ ح ، د (س) = $س^٢$ فإن الدالة د (س) تكون ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) خطية. (د) ليست زوجية وليست فردية.

(١٥) إذا كانت : د (س) = أ $س^٣$ + ب س + حـ ، د دالة فردية فإن : حـ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) −١

(١٦) إذا كانت د : د (س) = $س^٢$ + أ س + ٩ دالة زوجية فإن : أ = ...

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) صفر (د) −٦

(١٧) إذا كانت : د (س) = $س^٣$ − س فإن : | د (س) + د (− س) | = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(١٨) إذا كانت د : د (س) = أ $س^٣$ + ب دالة فردية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٨)

فإن : أ + $ب^٢$ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٥

(١٩) الدالة د : د (س) = $س^٣$ + ٥ س متماثلة حول ....

(أ) محور السينات. (ب) محور الصادات. (جـ) نقطة الأصل. (د) لا يمكن أن تحدد.

(٢٠) الدالة د : د (س) = $س^٢$ + $س^٤$ + ١ متماثلة حول ....

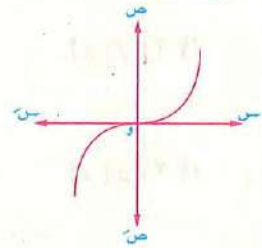
(أ) نقطة الأصل. (ب) محور السينات.

(جـ) محور الصادات. (د) ليس لها نقطة أو محور تماثل.

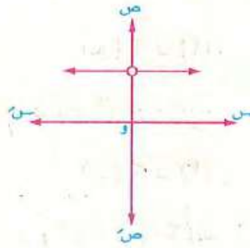
(٢١) الدالة د : د (س) = جا ٣ س متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٣ ، ٠) (جـ) (-٣ ، ٠) (د) (-٣ ، ٣)

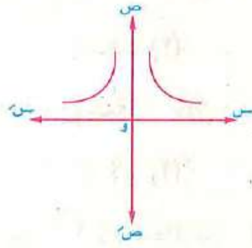
(٢٢) أى من الدوال الآتية ليست زوجية ؟



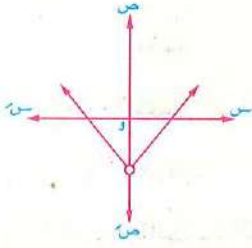
(أ)



(ب)

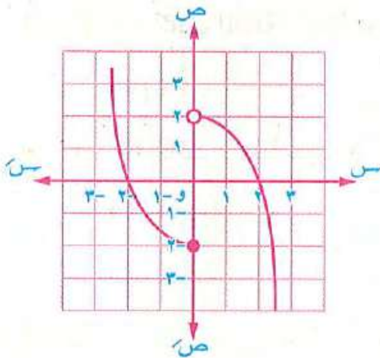


(جـ)



(د)

(٢٣) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن د تكون ....

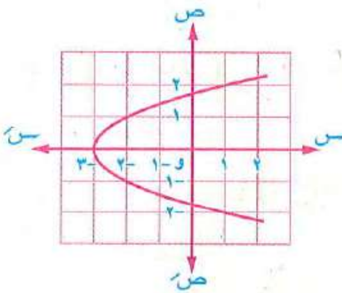
(أ) خطية.

(ب) زوجية.

(جـ) فردية.

(د) ليست زوجية وليست فردية.

(٢٤) المنحنى الموضح بالشكل المقابل



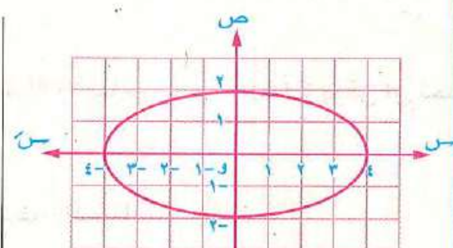
متماثل حول المستقيم الذى معادلته ....

(أ) س = صفر (ب) ص = صفر

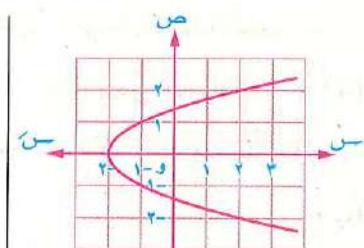
(جـ) ص = -٢ (د) س = ٢

ثانيًا / الأسئلة المقالية

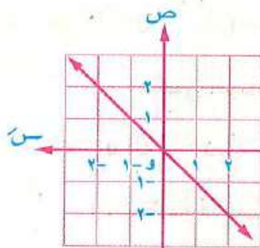
(١) فى كل من الأشكال الآتية اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل :



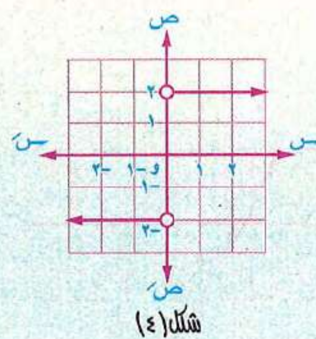
شكل (١)

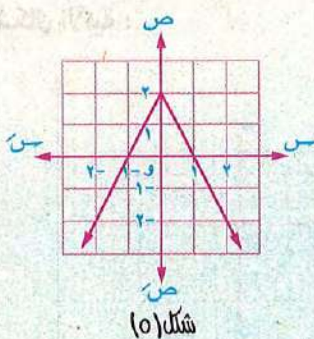


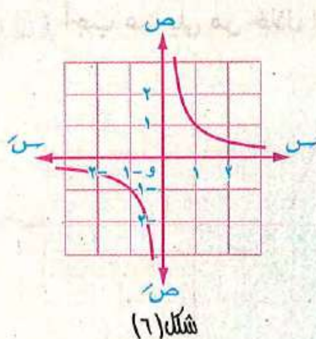
شكل (٢)



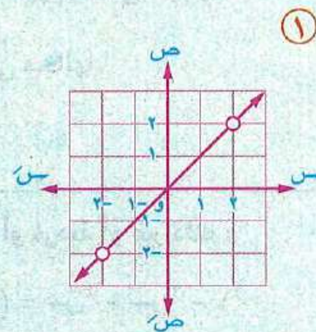
شكل (٣)

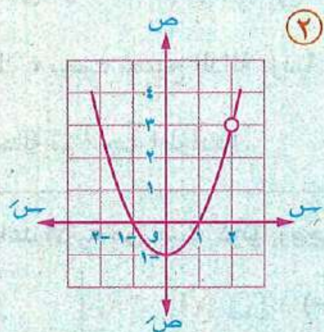

شكل (٤)

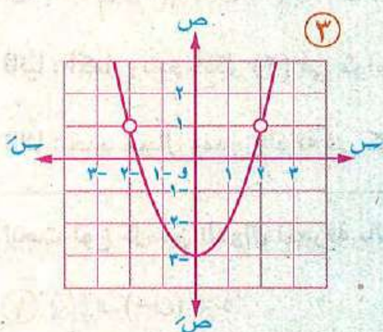

شكل (٥)

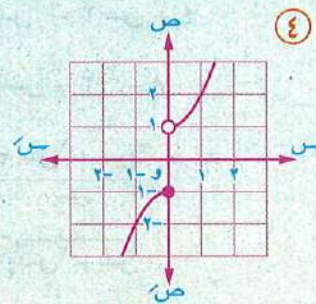

شكل (٦)

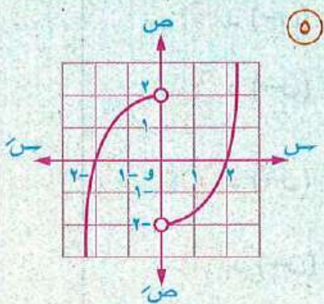
٢ اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

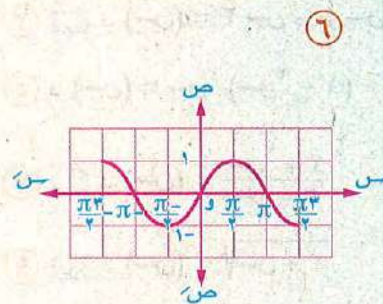
① 

② 

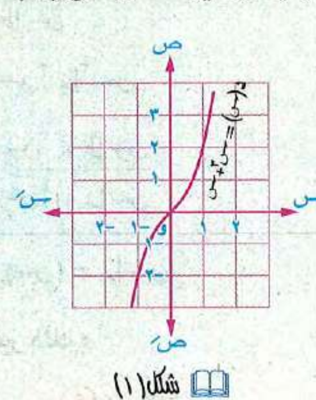
③ 

④ 

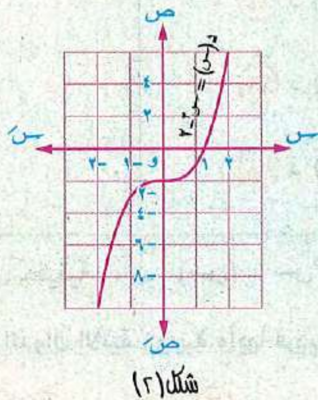
⑤ 

⑥ 

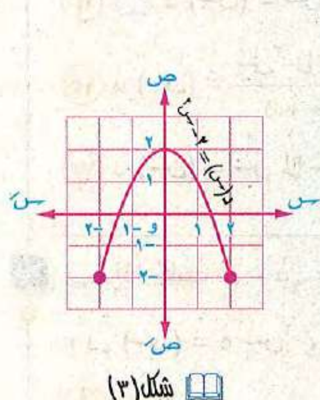
٣ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د ، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبريًا :



شكل (١)

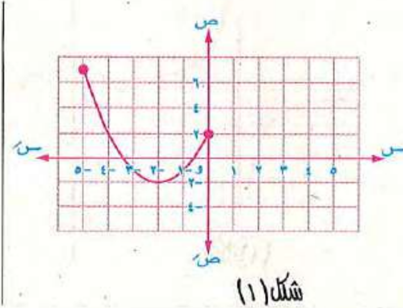


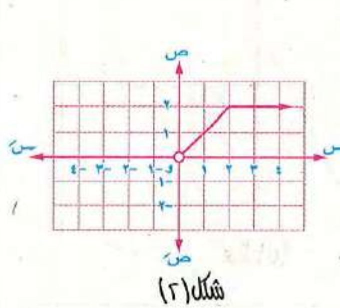
شكل (٢)

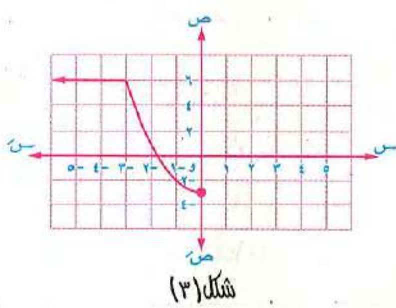


شكل (٣)

٤ أجب عما يلى من خلال الأشكال الآتية :


شكل (١)


شكل (٢)


شكل (٣)

أولًا : أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) فى كراستك ، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.

ثانيًا : أكمل رسم شكل (٢) فى كراستك ، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثالثًا : حدد مجال ومدى الدالة فى كل حالة ثم ابحث اطرادها.

---

٥ **ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :**

(١) $د(س) = ٥$

(٢) $د(س) = س^{٤} + س^{٢} - ١$

(٣) $د(س) = ٣س - ٤س^{٣}$

(٤) $د(س) = س^{٢} - ٣س + ٤$

(٥) $د(س) = س^{٣}(س^{٢} - ١)$

(٦) $د(س) = (س - ٣)^{٢} - ٧$

(٧) $د(س) = \frac{س^{٣} + ٢}{س - ٣}$

(٨) $د(س) = \frac{٢س^{٣} - س^{٥}}{س}$

(٩) $د(س) = \sqrt{س + ٣}$

(١٠) $د(س) = \sqrt[٣]{س^{٣} + س}$

(١١) $د(س) = س^{٣} - \frac{١}{س}$

(١٢) $د(س) = \left(س - \frac{٢}{س}\right)^{٣}$

(١٣) $د(س) = س\ جتا\ س$

(١٤) $د(س) = \frac{٣س}{طا\ س}$

(١٥) $د(س) = \frac{س^{٣}\ جا\ ٣س}{١ + س^{٤}}$

(١٦) $د(س) = س^{٢}\ جا^{٣}\ س$

(١٧) $د(س) = س\ جا\ س^{٣}$

(١٨) $د(س) = \frac{س^{٢} + طا\ س}{س^{٤} + جا\ س}$

---

٦ إذا كانت $د_{١}$ ، $د_{٢}$ ، $د_{٣}$ دوال حقيقية ، $د_{١}(س) = س^{٥}$ ، $د_{٢}(س) = جا\ س$

، $د_{٣}(س) = ٥س^{٢}$ ، **فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك :**

(١) $د_{١} + د_{٢}$ (٢) $د_{١} + د_{٣}$ (٣) $د_{١} \times د_{٢}$ (٤) $د_{٣} \times د_{٢}$

٧ إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ ، $ر_١$ ، $ر_٢$ دوال حقيقية حيث $د_١(س) = س^٤$

، $د_٢(س) = جتا^٥ س$ ، $ر_١(س) = ٢ س^٣$ ، $ر_٢(س) = جا^٣ س$

فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك :

(١) $د_١ + ر_٢$ | (٢) $د_١ - د_٢$ | (٣) $ر_١ + ر_٢$

(٤) $د_١ × ر_٢$ | (٥) $ر_١ × ر_٢$ | (٦) $\frac{د_٢}{د_١}$

---

٨ **اذكر نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :**

(١) د : ح ← ح ، د (س) = س + ٢

(٢) د (س) = $س^٢$ حيث د : $ص^+$ ← ص

(٣) د :]-٣ ، ٣[← ح ، د (س) = ٣ $س^٢$

(٤) د : $ح^+$ ← $ح^+$ حيث د (س) = $س^٢$

(٥) د : د (س) = $س^٢$ حيث س ∈ ح - {٣}

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د دالة فردية مجالها ح فإن : $\frac{٧ د (-٥) + ٣ د (٥)}{٢ د (-٥)}$ = ...

(أ) ٥ (ب) -٥ (جـ) ٢ (د) -٢

(٢) إذا كانت د دالة زوجية مجالها ح فإن : $\frac{٧ د (-٥) + ٣ د (٥)}{٢ د (-٥)}$ = ...

(أ) ٥ (ب) -٥ (جـ) ٢ (د) -٢

(٣) إذا كانت د دالة زوجية وكانت د (س) + $س^٢$ د (-س) = ٣ فإن : د (١) = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) ١ (جـ) $١\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(٤) إذا كانت د دالة فردية وكانت د (١) = ك وكانت د (س + ٢) = د (س) + د (٢)

فإن : د (٣) = ...

(أ) صفر (ب) ٣ ك (جـ) ٦ ك (د) ٩ ك



الدرس

3

التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال

تمثيل الدالة الخطية

* نعلم أن الدالة الخطية د : ح ⟵ ح حيث د (س) = أ س + ب يمثلها بيانيًا خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ب) وميله = أ

مثال ١

مثل بيانيًا الدالة د فى كل مما يأتى واستنتج من الرسم مدى الدالة :

١ د : ح ⟵ ح ، د (س) = $-\frac{1}{3}$ س

٢ د : [-١ ، ٢[⟵ ح ، د (س) = ٢ س - ١

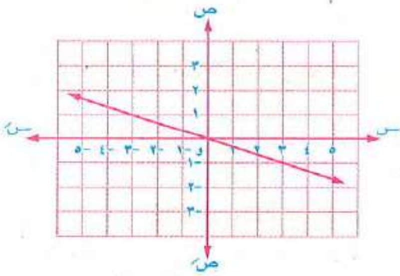
٣ د :]- ∞ ، ١[⟵ ح ، د (س) = ٢ س - ١

الحل

١ ∵ المجال = ح

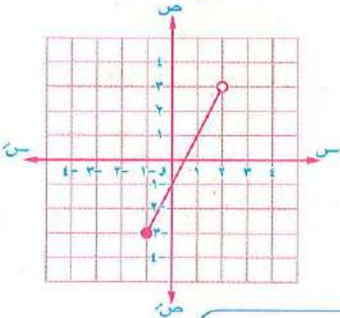
∴ الدالة يمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٠) وميله = $\frac{-1}{3}$

• المدى = ح



٢ ∵ المجال = [-١ ، ٢[، د (س) = ٢ س - ١

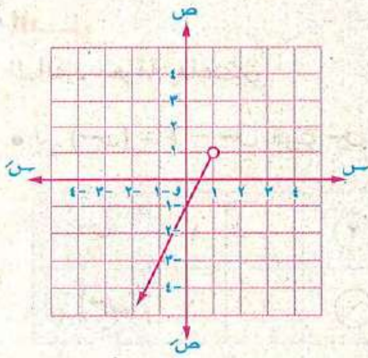
س	-١	٠	②
د (س)	-٣	-١	③



لاحظ أن

النقطة (٢ ، ٣) ∉ بيان الدالة لذلك استبعدنا هذه النقطة من الشكل البيانى بوضع دائرة مفرغة عندها.

، من الرسم : المدى = [-٣ ، ٣[



٣ ∵ المجال =]− ∞ ، ١[، د (س) = ٢ س − ١

س	①	٠	−١
د (س)	①	−١	−٣

لاحظ أن

النقطة (١ ، ١) ∌ بيان الدالة لذلك استبعدناها من الشعاع الممثل للدالة بوضع دائرة مفرغة عندها.

من الرسم : المدى =]− ∞ ، ١[

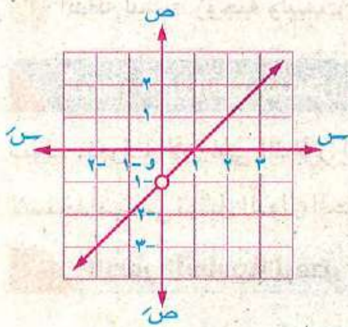
مثال ٢

مثل بيانيًا الدالة د : ح − {٠} ⟵ ح ، د (س) = $\frac{س^٢ - س}{س}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

الحـل

∵ مجال الدالة د = ح − {٠}

، د (س) = $\frac{س^٢ - س}{س} = \frac{س (س - ١)}{س}$ = س − ١ يمثلها خط مستقيم



س	−١	⓪	١
د (س)	−٢	⊖①	٠

، المدى = ح − {−١}

لاحظ أنه

تم وضع دائرة مفرغة عند النقطة التى إحداثيها السينى س = ٠ لأنها لا تنتمى للمجال.

تمثيل الدالة مجزأة المجال (ذات المقاطع)

مثال ٣

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢ - س &، -١ \leq س < ٢ \\ س - ٢ &، ٢ \leq س < ٥ \end{cases}$ ومن الرسم :

١ عين مجال ومدى الدالة د

٢ ابحث اطراد الدالة د

٣ اذكر نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك مع بيان السبب.

الحــل

الدالة د معرفة بقاعدتين

• $د_1$ (س) = ٢ − س حيث س ∈ [−١ ، ٢[

س	−١	٠	②
$د_1$ (س)	٣	٢	⓪

• $د_2$ (س) = س − ٢ حيث س ∈ [٢ ، ٥[

س	٢	٣	⑤
$د_2$ (س)	٠	١	③

لاحـظ أن

٢ ∉ [−١ ، ٢[بينما ٢ ∈ [٢ ، ٥[لذلك ٢ ∈ مجال د
وبالتالى (٢ ، ٠) ∈ بيان د أى لا نضع دائرة مفرغة عند
النقطة (٢ ، ٠) فى الرسم

١ مجال د = [−١ ، ٢[∪ [٢ ، ٥[= [−١ ، ٥[، مدى د = [٠ ، ٣]

٢ الدالة د تناقصية فى الفترة]−١ ، ٢[وتزايدية فى الفترة]٢ ، ٥[

٣ الدالة ليست زوجية وليست فردية لأنها غير متماثلة حول محور الصادات وغير متماثلة حول نقطة الأصل.

الصور الأساسية لبعض الدوال

سوف نتعرف الآن على التمثيل البيانى للصور البسيطة (الصور الأساسية) لبعض الدوال الحقيقية وذلك تمهيدًا لاستخدامها فى تمثيل الدوال الحقيقية بصورها المختلفة فى الدرس القادم.

١ الصور الأساسية لبعض دوال كثيرات الحدود

	الدالــــة الثابتــــة	دالـة الدرجة الأولى (الخطية)
الصورة الأساسية	د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ حيث أ ∈ ح	د : ح ⟵ ح ، د (س) = س
التمثيل البيانى	«مستقيم يوازى محور السينات ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، أ)»	«مستقيم يمر بنقطة الأصل ، وميله = ١»

المدى والاطراد والخواص	* مدى الدالة = {أ} * الدالة ثابتة على مجالها. * الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات).	* مدى الدالة = ح * الدالة تزايدية على مجالها ح * الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل).

	دالة الدرجة الثانية (التربيعية)	دالة الدرجة الثالثة (التكعيبية)
الصورة الأساسية	د : ح ⟵ ح ، د (س) = $س^{٢}$	د : ح ⟵ ح ، د (س) = $س^{٣}$
التمثيل البيانى		
المدى والاطراد والخواص	* مدى الدالة = [٠ ، ∞[* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ∞[* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات).	* مدى الدالة = ح * الدالة تزايدية على مجالها ح * الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل).

٢ الصورة الأساسية لدالة المقياس (دالة القيمة المطلقة)

• الصورة الأساسية :

د : ح ⟵ ح ، د (س) = |س|

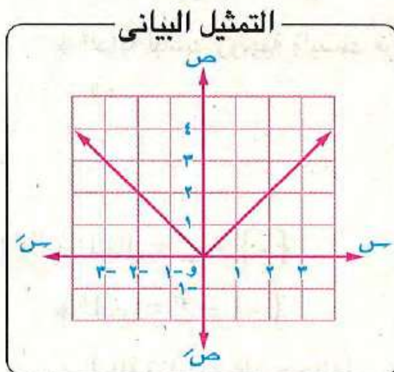
ويعاد تعريفها كالتالى : د (س) = { س ، س ≥ ٠ ؛ −س ، س < ٠

ويمثلها بيانيًا شعاعان يبدآن من نقطة الأصل (٠ ، ٠)

وميل المستقيم الحامل لأحد الشعاعين = ١

وميل المستقيم الحامل للآخر = −١

التمثيل البيانى



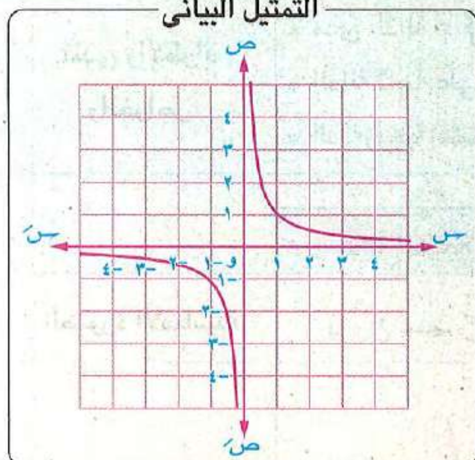
• المدى والاطراد والخواص :

* مدى الدالة = [٠ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[

* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات).

٣ الصورة الأساسية للدالة الكسرية



• الصورة الأساسية :

د : ح − {٠} ⟵ ح ، د (س) = $\frac{1}{س}$

نظرًا لاقتراب كل من جزئى المنحنى من المحورين دون أن يقطعهما يقال إن المحورين $\overleftrightarrow{س س َ}$ ، $\overleftrightarrow{ص ص َ}$ هما خطا التقارب للمنحنى.

• المدى والاطراد والخواص :

* مدى الدالة = ح − {٠}

* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[وتناقصية أيضًا فى]٠ ، ∞[

* الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل).

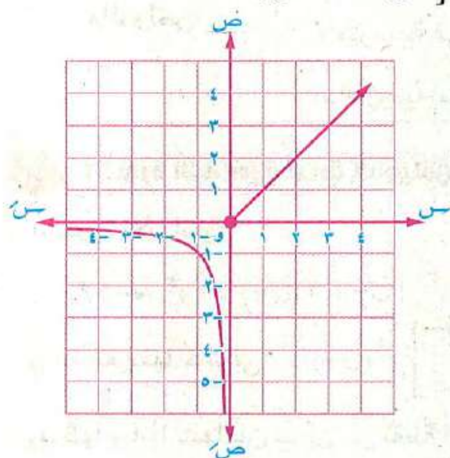
مثال ٤

مثل بيانيًا كلًا من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (س) = $\begin{cases} \frac{1}{س} & ، س < ٠ \\ |س| & ، س \geq ٠ \end{cases}$

٢ د (س) = $\begin{cases} س^3 & ، س < ٠ \\ س & ، س > ٠ \end{cases}$

الحـــل



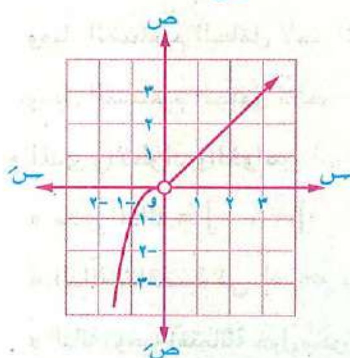
١ * المجال = ح

* المدى = ح

* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[

وتزايدية فى]٠ ، ∞[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.



٢ * المجال = ح − {٠}

* المدى = ح − {٠}

* الدالة تزايدية على مجالها.

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

تمـارين 3 على التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = ٥ فإن مجال الدالة د هو ....

(أ) ح (ب) ح⁺ (جـ) {٥} (د) ح − {٥}

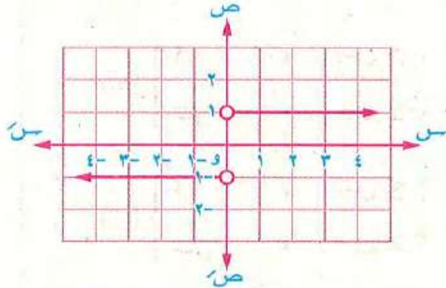
(٢) إذا كانت : د (س) = ٧ فإن مدى الدالة د هو ....

(أ) ح (ب) ح⁺ (جـ) {٧} (د) ح − {٧}

(٣) مدى الدالة د : د (س) = { ٠ ، س ≤ ٠ ؛ ١ ، س > ٠ } هو ....

(أ) {١} (ب) {٠} (جـ) ح (د) {٠ ، ١}

(٤) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



(أ) {١} (ب) {١ ، −١}

(جـ) {−١} (د) ح

(٥) مدى الدالة د : د (س) = { س ، س > ٠ ؛ −٢ ، س ≤ ٠ } هو ....

(أ) ح⁺ (ب) ح⁺ − {−٢} (جـ) ح⁺ ∪ {−٢} (د) ح

(٦) الدالة د حيث د (س) = { ٢ ، س > ٠ ؛ −٢ ، س < ٠ } متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (−٢ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٢ ، −٢)

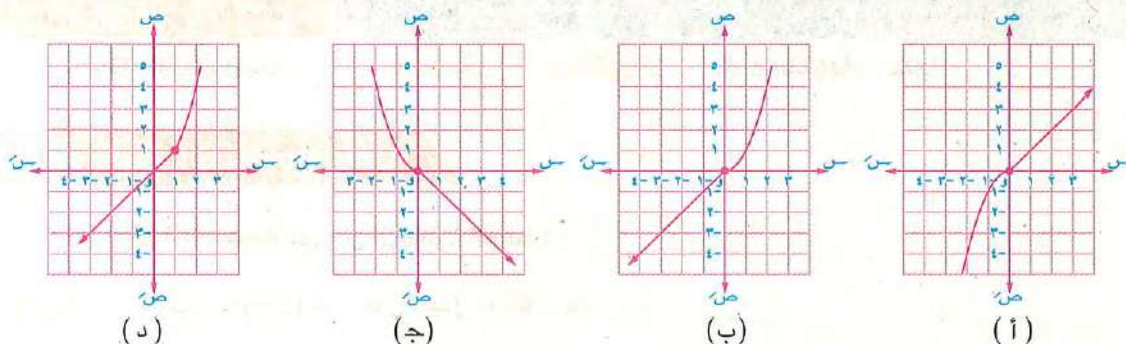
(٧) محور تماثل الدالة د : د (س) = س² هو المستقيم ....

(أ) ص = صفر (ب) ص = س (جـ) ص = − س (د) س = صفر

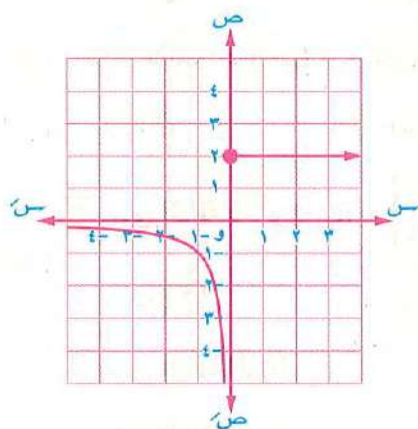
(٨) الدالة د : د (س) = { س³ ، س < ٠ ؛ $\frac{1}{س}$ ، س > ٠ } تكون تزايدية فى ....

(أ) ح (ب) ح⁻ (جـ) ح⁺ (د) ح − {٠}

(٩) منحنى الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^2 & ، س > 0 \\ س & ، س \leq 0 \end{cases}$ هو ....



(١٠) فى الشكل المقابل :



منحنى الدالة د المعرفة بالقاعدة د (س) = ...

(أ) $\begin{cases} 2 & ، س > 0 \\ \frac{1}{س} & ، س < 0 \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} 2 & ، س \geq 0 \\ \frac{1}{س} & ، س < 0 \end{cases}$

(جـ) $\begin{cases} 2 & ، س < 0 \\ \frac{1}{س} & ، س \geq 0 \end{cases}$

(د) $\begin{cases} 2 & ، س \geq 2 \\ \frac{1}{س} & ، س < 2 \end{cases}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ مثل كلاً من الدوال الآتية بيانيًا ، وعين مداها :

(١) د : {-٣ ، -١ ، ١ ، ٢} ⟵ [-٣ ، ٧] ، د (س) = ٢ س + ٣

(٢) د :]١ ، ٥[⟵ ع ، د (س) = س + ١

(٣) ر :]-∞ ، -١[⟵ ع ، ر (س) = ١ - س

(٤) د : د (س) = -٣ س + ٧ لكل س ∈ ع

---

٢ إذا كانت د : [-٢ ، ٦] ⟵ ع ، د (س) = $\begin{cases} ٤ - س & \text{عندما } -٢ \leq س < ١ \\ س & \text{عندما } ١ \leq س \leq ٦ \end{cases}$

ارسم الشكل البيانى للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

٣ مثل بيانيًا كلًا من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث تماثلها :

(١) $د(س) = \frac{٣س^{٢} - ٣}{س^{٢} - ١}$ (٢) $د(س) = \frac{٤ - س^{٢}}{س + ٢}$

---

٤ مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث تماثلها :

(١) $د :]-\infty ، ٣[\longrightarrow ح$ حيث $د(س) = ٢$

(٢) $د(س) = \begin{cases} ٢ & ، س \le ٠ \\ -٣ & ، س > ٠ \end{cases}$

(٣) $د(س) = \begin{cases} ٢ & ، س > ١ \\ س - ٢ & ، س \le ١ \end{cases}$

(٤) $د(س) = \begin{cases} س + ٢ & ، س \in [-٢ ، ١] \\ -س + ٤ & ، س \in]١ ، ٤[\end{cases}$

(٥) 📖 $د(س) = \begin{cases} ٤ & ، س < -٢ \\ س^{٢} & ، س \ge -٢ \end{cases}$

(٦) 📖 $د(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س < ٠ \\ س & ، س \ge ٠ \end{cases}$

(٧) 📖 $د(س) = \begin{cases} س^{٣} & ، س < ١ \\ ١ & ، س > ١ \end{cases}$

(٨) $د(س) = \begin{cases} س^{٣} & ، س < ١ \\ ٢ - س & ، س \ge ١ \end{cases}$

(٩) 📖 $د(س) = \begin{cases} |س| & ، س \le ٠ \\ \frac{١}{س} & ، س > ٠ \end{cases}$

(١٠) 📖 $د(س) = \begin{cases} |س| & ، س \le ٠ \\ س^{٢} & ، س > ٠ \end{cases}$

(١١) $د(س) = \begin{cases} ٣ & ، س \le -٣ \\ |س| & ، -٣ < س < ٣ \\ ٣ & ، س \ge ٣ \end{cases}$

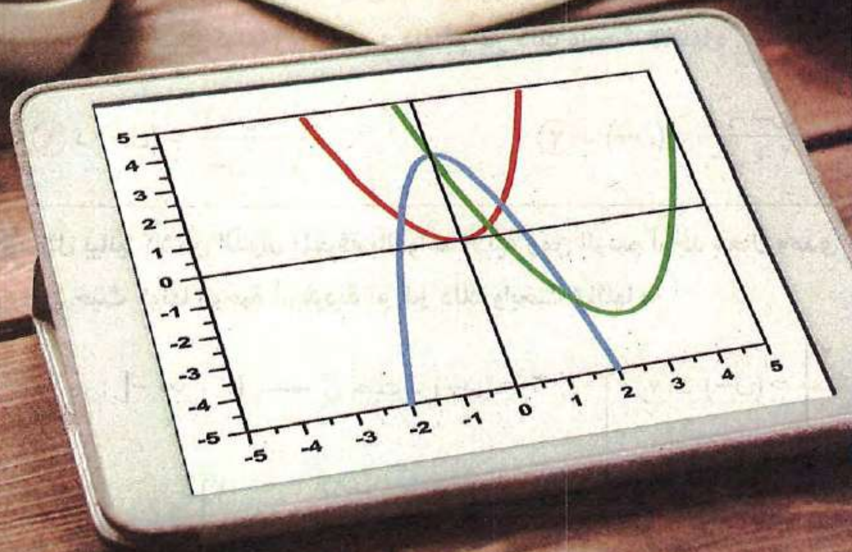
(١٢) $د(س) = \begin{cases} ٢ & ، -٣ \le س \le -١ \\ ٠ & ، -١ < س < ١ \\ ٢ & ، ١ \le س \le ٣ \end{cases}$

(١٣) $د(س) = \begin{cases} -س - ١ & ، -٤ \le س < -٢ \\ ١ & ، -٢ \le س \le ٢ \\ س - ١ & ، ٢ < س \le ٤ \end{cases}$

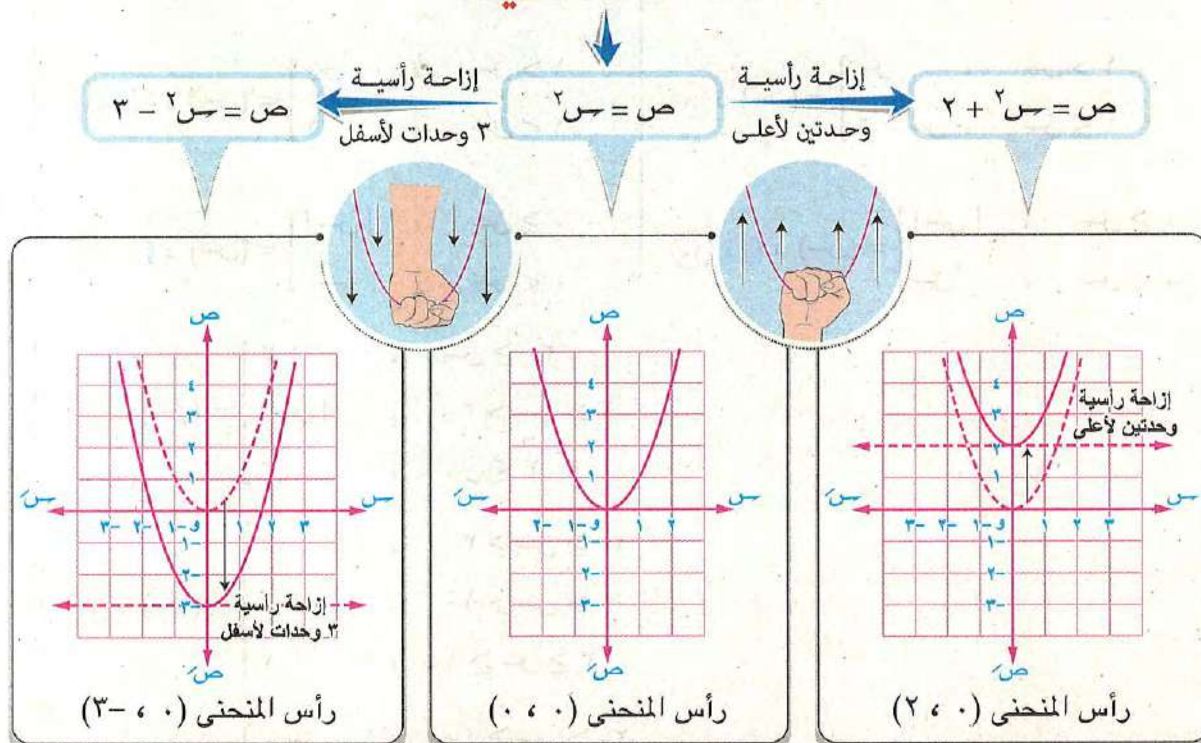
الدرس

4

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية



أولًا الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

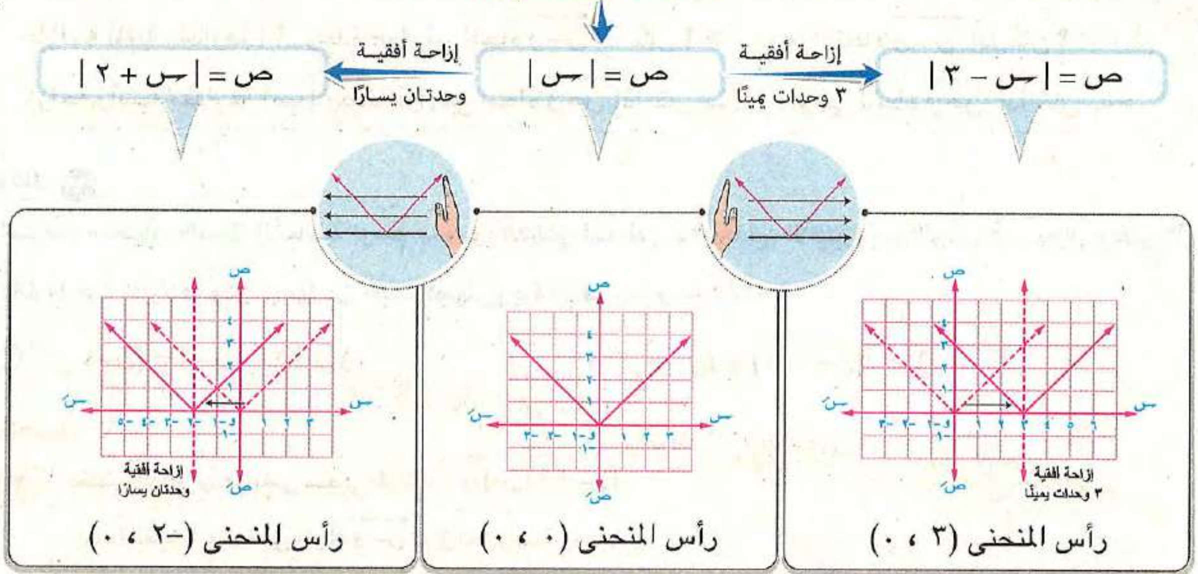


بصفة عامة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س) + أ ، أ ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د (س)

بإزاحة رأسية قدرها | أ | وحدة طول فى اتجاه : وص (أى لأعلى) عندما أ > ٠ ، وص َ (أى لأسفل) عندما أ < ٠

ثانيًا الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة

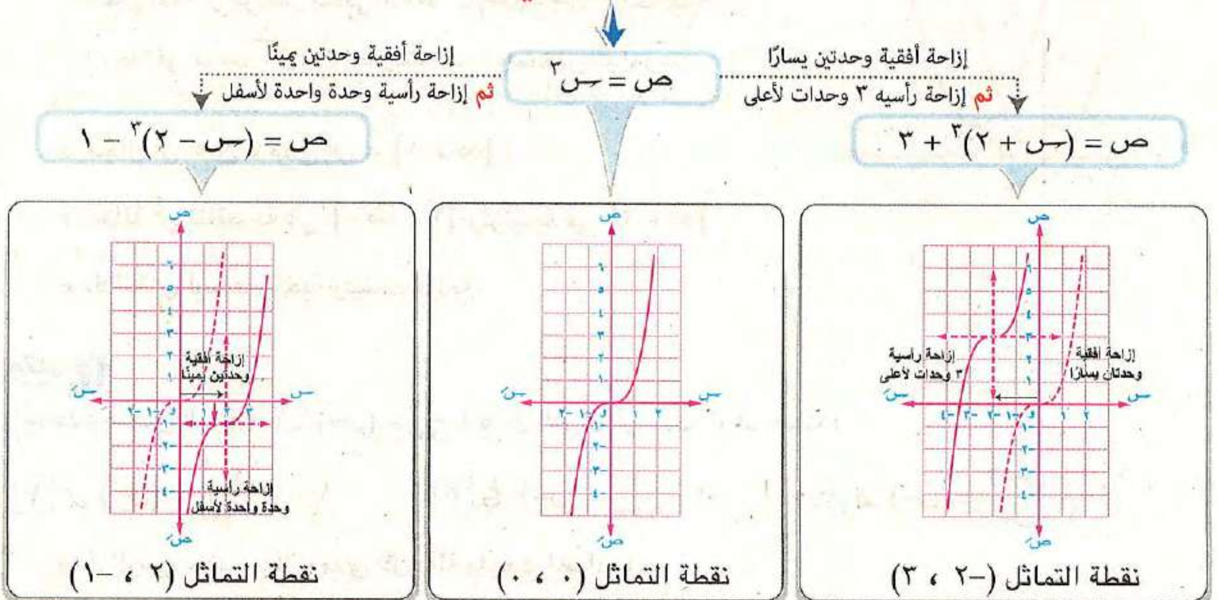


بصفة عامة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س + ؏) ، ؏ ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د (س)

بإزاحة أفقية قدرها | ؏ | وحدة طول فى اتجاه :
- $\overleftarrow{\text{و س}}$ (يمينًا) عندما ؏ < ٠
- $\overleftarrow{\text{و س}'}$ (يسارًا) عندما ؏ > ٠

ثالثًا الإزاحة الأفقية متبوعة بالإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة



بصفة عامة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س + أ) + ب حيث أ ، ب ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د(س) بإزاحة أفقية مقدارها |أ| وحدة طول فى اتجاه و س← إذا كان أ < ٠ أو فى اتجاه و س′← إذا كان أ > ٠ ثم إزاحة رأسية مقدارها |ب| وحدة طول فى اتجاه و ص← إذا كان ب > ٠ أو فى اتجاه و ص′← إذا كان ب < ٠

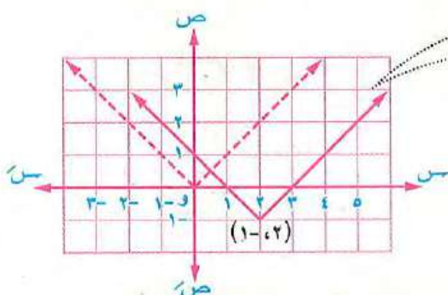
مثال ١

استخدم منحنيات الدوال الأساسية لرسم منحنيى الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ومن الرسم عين مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك :

١ ر (س) = |س − ٢| − ١ ٢ ر (س) = (٢ − س)^{٢} + ١

الحل

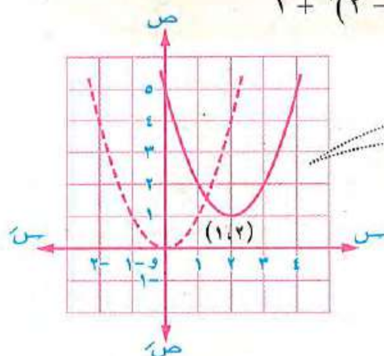
١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = |س| بإزاحة أفقية ٢ وحدة فى اتجاه و س← ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة فى اتجاه و ص′←



* مجال ر = ح ، مدى ر = [−١ ، ∞[
* الدالة ر تناقصية فى]− ∞ ، ٢[وتزايدية فى]٢ ، ∞[
* الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.

٢ ∵ (٢ − س)^{٢} = (س − ٢)^{٢} ∴ ر (س) = (س − ٢)^{٢} + ١

منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} بإزاحة أفقية ٢ وحدة فى اتجاه و س← ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة فى اتجاه و ص←



* مجال ر = ح ، مدى ر = [١ ، ∞[
* الدالة ر تناقصية فى]− ∞ ، ٢[وتزايدية فى]٢ ، ∞[
* الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.

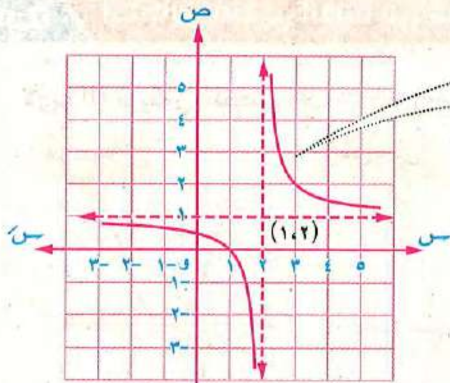
مثال ٢

استخدم منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ لتمثيل الدوال ر ، ع ، هـ حيث :

١ ر (س) = $\frac{١}{س − ٢}$ + ١ ٢ ع (س) = $\frac{١}{س}$ + ٣ ٣ هـ (س) = $\frac{٢س − ١}{س − ١}$

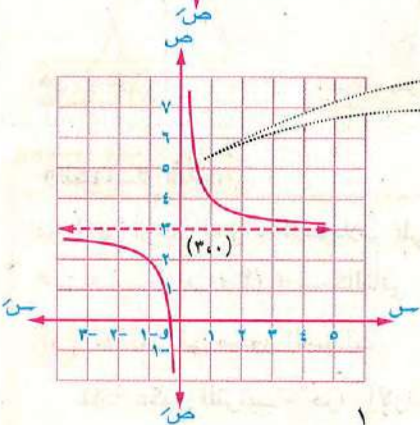
ومن الرسم حدد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها.

الحـــل



١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{وس}}$ ثم إزاحة رأسية قدرها وحدة واحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{وص}}$

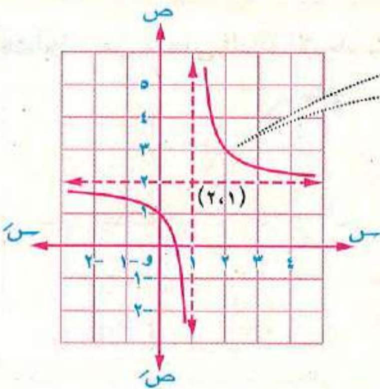
* مجال ر = ح - {٢}   * مدى ر = ح - {١}
* الدالة تناقصية فى الفترة]- ∞ ، ٢[
وتناقصية أيضًا فى الفترة]٢ ، ∞[



٢ منحنى الدالة ع هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة رأسية مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه $\overrightarrow{\text{وص}}$

* مجال ع = ح - {٠}
* مدى ع = ح - {٣}
* الدالة تناقصية فى الفترة]- ∞ ، ٠[
وتناقصية أيضًا فى الفترة]٠ ، ∞[

٣ $$\text{هـ (س)} = \frac{\text{٢س} - ١}{\text{س} - ١} = \frac{\text{٢س} - ٢ + ١}{\text{س} - ١} = \frac{٢\,(\text{س} - ١) + ١}{(\text{س} - ١)} = ٢ + \frac{١}{\text{س} - ١}$$



منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{وس}}$ ثم إزاحة رأسية ٢ وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{وص}}$

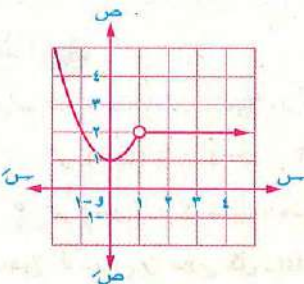
* مجال هـ = ح - {١}   * مدى هـ = ح - {٢}
* الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ١[وتناقصية أيضًا فى]١ ، ∞[

مثال ٣

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ + ١ & ، \text{س} < ١ \\ ٢ & ، \text{س} > ١ \end{cases}$ **ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة**

واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

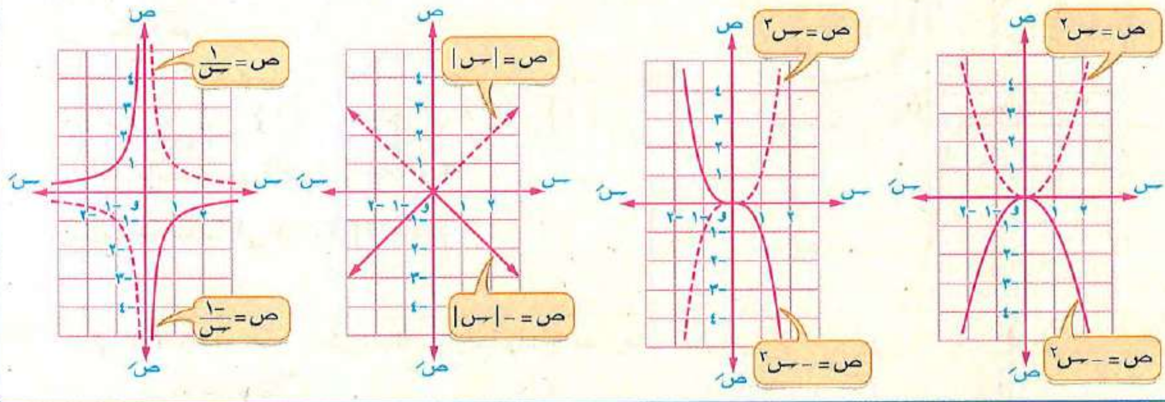
الحـــل



* المجال = ح - {١}   * المدى = [١ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ١[، ثابتة فى]١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

رابعًا انعكاس منحنى الدالة فى محور السينات

لأى دالة د يكون المنحنى ص = − د (س) هو نفس المنحنى ص = د (س) بالانعكاس فى محور السينات.



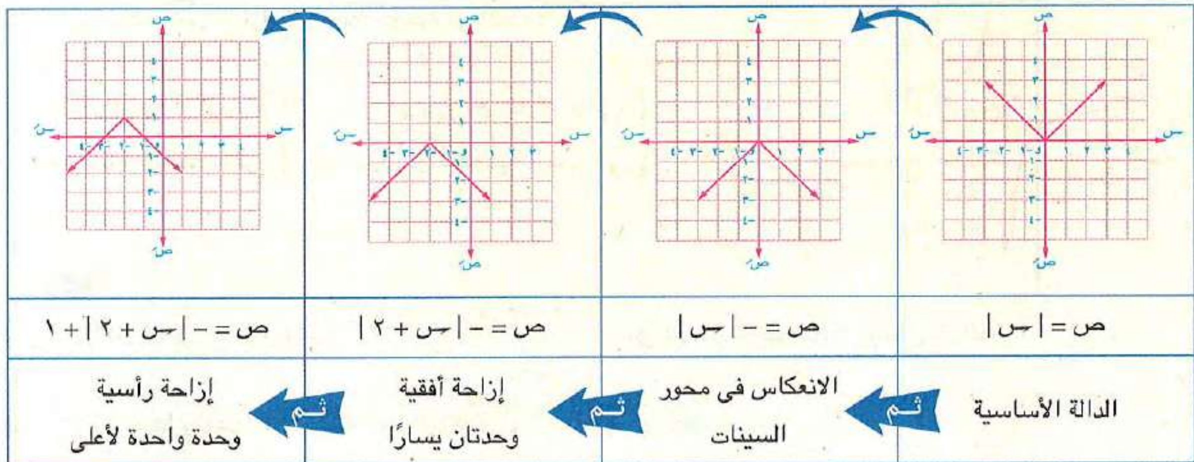
ملاحظة هامة

من المهم ترتيب إجراء التحويلات على المنحنى ص = د (س) للحصول منه على المنحنى ص = − د (س + أ) + ب كالتالى :

١ انعكاس فى محور السينات. ٢ إزاحة أفقية. ٣ إزاحة رأسية.

فإذا عكس الترتيب بإجراء الإزاحة الرأسية قبل إجراء الانعكاس فى محور السينات فإننا نحصل على منحنى آخر غير المنحنى المطلوب.

فمثلًا : من منحنى الدالة الأساسية ص = |س| نحصل على منحنى الدالة ص = − |س + ٢| + ١ **كالتالى :**



ص = |س|	ص = − |س|	ص = − |س + ٢|	ص = − |س + ٢| + ١
الدالة الأساسية	ثم الانعكاس فى محور السينات	ثم إزاحة أفقية وحدتان يسارًا	ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة لأعلى

مثال ٤

باستخدام منحنيات الدوال الأساسية ارسم منحنيات الدوال ر ، ع ، هـ حيث :

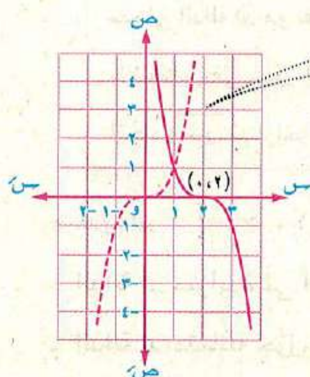
١ ر (س) = − (س − ٢)٣   ٢ ع (س) = $\frac{١}{٢ - س}$ + ٣

٣ هـ (س) = ٤ س − س٢ − ٣

ومن الرسم بين مدى كل دالة وابحث اطرادها وتماثلها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

الحـــل

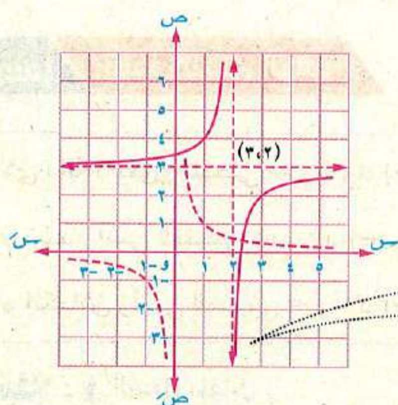
١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = $س^٣$ بالانعكاس في محور السينات ثم إزاحة أفقية ٢ وحدة في اتجاه و$\overleftarrow{س}$



* مدى ر = ح
* الدالة ر تناقصية على مجالها ح
* الدالة ر متماثلة حول النقطة (٢ ، ٠)
* الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.

٢ ع (س) = $\frac{١}{-س + ٢} + ٣ = \frac{١}{-(س - ٢)} + ٣$

$= \frac{-١}{س - ٢} + ٣$



منحنى الدالة ع هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ بالانعكاس في محور السينات متبوعًا بإزاحة أفقية وحدتين في اتجاه و$\overleftarrow{س}$ ثم إزاحة رأسية ٣ وحدات في اتجاه و$\overleftarrow{ص}$

* مدى ع = ح - {٣}
* الدالة ع تزايدية في الفترة]- ∞ ، ٢[

وتزايدية أيضًا في الفترة]٢ ، ∞[

* الدالة ع متماثلة حول النقطة (٢ ، ٣)
* الدالة ع ليست زوجية وليست فردية.

٣ ∵ هـ (س) = - $س^٢$ + ٤ س - ٣ = - ($س^٢$ - ٤ س + ٣)

= - ($س^٢$ - ٤ س + ٤ - ١) = - [(س - ٢)^٢ - ١]

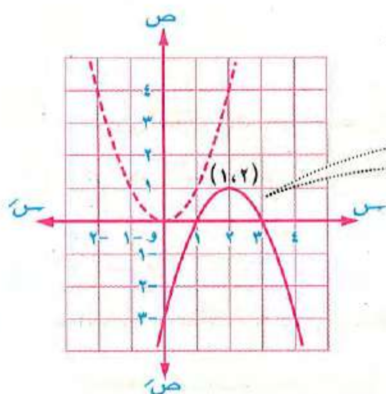
= - (س - ٢)^٢ + ١

لاحظ أن

نقطة رأس المنحنى في الدالة هـ هي (٢ ، ١)

ويمكن الحصول عليها من القانون : رأس المنحنى = $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

وذلك للدوال التي قاعدتها على الصورة : د (س) = أ$س^٢$ + ب س + حـ



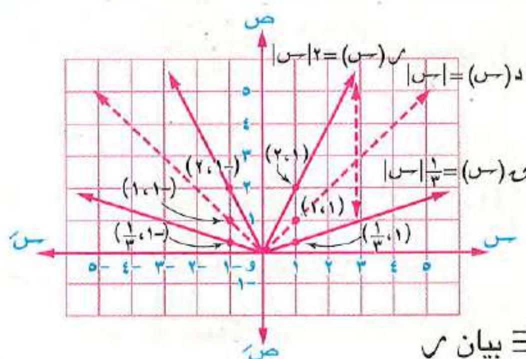
منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} بالانعكاس فى محور السينات متبوعًا بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة فى اتجاه و ص

* مدى هـ =]- ∞ ، ١]
* الدالة هـ متزايدة فى الفترة]- ∞ ، ٢[ومتناقصة فى]٢ ، ∞[
* الدالة هـ متماثلة حول المستقيم س = ٢
* الدالة هـ ليست زوجية وليست فردية.

خامسًا تمدد منحنى الدالة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = أ د (س) حيث أ ∈ ح*

* تمدد رأسى للمنحنى ص = د (س) إذا كان أ > ١
* انكماش رأسى للمنحنى ص = د (س) إذا كان ٠ < أ < ١



فمثلًا : فى الشكل المقابل :

* منحنى الدالة ر : ر (س) = ٢ |س|

هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة

د : د (س) = |س|

لأن : أ > ١

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د يكون (س ، ٢ ص) ∈ بيان ر

* منحنى الدالة ن : ن (س) = $\frac{١}{٣}$ |س| هو انكماش رأسى لمنحنى الدالة د : د (س) = |س|

لأن : ٠ < أ < ١

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د يكون (س ، $\frac{١}{٣}$ ص) ∈ بيان ن

مثال ٥

استخدم منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} فى رسم كل من المنحنيات الآتية :

١ ر (س) = ٢ د (س)

٢ ن (س) = - $\frac{١}{٢}$ د (س)

٣ هـ (س) = ٢ د (س - ١) - ٣

ومن الرسم عين مدى كل منها وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

الحــل

١ ر (س) = ٢ د (س) = ٢ $س^٢$

∴ منحنى الدالة ر هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة د فيه أ = ٢ > ١

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د يكون (س ، ٢ ص) ∈ بيان ر

* مدى ر = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى الفترة]− ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة ر زوجية.

٢ ن (س) = − $\frac{١}{٢}$ د (س) = − $\frac{١}{٢}$ $س^٢$

∴ منحنى الدالة ن هو انكماش رأسى لمنحنى الدالة د فيه

أ = $\frac{١}{٢}$ < ١ ثم انعكاس فى محور السينات.

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ د يكون (س ، − $\frac{١}{٢}$ ص) ∈ ن

* مدى ن =]− ∞ ، ٠]
* الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[وتناقصية فى]٠ ، ∞[
* الدالة ن زوجية.

٣ هـ (س) = ٢ د (س − ١) − ٣ = ٢ $(س − ١)^٢$ − ٣

∴ منحنى الدالة هـ هو تمدد رأسى للدالة د فيه

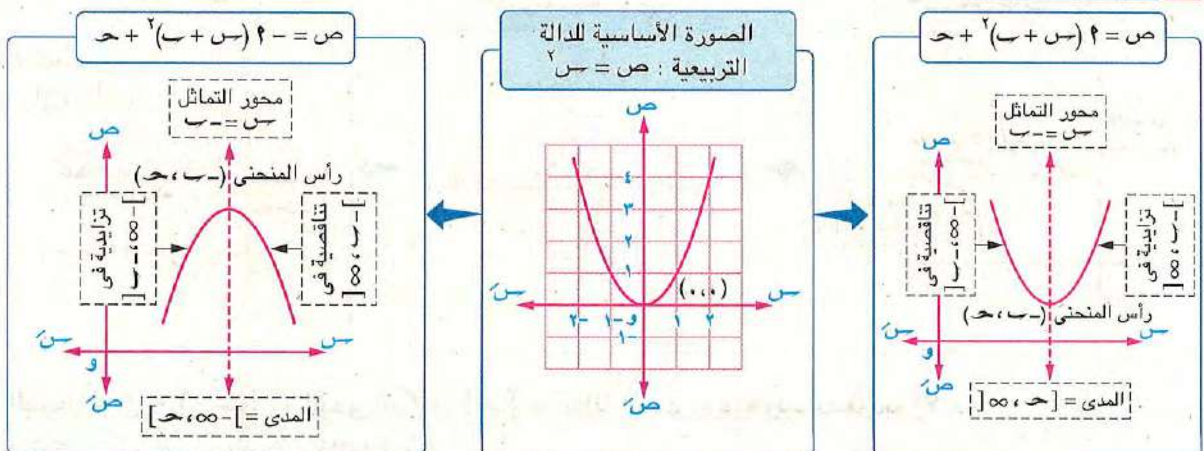
أ = ٢ > ١ ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة

فى اتجاه و$\overleftarrow{س}$ يليها إزاحة رأسية ٣ وحدات

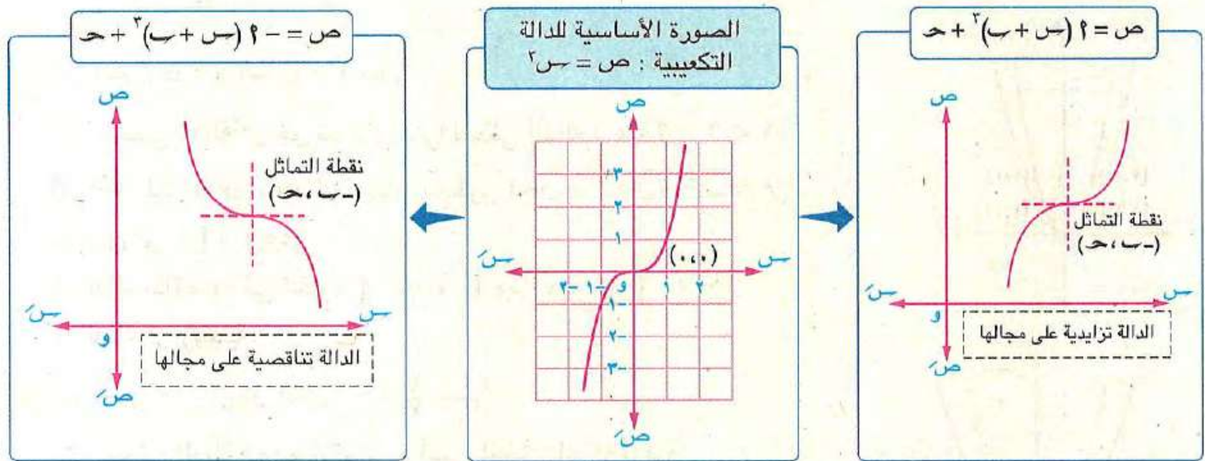
فى اتجاه و$\overleftarrow{ص}$

* مدى هـ = [−٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ١[وتزايدية فى]١ ، ∞[* الدالة هـ ليست زوجية وليست فردية.

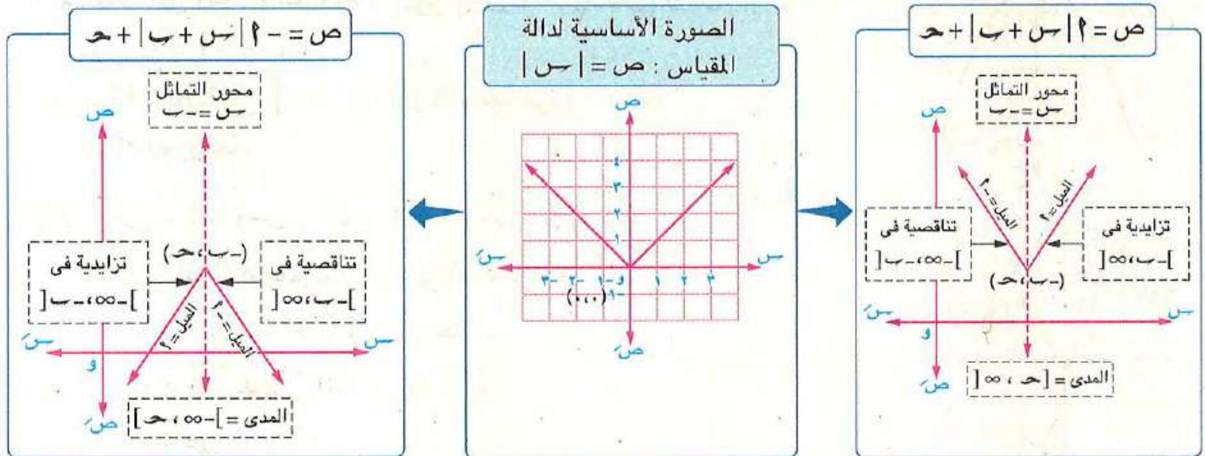
بصفة عامة



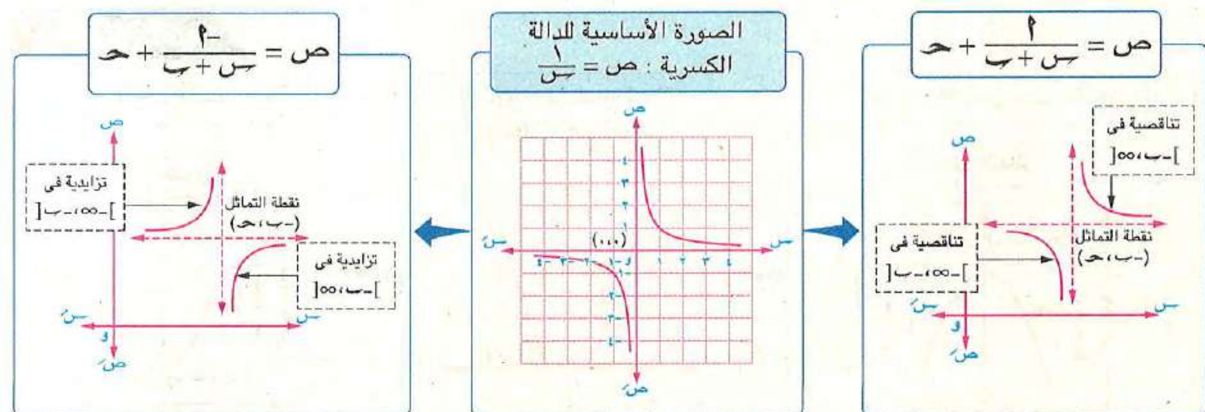
المجال = ح ، الدالة ليست زوجية وليست فردية إلا إذا كان : ب = ٠ فإنها زوجية



المجال = ح ، المدى = ح ، الدالة ليست زوجية وليست فردية إلا إذا كان : ب = ٠ ، حـ = ٠ فإنها فردية



المجال = ح ، الدالة ليست زوجية وليست فردية إلا إذا كان : ب = ٠ فإن الدالة زوجية



المجال = ح - {-ب} ، المدى = ح - {حـ} ، الدالة ليست زوجية وليست فردية إلا إذا كان : ب = ٠ ، حـ = ٠ فإنها فردية



اختبر نفسك

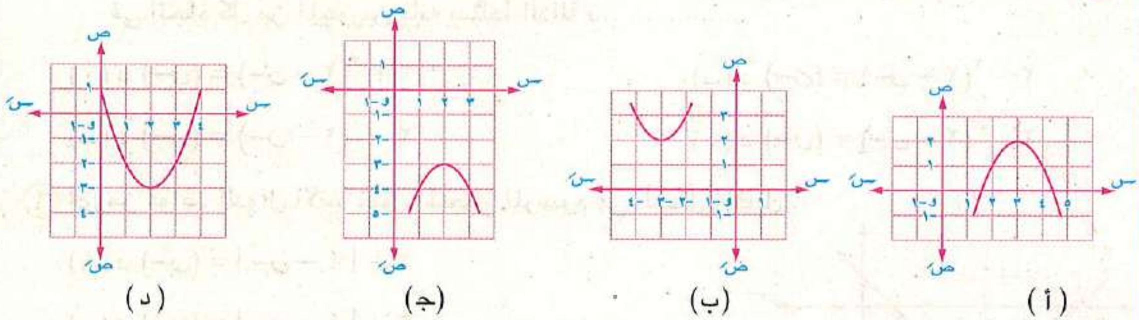
تمارين 4 على التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية

من أسئلة الكتاب المدرسى ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

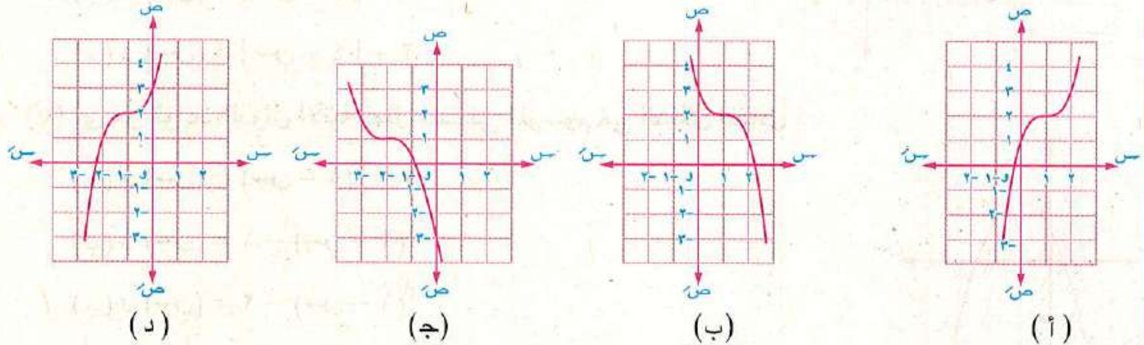
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = − (س − ٣)^{٢} + ٢ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



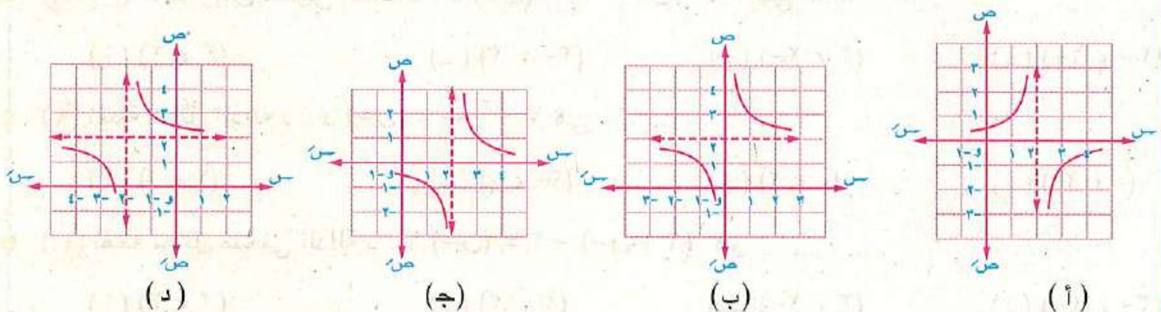
(أ) (ب) (جـ) (د)

(٢) إذا كانت : د (س) = ٢ − (س − ١)^{٣} فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



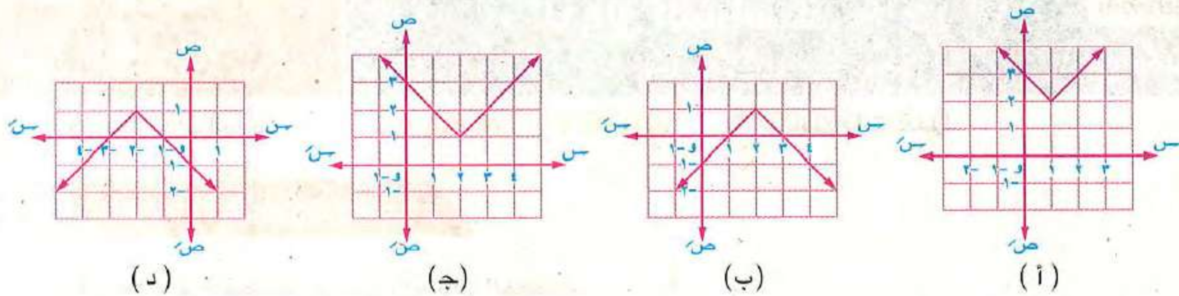
(أ) (ب) (جـ) (د)

(٣) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س − ٢}$ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٤) إذا كانت د : د (س) = ١ - | س - ٢ | فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

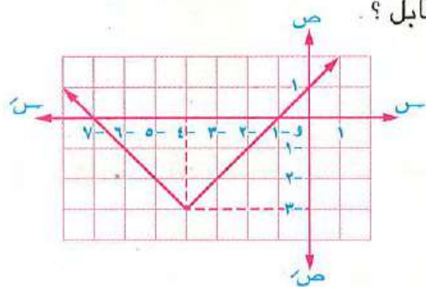
(٥) إذا أُزيح منحنى الدالة ر : ر (س) = $س^٢$ بمقدار وحدتين موجبتين

فى اتجاه كل من المحورين فإنه يمثلها الدالة د : ....

(أ) د (س) = $(س + ٢)^٢ + ٢$ (ب) د (س) = $(س + ٢)^٢ - ٢$

(جـ) د (س) = $(س - ٢)^٢ - ٢$ (د) د (س) = $(س - ٢)^٢ + ٢$

(٦) أى من قواعد الدوال الآتية تمثل المنحنى المرسوم فى الشكل المقابل ؟



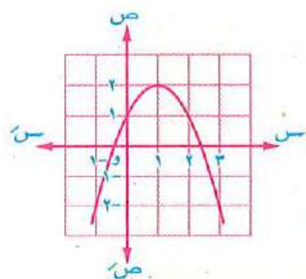
(أ) د (س) = | س - ٤ | - ٣

(ب) د (س) = | س - ٤ | + ٣

(جـ) د (س) = | س + ٤ | - ٣

(د) د (س) = | س + ٤ | + ٣

(٧) أى من قواعد الدوال الآتية تمثل المنحنى المرسوم فى الشكل المقابل ؟



(أ) د (س) = $(س - ١)^٢ + ٢$

(ب) د (س) = ١ - $(س - ٢)^٢$

(جـ) د (س) = ٢ - $(س - ١)^٢$

(د) د (س) = $(س + ١)^٢ - ٢$

(٨) نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = $(٢ - س)^٢ + ٣$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، -٣) (جـ) (-٢ ، ٣) (د) (-٢ ، -٣)

(٩) نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $س^٣ - ٢$ هى ....

(أ) (٠ ، ٢) (ب) (٠ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (-٢ ، ٠)

(١٠) نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = ٣ - $(س + ٢)^٣$ هو ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (٢ ، ٣) (جـ) (-٢ ، ٣) (د) (-٢ ، -٣)

(١١) نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٤ هى ....

(أ) (٣ ، -٤) (ب) (-٣ ، -٤) (جـ) (٣ ، ٤) (د) (-٣ ، ٤)

(١٢) نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س}$ هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (١ ، −١)

(١٣) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ فإن نقطة التماثل للدالة ر : ر (س) = د (س + ١) هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (−١ ، ٠) (د) (−١ ، ١)

(١٤) نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = |س + ٣| − ٢ هى ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (−٣ ، −٢) (جـ) (−٣ ، ٢) (د) (٣ ، −٢)

(١٥) منحنى الدالة د : د (س) = |س − ٢| متماثل حول المستقيم ....

(أ) س = ٢ (ب) س = −٢ (جـ) ص = ٢ (د) ص = −٢

(١٦) محور تماثل الدالة د : د (س) = $س^{٢}$ − ١ هو المستقيم ....

(أ) س = ١ (ب) س = ٠ (جـ) ص = ١ (د) ص = ٠

(١٧) إذا كانت د (س) = $\frac{١}{|س|}$ فإن معادلة محور تماثل منحنى الدالة د هو ....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = −س

(١٨) الدالة د : د (س) = $(س − ١)^{٢}$ + ٢ تكون متزايدة فى الفترة ....

(أ) ح (ب)]١ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ١[(د)]−١ ، ١[

(١٩) الدالة د حيث د (س) = $\frac{٢س − ١}{س − ١}$ تناقصية فى الفترة ....

(أ)]−∞ ، ١[(ب)]−∞ ، ١[،]١ ، ∞[

(جـ)]١ ، ∞[(د)]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

(٢٠) مدى الدالة د حيث د (س) = $(س − ٣)^{٢}$ + ٤ هو ....

(أ)]−∞ ، ٣] (ب) [−٣ ، ٤] (جـ) [٤ ، ∞[(د)]−∞ ، ٤]

(٢١) مدى الدالة د : د (س) = ٣ − $(٢ − س)^{٢}$ هو ....

(أ)]−∞ ، ٢] (ب) [٢ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٣] (د) [٣ ، ∞[

(٢٢) مدى الدالة د : د (س) = ٢ − $\frac{٣}{س − ١}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {١} (جـ) ح − {٢} (د) ح − {٣}

(٢٣) مدى الدالة د : د (س) = |س − ٢| هو ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب) [٢ ، ∞[(جـ) [٠ ، ∞[(د)]٢ ، ∞[

(٢٤) مدى الدالة د : د (س) = ٢ − |٣ − ٢س| هو ....

(أ)]−∞ ، ٢] (ب) [−٢ ، ∞[(جـ)]$\frac{٣}{٢}$ ، ∞[(د)]−∞ ، −٢]

(٢٥) مدى الدالة د : د (س) = $\frac{|س|}{س}$ هو ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]–∞ ، ٠[(ج) ح – {٠} (د) {١ ، –١}

(٢٦) منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٤ لا يقطع الخط المستقيم الذى معادلته ....

(أ) س = – ٣ (ب) س = ٣ (ج) ص = –٤ (د) ص = ٣

(٢٧) إذا كان المنحنى ص = د (س) يمثل دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٣ وحدات رأسيًا لأعلى هو المنحنى ر (س) = ...

(أ) د (س – ٣) (ب) د (س + ٣) (ج) د (س) + ٣ (د) د (س) – ٣

(٢٨) إذا كان المنحنى ص = د (س) يمثل دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٥ وحدات رأسيا لأسفل هو المنحنى ر (س) = ...

(أ) د (س – ٥) (ب) د (س + ٥) (ج) د (س) + ٥ (د) د (س) – ٥

(٢٩) 📖 منحنى ر (س) = $س^{٢}$ + ٤ هو نفس منحنى د (س) = $س^{٢}$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overleftarrow{و س^{\prime}}$ (ج) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overleftarrow{و ص^{\prime}}$

(٣٠) منحنى الدالة ر حيث : ر (س) = |س| – ٢ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = |س| بإزاحة مقدارها وحدتان فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overleftarrow{و س^{\prime}}$ (ج) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overleftarrow{و ص^{\prime}}$

(٣١) إذا كانت : د دالة حقيقية مجالها [–٣ ، ٤] فإن مجال الدالة ر : ر (س) = د (س) + ٢ هو ....

(أ) [–٣ ، ٤] (ب) [–١ ، ٦] (ج) [–٥ ، ٢] (د) ح

(٣٢) 📖 منحنى ر (س) = |س + ٣| هو نفس منحنى د (س) = |س| بإزاحة مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overleftarrow{و س^{\prime}}$ (ج) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overleftarrow{و ص^{\prime}}$

(٣٣) إذا كانت : ص = د (س) دالة حقيقية فإن صورتها بإزاحة قدرها ٤ وحدات جهة اليسار هى ر (س) = ...

(أ) د (س – ٤) (ب) د (س + ٤) (ج) د (س) + ٤ (د) د (س) – ٤

(٣٤) إذا كانت : د دالة حقيقية مجالها [–٢ ، ٣] فإن مجال الدالة ر : ر (س) = د (س – ٢) هو ....

(أ) [–٢ ، ٣] (ب) [–٤ ، ١] (ج) [٠ ، ٥] (د) ح

(٣٥) بفرض أن د (س) = − س^{٢} ينتقل ٣ وحدات لليمين ووحدتان لأسفل وكان المنحنى الناتج هو ر (س) فإن : ر (٤) = ...

(أ) −٣ (ب) −١٦ (جـ) ١٦ (د) −٧

(٣٦) نفرض أن المنحنى : د (س) = − س^{٣} ينتقل ٤ وحدات لليسار ووحدتان لأعلى وكان المنحنى الناتج هو ر (س) فإن : ر (−٢) = ...

(أ) −٢١٨ (ب) ٢١٤ (جـ) ٦ (د) −٦

(٣٧) منحنى الدالة ر : ر (س) = س هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = ... بالانعكاس على محور السينات.

(أ) س (ب) − س (جـ) س + ١ (د) − س + ١

(٣٨) المستقيمان د (س) = أ س + ب وصورته بالانعكاس فى محور السينات يكون حاصل ضرب ميليهما = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) أ (د) − أ^{٢}

(٣٩) المنحنى ر (س) = ١ − |س| هو نفس المنحنى د (س) = |س| بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة مقدارها وحدة واحدة فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{و س}'}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{و ص}}$ (د) $\overleftarrow{\text{و ص}'}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب معادلة محور تماثلها :

(١) ر (س) = س^{٢} − ٣

(٢) ر (س) = − س^{٢} − ٤

(٣) ر (س) = ٢ − س^{٢}

(٤) ر (س) = − (س − ٣)^{٢}

(٥) ر (س) = (س + ١)^{٢}

(٦) ر (س) = (س − ٢)^{٢} + ١

(٧) ر (س) = (س − ١)^{٢} − ٢

(٨) ر (س) = (س + ٢)^{٢} − ٤

(٩) ر (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

(١٠) ر (س) = ٢ − $\frac{١}{٢}$ (س − ٥)^{٢}

(١١) ر (س) = س^{٢} + ٤ س + ٤

(١٢) ر (س) = س^{٢} + ٤ س + ١

(٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٣} لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب نقطة تماثلها :

(١) ر (س) = س^{٣} + ٤

(٢) ر (س) = س^{٣} − ٥

(٣) ر (س) = (س − ٣)^{٣}

(٤) ر (س) = (س + ٢)^{٣}

(٥) ر (س) = − (س − ١)^{٣}

(٦) ر (س) = (٢ − س)^{٣}

⑦ ر (س) = (س − ١)^٣ − ٢
⑧ ر (س) = (س + ١)^٣ − ٢
⑨ ر (س) = ٢ − (س − ١)^٣
⑩ ر (س) = ٢ س^٣ − ١

---

٣ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = | س | لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك و اكتب معادلة محور تماثلها :

① ر (س) = | س | − ٣
② ر (س) = ٢ − | س |
③ ر (س) = | س − ٣ |
④ ر (س) = − | س + ٥ |
⑤ ر (س) = | س + ٢ | − ١
⑥ ر (س) = | س − ٢ | + ٣
⑦ ر (س) = | ٢ − س | + ١
⑧ ر (س) = ٤ − | س − ٢ |
⑨ ر (س) = ٢ | س |
⑩ ر (س) = ٢ | س − ٧ | + ٢
⑪ ر (س) = −٢ | س − ١ |
⑫ ر (س) = ٥ − ٢ | س + ٢ |

---

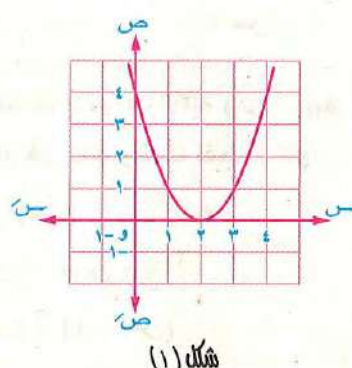
٤ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك واكتب نقطة تماثلها :

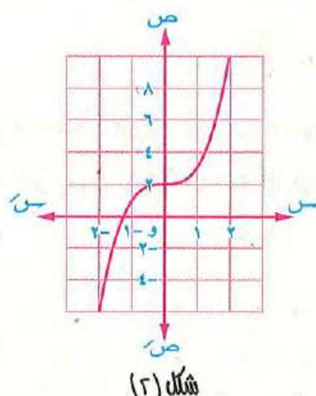
① ر (س) = $\frac{١}{س}$ + ٢
② ر (س) = $\frac{-١}{س}$ + ١
③ ر (س) = $\frac{-١}{س + ٢}$
④ ر (س) = $\frac{١}{س - ٣}$
⑤ ر (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣
⑥ ر (س) = $\frac{١}{س + ٢}$ + ١
⑦ ر (س) = $\frac{١}{٤ - س}$ − ٣
⑧ ر (س) = $\frac{س - ٣}{س - ٢}$
⑨ ر (س) = $\frac{٢ س}{س + ١}$
⑩ ر (س) = $\frac{٢ س - ٣}{س - ٢}$

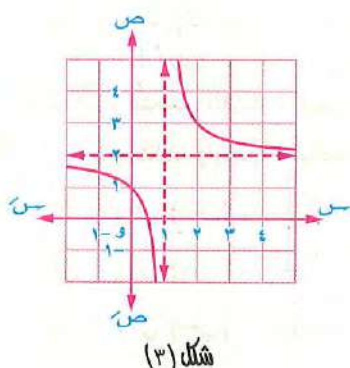
---

٥ أجريت بعض التحويلات الهندسية للدوال د ، ر ، ع حيث د (س) = س^٢
، ر (س) = س^٣ ، ع (س) = $\frac{١}{س}$ فكانت كما فى الأشكال الآتية على الترتيب.

أكمل ما يأتى :


شكل (١)


شكل (٢)


شكل (٣)

(١) قاعدة الدالة فى شكل (١) هى .... | (٢) قاعدة الدالة فى شكل (٢) هى ....

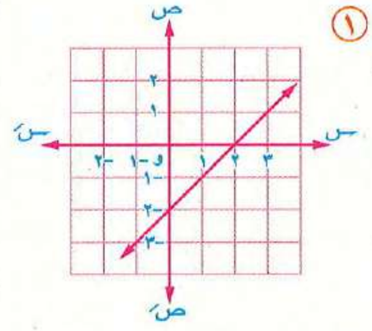
(٣) قاعدة الدالة فى شكل (٣) هى .... | (٤) مدى الدالة فى شكل (١) هو ....

(٥) مدى الدالة هو ح كما فى شكل .... | (٦) نقطة تماثل الدالة فى شكل (٣) هى ....

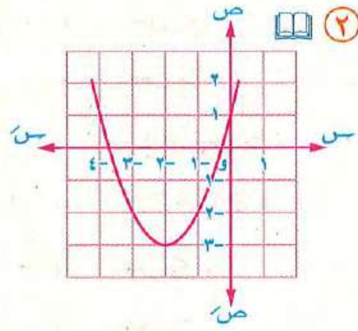
(٧) معادلة محور تماثل الدالة فى شكل (١) هى ....

٦ اكتب قاعدة الدالة د الممثلة بيانيًا بكل من الأشكال الآتية :

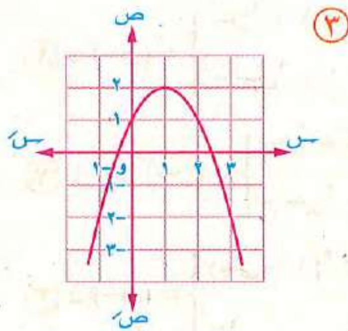
(١)



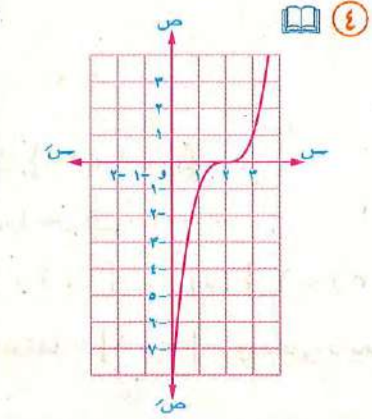
(٢)



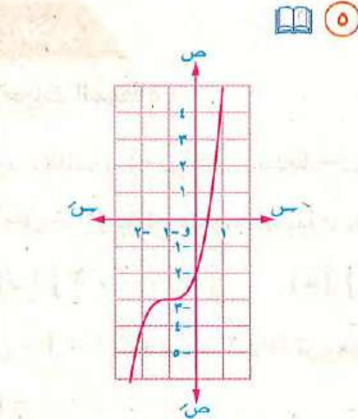
(٣)



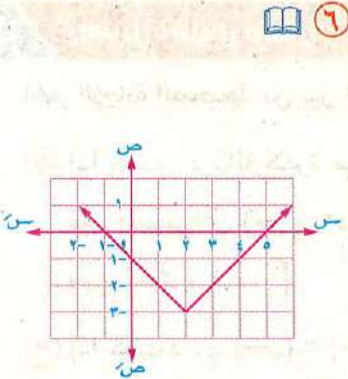
(٤)



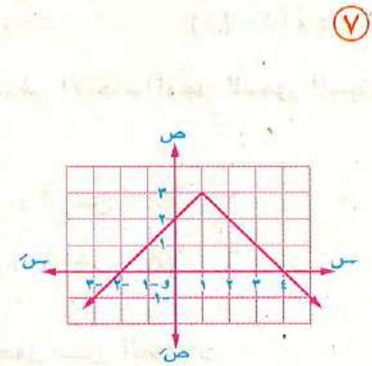
(٥)



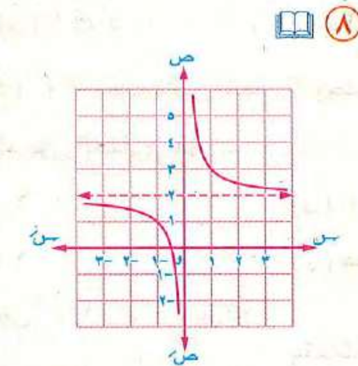
(٦)



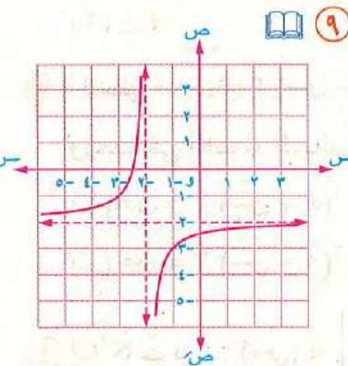
(٧)



(٨)



(٩)



٧ إذا كانت د ، ر ، ق ، ك دوال حقيقية حيث د $(س) = س^2$ ، ر $(س) = س^3$

، ق $(س) = |س|$ ، ك $(س) = \frac{1}{س}$ فمثل كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية موضحًا مجالها ومداها :

① $د_1$ (س) = د (س + ١)
② $د_2$ (س) = د (س) − ١
③ $د_3$ (س) = ٢ − د (س − ١)
④ $ر_1$ (س) = ر (س − ١)
⑤ $ر_2$ (س) = ر (س − ١) + ٢
⑥ $ق_1$ (س) = $\frac{1}{2}$ ق (س) − ٣
⑦ م (س) = م (س − ٢)
⑧ $م_2$ (س) = ٢ − م (س + ١)

٨ ارسم منحنى الدالة د فى كل مما يأتى وعين مداها وابحث اطرادها :

① د (س) = { $س^2$ + ١ ، س > ٠ ؛ −$س^2$ − ١ ، س < ٠ }

② د (س) = { $س^2$ + ١ ، −٤ ≤ س < ٠ ؛ −$س^2$ − ١ ، ٠ ≤ س ≤ ٤ }

③ د (س) = { $(س - ١)^3$ ، س ≥ ٠ ؛ −١ ، س < ٠ }

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د دالة كثيرة حدود وكانت د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ١ ، ٠}
فإن المنحنى ر (س) = د (س − ٣) يقطع محور السينات عندما س ∈ ....
(أ) {−٣ ، ١ ، ٠} (ب) {٣ ، ٠ ، −٢} (جـ) {٠ ، ٣ ، ٤} (د) {−٦ ، ٢ ، ٠}

② إذا كانت د : د (س) = $(س - أ + ١)^2$ + ب − ٢ دالة تربيعية مداها = [١ ، ∞[، ومنحنى د يمر بالنقطة (٣ ، ٢) فإن : أ = ...
(أ) ± ٤ (ب) ٣ أ ، ٥ (جـ) ٣ أ ، −٥ (د) −٣ أ ، ٥

③ المنحنى : ص = ٣ $(س - ٥)^2$ + ٧ تحت تأثير انتقال ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب للمحور السينى ووحدة فى الاتجاه السالب للمحور الصادى هو ....
(أ) ص = ٣ $(س + ٨)^2$ + ٦ (ب) ص = ٣ $(س - ٨)^2$ − ٦
(جـ) ص = ٣ $(س - ٨)^2$ + ٦ (د) ص = ٣ $(س + ٨)^2$ − ٦

④ إذا كانت د : د (س) = { $س^3$ + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ ر (س) ، س < ٠ } متماثلة حول محور الصادات
فإن : ر (س) = ...
(أ) $س^3$ − ٢ (ب) $س^3$ + ٢ (جـ) −$س^3$ + ٢ (د) −$س^3$ − ٢

الدرس

5

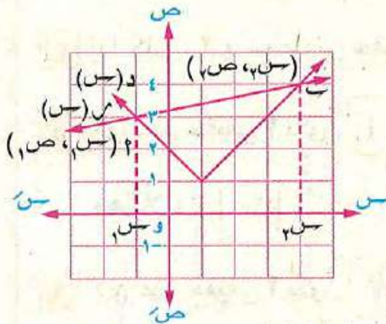
حل معادلات القيمة المطلقة

توجد طريقتان لحل معادلات القيمة المطلقة (المقياس)

١ الطريقة البيانية :

وفيها نستخدم التمثيل البيانى للدوال الحقيقية فى حل المعادلات مع ملاحظة أنه : لأى دالتين د ، ر تكون مجموعة حل المعادلة د (س) = ر (س) هى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيى الدالتين د ، ر

فى الشكل المقابل :



إذا كان منحنيا الدالتين د ، ر يتقاطعان فى النقطتين أ $(س_1 ، ص_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2)$ فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = ر (س) فى ح هى $\{س_1 ، س_2\}$

٢ الطريقة الجبرية :

وفيها نستخدم تعريف دالة المقياس وبعض خواص مقياس العدد الحقيقى فى حل المعادلات.

تعريف المقياس

إذا كانت : س متغيرًا حقيقيًا ، أ ، ب عددين حقيقيين فإن : $|س| = \begin{cases} س & ، س \geq 0 \\ -س & ، س < 0 \end{cases}$

ومنها $|س + أ| = \begin{cases} س + أ & ، س \geq -أ \\ -س - أ & ، س < -أ \end{cases}$

، $|أس + ب| = \begin{cases} أس + ب & ، س \geq -\frac{ب}{أ} \\ -أس - ب & ، س < -\frac{ب}{أ} \end{cases}$

خواص مقياس العدد الحقيقى

١ $|أ| \geq ٠$

٢ $|أب| = |أ| \times |ب|$

٣ $|أ + ب| \leq |أ| + |ب|$

أى أن مقياس مجموع عددين أصغر من أو يساوى مجموع مقياسيهما ويحدث التساوى إذا كان أ ، ب سالبين معًا أو موجبين معًا أو كليهما يساوى الصفر

فمثلًا : $|٤ + (-٧)| < |٤| + |-٧|$ ، $|-٤ + (-٧)| = |-٤| + |-٧|$

ملاحظات

١ لأى عدد حقيقى أ يكون $|أ| = |-أ|$ **فمثلًا :** $|٣| = |-٣|$

٢ $|أ - س| = |س - أ|$ **فمثلًا :** $|٢ - س| = |س - ٢|$

٣ $|س| = ح$ ، $ح > ٠ \Leftrightarrow س = \pm ح$

فمثلًا : إذا كان : $|س| = ٣$ فإن : $س = \pm ٣$

وإذا كان : $أ = \pm ٥$ فإن : $|أ| = ٥$

٤ إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين فإن : $|أ| = |ب| \Leftrightarrow أ = \pm ب$

٥ لأى عدد حقيقى أ يكون $(|أ|)^٢ = أ^٢$

فمثلًا : $(|-٢|)^٢ = ٤$ ، $(|-\frac{١}{٢}|)^٢ = \frac{١}{٤}$

٦ لأى عدد حقيقى أ يكون $\sqrt{أ^٢} = |أ|$

فمثلًا : $\sqrt{(٥)^٢} = |٥| = ٥$ ، $\sqrt{(-٣)^٢} = |-٣| = ٣$

٧ إذا كان : $|س| = س$ فإن : $س \in [٠ ، \infty[$

٨ إذا كان : $|س| = -س$ فإن : $س \in]-\infty ، ٠]$

١ حل المعادلة على الصورة : | أ س + ب | = حـ ، حـ ∈ [٠ ، ∞[

«أى مقياس مقدار من الدرجة الأولى = عدد حقيقى غير سالب»

الحل البيانى

الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين

د (س) = | أ س + ب |

، ر (س) = حـ

الحل الجبرى

(١) باستخدام تعريف المقياس.

(٢) ما بداخل المقياس = ± العدد الحقيقى

ملاحظة

إذا كان | أ س + ب | = حـ ، حـ ∈]- ∞ ، ٠[فإن مجموعة الحل فى ح = ∅

فمثلًا : مجموعة حل المعادلة : | ٣ س - ٤ | = -٥ فى ح هى ∅

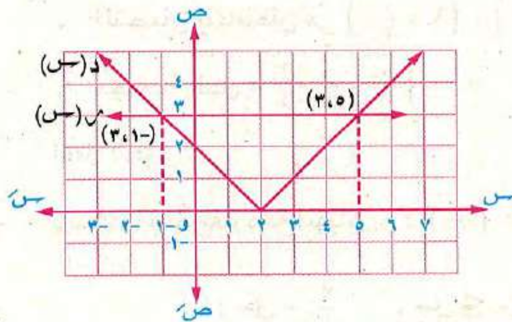
مثال ١

أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة الحل فى ح لكل من المعادلات الآتية :

١ | س - ٢ | = ٣ ٢ | ٢ س + ٣ | = ٢ ٣ | ٥ - س | = -١

الحل

١ **الحل البيانى :** بوضع د (س) = | س - ٢ | ، ر (س) = ٣



- نرسم منحنى الدالة

د : د (س) = | س - ٢ |

وهو نفس المنحنى ص = | س |

بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س→

- نرسم منحنى الدالة ر : ر (س) = ٣

وهى دالة ثابتة يمثلها بيانيًا خط مستقيم يوازى محور السينات

ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٣)

- نوجد نقطتى تقاطع المنحنيين وهما (-١ ، ٣) ، (٥ ، ٣)

∴ مجموعة الحل فى ح = {-١ ، ٥}

الحل الجبرى : أولًا : باستخدام تعريف دالة المقياس :

$$د(س) = |س - ٢| = \begin{cases} س - ٢ & ،\ س - ٢ \geq ٠ \\ -س + ٢ & ،\ س - ٢ < ٠ \end{cases} \quad \therefore\ د(س) = \begin{cases} س - ٢ & ،\ س \geq ٢ \\ -س + ٢ & ،\ س < ٢ \end{cases}$$

عندما $س \geq ٢$: $س - ٢ = ٣$ ومنها $س = ٥ \in [٢ ، \infty[$

عندما $س < ٢$: $-س + ٢ = ٣$ ومنها $س = -١ \in]-\infty ، ٢[$

∴ مجموعة الحل فى ح = {−١ ، ٥}

ثانيًا : باستخدام الخاصية «ما بداخل المقياس = ± العدد الحقيقى»

∵ $|س - ٢| = ٣$ ∴ $س - ٢ = \pm ٣$

∴ $س - ٢ = ٣$ ومنها $س = ٥$ أ ، $س - ٢ = -٣$ ومنها $س = -١$

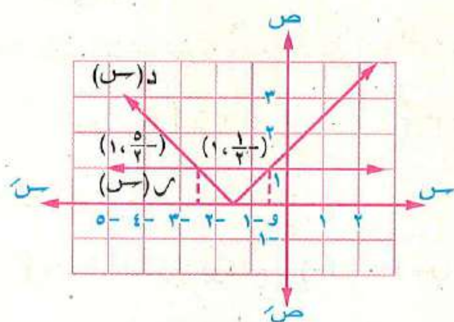
∴ مجموعة الحل = {٥ ، −١}

٢ ∵ $|٢س + ٣| = ٢$ ∴ $|٢(س + \frac{٣}{٢})| = ٢$

∴ $٢|س + \frac{٣}{٢}| = ٢$ ∴ $|س + \frac{٣}{٢}| = ١$

الحل البيانى : بوضع $د(س) = |س + \frac{٣}{٢}|$ ، $ر(س) = ١$

∵ د يمثلها بيانيًا المنحنى $ص = |س|$ بإزاحة أفقية $\frac{٣}{٢}$ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{وس}$ ، ر يمثلها بيانيًا خط مستقيم يوازى محور السينات ويقطع محور الصادات فى (٠ ، ١)



∴ المنحنيان يتقاطعان فى $(-\frac{١}{٢} ، ١)$ ، $(\frac{-٥}{٢} ، ١)$

∴ مجموعة الحل = $\{-\frac{١}{٢} ، \frac{-٥}{٢}\}$

الحل الجبرى :

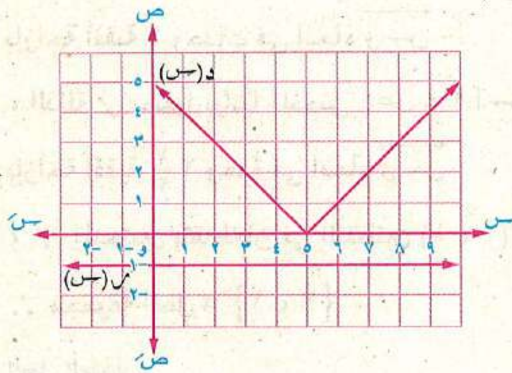
باستخدام تعريف دالة المقياس : $د(س) = |س + \frac{٣}{٢}| = \begin{cases} س + \frac{٣}{٢} & ،\ س + \frac{٣}{٢} \geq ٠ \\ -س - \frac{٣}{٢} & ،\ س + \frac{٣}{٢} < ٠ \end{cases}$

$$\therefore\ د(س) = \begin{cases} س + \frac{٣}{٢} & ،\ س \geq \frac{-٣}{٢} \\ -س - \frac{٣}{٢} & ،\ س < \frac{-٣}{٢} \end{cases}$$

عندما $س \geq \frac{-٣}{٢}$: $س + \frac{٣}{٢} = ١$ ومنها $س = \frac{-١}{٢} \in [\frac{-٣}{٢} ، \infty[$

عندما $س < \frac{-٣}{٢}$: $-س - \frac{٣}{٢} = ١$ ومنها $س = \frac{-٥}{٢} \in]-\infty ، \frac{-٣}{٢}[$

∴ مجموعة الحل = $\{\frac{-١}{٢} ، \frac{-٥}{٢}\}$



٣ ∵ | ٥ − س | = −١ ∴ | س − ٥ | = −١

(لاحظ أن : | ٥ − س | = | س − ٥ |)

الحل البيانى :

بوضع د (س) = | س − ٥ |

، ر (س) = −١

∵ الدالة د يمثلها بيانيًا المنحنى ص = | س |

بإزاحة أفقية ٥ وحدات فى اتجاه و س ، ر يمثلها بيانيًا خط مستقيم يوازى محور السينات ويقطع محور الصادات فى (٠ ، −١) ، من الرسم المنحنيان لا يتقاطعان فى أى نقطة

∴ مجموعة الحل = ∅

الحل الجبرى :

∵ مقياس أى عدد حقيقى هو عدد حقيقى غير سالب.

∴ لا يوجد حل للمعادلة : | س − ٥ | = −١ فى ح ∴ مجموعة الحل = ∅

٢ حل المعادلة على الصورة : | ا س + ب | = | حـ س + ء |

«أى مقياس مقدار من الدرجة الأولى فى س = مقياس مقدار آخر من الدرجة الأولى فى س»

الحل البيانى

الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين

د (س) = | ا س + ب |

، ر (س) = | حـ س + ء |

الحل الجبرى

(١) أحد المقدارين = ± المقدار الآخر.

(٢) بتربيع طرفى المعادلة.

مثال ٢

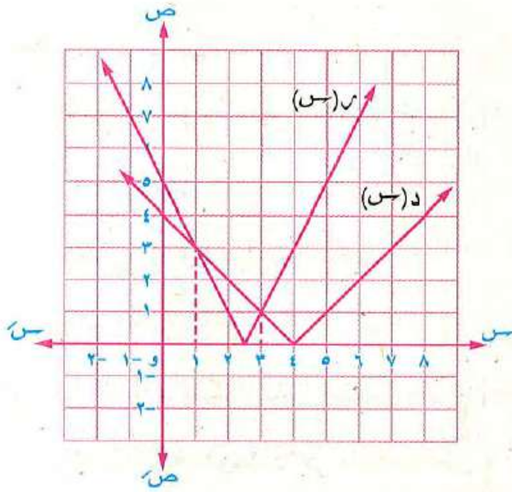
أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة حل المعادلة : | س − ٤ | = | ٢ س − ٥ | فى ح

الحل

بوضع د (س) = | س − ٤ |

، ر (س) = | ٢ س − ٥ | = ٢ | س − $2\frac{1}{2}$ |

الحل البيانى : الدالة د يمثلها بيانيًا المنحنى : ص = | س |



بإزاحة أفقية ٤ وحدات فى اتجاه و←س

، الدالة ر يمثلها بيانيًا المنحنى : ص = ٢ |س|

بإزاحة أفقية $٢\frac{١}{٢}$ وحدة فى اتجاه و←س

، ∵ المنحنيين يتقاطعان فى النقطتين (١ ، ٣) ، (٣ ، ١)

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٣}

الحل الجبرى :

أولاً : باستخدام الخاصية : أحد المقدارين = ± المقدار الآخر

∵ |س − ٤| = |٢ س − ٥| ∴ س − ٤ = ± (٢ س − ٥) (من خواص المقياس)

∴ س − ٤ = ٢ س − ٥ ومنها س = ١

أ، س − ٤ = −٢ س + ٥ ∴ ٣ س = ٩ ومنها س = ٣ ∴ مجموعة الحل = {١ ، ٣}

ثانيًا : بتربيع طرفى المعادلة :

∵ $(س - ٤)^٢ = (٢ س - ٥)^٢$ ∴ $س^٢ - ٨ س + ١٦ = ٤ س^٢ - ٢٠ س + ٢٥$

∴ $٣ س^٢ - ١٢ س + ٩ = ٠$ ∴ $س^٢ - ٤ س + ٣ = ٠$ ∴ (س − ٣) (س − ١) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = ١ ∴ مجموعة الحل = {٣ ، ١}

مثال ٣

أوجد جبريًا مجموعة الحل فى ح لكل من المعادلتين الآتيتين :

١ |٣ س − ٩| − |٣ − س| = ١٠ ٢ $\sqrt{س^٢ - ٤ س + ٤} = ١٠$

الحـــل

١ ∵ |٣ س − ٩| − |٣ − س| = ١٠ ∴ ٣ |س − ٣| − |س − ٣| = ١٠

(لاحظ أن : |س − ٣| = |٣ − س|) ∴ ٢ |س − ٣| = ١٠ ∴ |س − ٣| = ٥

∴ س − ٣ = ± ٥ ∴ س − ٣ = ٥ ومنها س = ٨

أ، س − ٣ = −٥ ومنها س = −٢ ∴ مجموعة الحل = {٨ ، −٢}

٢ ∵ $\sqrt{س^٢ - ٤ س + ٤} = ١٠$ ∴ $\sqrt{(س-٢)^٢} = ١٠$

∴ |س − ٢| = ١٠ ∴ س − ٢ = ± ١٠

∴ س − ٢ = ١٠ ومنها س = ١٢ أ، س − ٢ = −١٠ ومنها س = −٨

∴ مجموعة الحل = {١٢ ، −٨}

تذكر أن
$\sqrt{أ^٢} = |أ|$

مثال ٤

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين :

١ |س - ٣| - |س + ١| = ٠   ٢ |س - ٣| + |س - ١| = ٠

الحل

١ |س - ٣| = |س + ١|

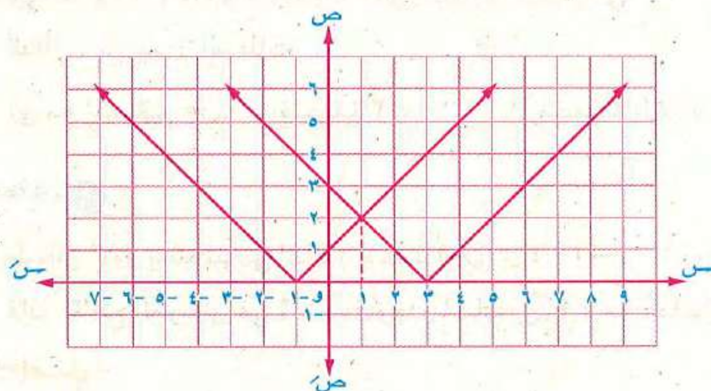
بوضع د (س) = |س - ٣|

، ر (س) = |س + ١|

∵ د يمثلها المنحنى

ص = |س| بإزاحة أفقية

٣ وحدات فى اتجاه و س→



، ر يمثلها المنحنى ص = |س| بإزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه و س←

، ∵ المنحنيين يتقاطعان فى النقطة (١ ، ٢)   ∴ مجموعة الحل = {١}

٢ |س - ٣| = - |س - ١| بوضع د (س) = |س - ٣|

، ر (س) = - |س - ١|

، ∵ د يمثلها المنحنى ص = |س|

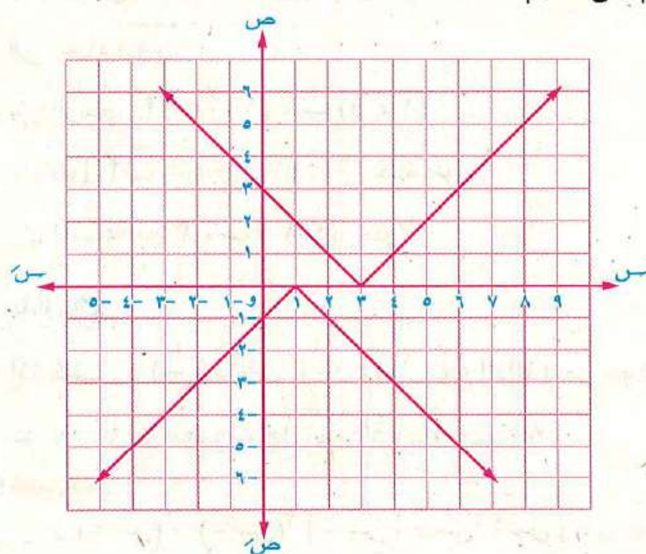
بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س→

، ر يمثلها المنحنى ص = |س|

بالانعكاس فى محور السينات

ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة فى

اتجاه و س→



، ∵ المنحنيين لا يتقاطعان فى أى نقطة

∴ مجموعة الحل = ∅

مثال ٥

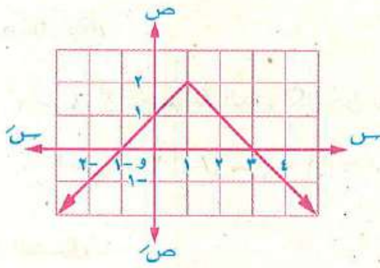
ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = ٢ - |س - ١|

ومن الرسم استنتج مجموعة الحل للمعادلة : د (س) = ٠

الحل

∵ د (س) = - |س - ١| + ٢

∴ د يمثلها بيانيًا صورة المنحنى ص = |س| بالانعكاس



في محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة في اتجاه $\overleftarrow{و س}$ ثم إزاحة رأسية وحدتان في اتجاه $\overleftarrow{و ص}$

∴ مجموعة الحل للمعادلة : د (س) = ٠

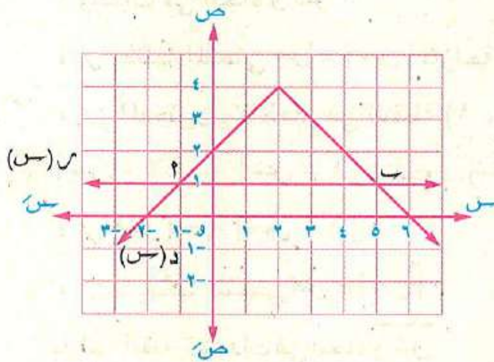
هي مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع الخط البياني للدالة د مع محور السينات

أي مع المستقيم ص = ٠ فنجدها ٣ ، -١ ∴ مجموعة الحل للمعادلة = {٣ ، -١}

مثال ٦

طريقان الأول يمثله منحنى الدالة د حيث د (س) = ٤ - | س - ٢ | والثاني يمثله منحنى الدالة ر حيث ر (س) = ١ فإذا تقاطع الطريقان في أ ، ب فأوجد المسافة بين أ ، ب علمًا بأن وحدة الأطوال تمثل كيلو مترًا واحدًا.

الحل



د يمثلها صورة المنحنى ص = | س |

بالانعكاس في محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدتين في اتجاه $\overrightarrow{و س}$ وإزاحة رأسية ٤ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{و ص}$

من الرسم : أ (-١ ، ١) ، ب (٥ ، ١)

∴ طول $\overline{أ ب}$ = ٥ - (-١) = ٦ وحدة طول

∴ المسافة بين أ ، ب = ٦ كيلو متر.

مثال ٧

إذا كانت : د (س) = س^{٢} | س | فعين نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

ثم أوجد في ح مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٨

الحل

∵ د (-س) = (-س)^{٢} | -س | = س^{٢} | س | = د (س) ∴ الدالة د زوجية.

، ∵ س^{٢} | س | = ٨ ∴ س^{٢} | س | - ٨ = ٠

، ∵ س^{٢} | س | - ٨ = $\begin{cases} س^{٢} (س) - ٨ &، س \geq ٠ \\ س^{٢} (-س) - ٨ &، س < ٠ \end{cases}$ = $\begin{cases} س^{٣} - ٨ &، س \geq ٠ \\ -س^{٣} - ٨ &، س < ٠ \end{cases}$

عندما س ≥ ٠ : س^{٣} - ٨ = ٠ ∴ س^{٣} = ٨ ∴ س = ٢

عندما س < ٠ : -س^{٣} - ٨ = ٠ ∴ س^{٣} = -٨ ∴ س = -٢

∴ مجموعة الحل = {٢ ، -٢}

تمارين 5 على حل معادلات القيمة المطلقة



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة : |س − ٢| = ٣ هى ....

(أ) {٢ ، ٣} (ب) {−١ ، ٥} (جـ) [−١ ، ٥] (د) {٥ ، −٥}

(٢) مجموعة حل المعادلة |٥ س − ١| + ٤ = ١ فى ح هى ....

(أ) $\{\frac{-٤}{٥}\}$ (ب) $\{\frac{-٤}{٥} ، \frac{٦}{٥}\}$ (جـ) ∅ (د) $\{\frac{٦}{٥}\}$

(٣) مجموعة حل المعادلة : |٢ س − ٤| = |س + ١| هى ....

(أ) {١ ، ٥} (ب) {٥ ، −١} (جـ) {١ ، −٥} (د) {−٥ ، −١}

(٤) مجموعة حل المعادلة : $\frac{١}{|س - ٣|} = \frac{١}{٢}$ هى .... حيث س ≠ ٣

(أ) {٥} (ب) {١} (جـ) {٥ ، ١} (د) ∅

(٥) مجموعة حل المعادلة : $س^٢$ = ٢ − |س| هى ....

(أ) {١ ، −١} (ب) {٢ ، −٢} (جـ) {١ ، −٢} (د) {−١ ، ٢}

(٦) مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩}$ = ٥ هى ....

(أ) {٤} (ب) {−١} (جـ) {٤ ، −١} (د) ح

(٧) أى مما يأتى لا ينتمى لمجموعة حل المعادلة |س + ٢| + |س − ١| = ٣

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) −٣ (د) ١

(٨) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٢}{|س| - ٢}$ هو ....

(أ) ح − {٢} (ب) ح − {−٢} (جـ) ح (د) ح − {٢ ، −٢}

(٩) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س| + ٣}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٣ ، −٣} (جـ) ح − {٣ ، −٣} (د) ح − {٣}

(١٠) الدالة د : د (س) = $\frac{س ظا س}{|س|}$ من حيث نوعها تكون ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) ليست فردية وليست زوجية. (د) خطية.

(١١) العبارة الخطأ فيما يلى هى ....

(أ) |س ص| = |س| × |ص|　　(ب) |س| = |−س|

(جـ) |س + ص| = |س| + |ص|　　(د) √(س٢) = |س|

(١٢) إذا كان : أ > ٠ ، ب < ٠ فإن أى مما يأتى يكون دائمًا سالبًا ؟

(أ) |أ ب|　　(ب) أ |ب|　　(جـ) |أ| ب　　(د) أ + |ب|

(١٣) إذا كان : أ − ب > ٠ فإن أى مما يأتى يجب أن يساوى |أ − ب| ؟

(١) أ − ب　　(٢) ب − أ　　(٣) |ب − أ|

(أ) (٣) فقط　　(ب) (١) ، (٣) فقط　　(جـ) (٢) ، (٣) فقط　　(د) (١) ، (٢) ، (٣)

(١٤) إذا كان : أ < ٠ < ب فإن : |أ| + |ب| + |أ − ب| − |ب − أ| = ...

(أ) ٢ أ　　(ب) ٢ ب　　(جـ) أ − ب　　(د) ب − أ

ثانيًا　الأسئلة المقالية

١ أوجد جبريًا فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) |س| = ٧　«{٧ ، −٧}»

(٢) |س| + ٣ = ٠　«∅»

(٣) ٤ |س| − ٢٠ = ٠　«{٥ ، −٥}»

(٤) |س − ٢| = ٢　«{٤ ، ٠}»

(٥) |س − ٣| = ٠　«{٣}»

(٦) |س + ٣| = ٦　«{٣ ، −٩}»

(٧) |٢ س − ٧| = ٥　«{١ ، ٦}»

(٨) |٣ − ٢ س| = ٧　«{٥ ، −٢}»

(٩) ٣ − |س + ٢| = ٢　«{−١ ، −٣}»

(١٠) ٢ |س| = ٣ − |س|　«{١ ، −١}»

(١١) |س − ٣| − |س + ١| = ٠　«{١}»

(١٢) |س + ٥| = |س − ٣|　«{−١}»

(١٣) |س − ١| = |٢ س + ٣|　«{−٤ ، −$\frac{٢}{٣}$}»

(١٤) |٢ س − ٦| = |س − ٣|　«{٣}»

(١٥) |٢ س + ١| = |س − ٣|　«{−٤ ، $\frac{٢}{٣}$}»

(١٦) |س − ١| − ٢ |٢ − س| = ٠　«{٣ ، $\frac{٥}{٣}$}»

(١٧) √(س٢ − ٤ س + ٤) = ٤　«{−٢ ، ٦}»

(١٨) |س − ٣|٢ − |س − ٣| = ٠　«{٣ ، ٢ ، ٤}»

(١٩) 📖 $\sqrt{٤س^{٢} - ١٢س + ٩}$ = |س + ١| «{ $\frac{٢}{٣}$ ، ٤ }»

(٢٠) |س^{٢} − ١| = |س − ١| «{ ١ ، ٠ ، −٢ }»

(٢١) |س + ١| |س − ١| = ٢٦ «{ ٣$\sqrt{٣}$ ، −٣$\sqrt{٣}$ }»

(٢٢) |س + ١|^{٢} − ٣ |س + ١| − ١٠ = ٠ «{ ٤ ، −٦ }»

(٢٣) (س − ٥)^{٢} = |٢س − ١٠| «{ ٥ ، ٧ ، ٣ }»

(٢٤) |س^{٢} + س − ١٠| = ١٠ «{ ٠ ، −١ ، −٥ ، ٤ }»

٢ أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية ، وحقق الناتج جبريًا :

(١) 📖 |س| − ٤ = ٠ «{ ٤ ، −٤ }»

(٢) |س| + ٢ = ٠ «∅»

(٣) 📖 |س − ٤| = ٣ «{ ١ ، ٧ }»

(٤) |س + ١| − ٣ = ٠ «{ ٢ ، −٤ }»

(٥) ٢ − |س + ٢| = ٠ «{ ٠ ، −٤ }»

(٦) ٢ |س − ٣| = ١٢ «{ ٩ ، −٣ }»

(٧) 📖 |٢س − ٥| = ٣ «{ ٤ ، ١ }»

(٨) $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$ = ٣ «{ ٥ ، −١ }»

(٩) 📖 |س − ١| = |س + ٣| «{ −١ }»

(١٠) |س − ٢| = −|س + ٢| «∅»

(١١) 📖 |س + ٧| = |٢س + ٣| «{ −٣$\frac{١}{٣}$ ، ٤ }»

(١٢) 📖 |س − ٢| + |س − ١| = ٠ «∅»

(١٣) 📖 |س − ٣| = |٢س + ١| «{ −٤ ، $\frac{٢}{٣}$ }»

٣ ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

(١) د (س) = س |س|

(٢) د (س) = س^{٢} |س| − ١

(٣) د (س) = س |س − ٢| + ٤

(٤) د (س) = $\frac{س^{٢} \text{ جا } ٢س}{٥ + |٢س|}$

(٥) د (س) = ٢ |س| طاس + ٢س |طاس|

٤ ارسم منحنى الدالة د حيث د (س) = |س − ٣| + ١ ، ومن الرسم ابحث اطراد الدالة ، ثم أوجد مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٤ «{ ٠ ، ٦ }»

٥ ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د (س) = |٢س + ٥| − ٣ وعين مدى الدالة وادرس اطرادها ومن الرسم استنتج مجموعة حل المعادلة : |٢س + ٥| − ٣ = صفر وحقق ذلك جبريًا. «{ −١ ، −٤ }»

٦ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = ١ − | ٢ س | واستنتج من الرسم مدى الدالة واطرادها ، وأثبت أنها زوجية ، ثم من الرسم أو بأى طريقة أخرى أوجد مجموعة حل المعادلة : ١ − | ٢ س | = −٣ «{−٢ ، ٢}»

٧ اكتب مجال الدالة د : د (س) = | س − ٢ | ثم ارسم منحنى الدالة ومن الرسم استنتج مدى الدالة واطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك ،
ثم أوجد مجموعة حل المعادلة : | س − ٢ | = ٣ بيانيًا وحقق الناتج جبريًا. «{−١ ، ٥}»

٨ ارسم كلاً من الدالتين $د_١$ ، $د_٢$ حيث $د_١$ (س) = | س − ١ | ، $د_٢$ (س) = | ٢ س − ٥ |
ومن الرسم استنتج مجموعة حل المعادلة : $د_١$ (س) − $د_٢$ (س) = ٠ . «{٤ ، ٢}»

٩ إذا كانت : د (س) = $س^٢$ | س | فعين نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك ثم أوجد مجموعة حل المعادلة : د (س) = ١ «{١ ، −١}»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س}{|س| + أ}$ هو ح − {−٢ ، ٢} فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ± ٢ (د) صفر

(٢) إذا كان : د (س) = | س − ٢ | + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س + ٢) = ٦ فى ح هى ....

(أ) {٠ ، ٤} (ب) {٢ ، −٢} (جـ) {٢ ، ٤} (د) {−٢ ، −٤}

(٣) إذا كان : د (س) = | س − ٢ | + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س + ٢) = ٣ فى ح هى ....

(أ) {١ ، ٣} (ب) ح (جـ) ∅ (د) {−١ ، −٣}

(٤) مجموعة حل المعادلة : | س − ٣ | = | ٣ − س | فى ح هى ....

(أ) {٣} (ب) {٣ ، −٣} (جـ) ح (د) ∅

(٥) مجموعة حل المعادلة : | س + ١ |^٢ + | ٢ س + ٣ | = ٠ فى ح هى ....

(أ) {−١ ، $\frac{-٣}{٢}$} (ب) ح (جـ) {١ ، $\frac{٣}{٢}$} (د) ∅

(٦) مجموعة حل المعادلة : | $س^٢$ − ٤ س + ٣ | = | س − ٣ | فى ح هى ....

(أ) {٠ ، ٢} (ب) {٢ ، ٣} (جـ) {٠ ، ٣} (د) {٠ ، ٢ ، ٣}

الدرس

6

حل متباينات القيمة المطلقة

١ الحل البيانى لمتباينات القيمة المطلقة

فى الشكل المقابل :

لأى دالتين د ، ر :

- مجموعة حل المتباينة : د (س) < ر (س) هى]أ ، ب[

وهى مجموعة قيم س التى يكون عندها منحنى الدالة د أسفل منحنى الدالة ر

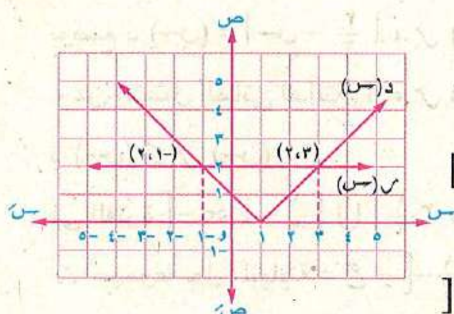
- مجموعة حل المتباينة : د (س) > ر (س) هى]− ∞ ، أ[∪]ب ، ∞[= ح − [أ ، ب]

وهى مجموعة قيم س التى يكون عندها منحنى الدالة د أعلى منحنى الدالة ر

لاحظ : من الشكل أن : مجموعة حل المعادلة د (س) = ر (س) هى {أ ، ب} ولذلك فإن :

- مجموعة حل المتباينة : د (س) ≤ ر (س) هى [أ ، ب]
- مجموعة حل المتباينة : د (س) ≥ ر (س) هى]− ∞ ، أ] ∪ [ب ، ∞[= ح −]أ ، ب[

فمثلًا : فى الشكل المقابل :



- مجموعة حل المتباينة :

د (س) < ر (س) هى]−١ ، ٣[

- مجموعة حل المتباينة : د (س) > ر (س) هى ح − [−١ ، ٣]
- مجموعة حل المتباينة : د (س) ≤ ر (س) هى [−١ ، ٣]
- مجموعة حل المتباينة : د (س) ≥ ر (س) هى ح −]−١ ، ٣[

مثال ١

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

١ $|س + ٣| < ٢$	٢ $|٢س - ٨| \le ٦$
٣ $|س - ٢| > ١$	٤ $|٢س - ٣| \ge ٤$

الحـــل

١ بوضع د (س) = $|س + ٣|$ ، ر (س) = ٢

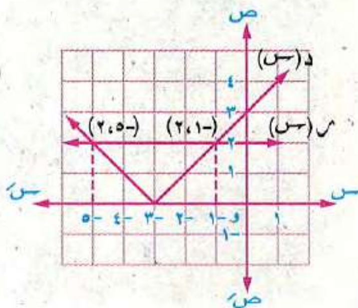
، من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر

فى الشكل المقابل ينتج أن :

د (س) < ر (س)

أى $|س + ٣| < ٢$ فى الفترة]-٥ ، -١[

∴ مجموعة حل المتباينة =]-٥ ، -١[



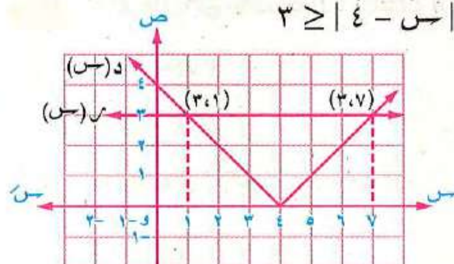
٢ ∵ $|٢ (س - ٤)| \le ٦$ ∴ $٢ |س - ٤| \le ٦$ ∴ $|س - ٤| \le ٣$

، بوضع د (س) = $|س - ٤|$ ، ر (س) = ٣

من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر فى الشكل المقابل ينتج أن :

د (س) ≤ ر (س) أى $|س - ٤| \le ٣$ فى الفترة [١ ، ٧]

∴ مجموعة حل المتباينة = [١ ، ٧]



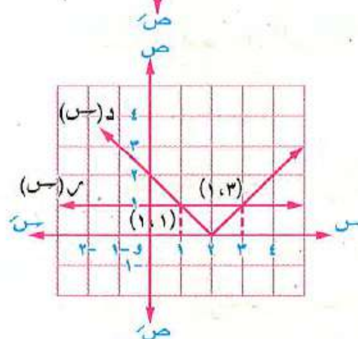
٣ بوضع د (س) = $|س - ٢|$ ، ر (س) = ١

، من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر فى الشكل المقابل ينتج أن :

د (س) > ر (س)

فى الفترة]- ∞ ، ١[∪]٣ ، ∞[أى ح - [١ ، ٣]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح - [١ ، ٣]



٤ ∵ $|٢ (س - \frac{٣}{٢})| \ge ٤$ ∴ $٢ |س - \frac{٣}{٢}| \ge ٤$ ∴ $|س - \frac{٣}{٢}| \ge ٢$

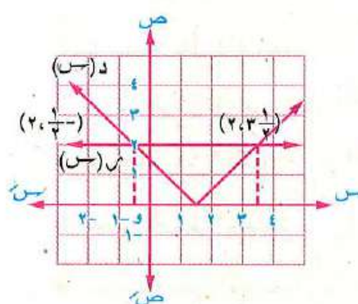
بوضع د (س) = $|س - \frac{٣}{٢}|$ ، ر (س) = ٢

، من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر فى الشكل المقابل ينتج أن :

د (س) ≥ ر (س)

فى الفترة]- ∞ ، $-\frac{١}{٢}$] ∪ [$٣\frac{١}{٢}$ ، ∞[أى ح -]$-\frac{١}{٢}$ ، $٣\frac{١}{٢}$[

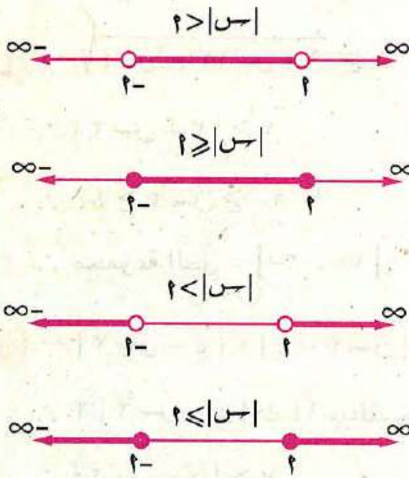
∴ مجموعة حل المتباينة = ح -]$-\frac{١}{٢}$ ، $٣\frac{١}{٢}$[



٢ الحل الجبرى لمتباينات القيمة المطلقة

نتائج

* لكل ٢ ∈ ح⁺



١ إذا كان : |س| < ٢ فإن : -٢ < س < ٢

أى أن س ∈]-٢ ، ٢[

٢ إذا كان : |س| ≤ ٢ فإن : -٢ ≤ س ≤ ٢

أى أن س ∈ [-٢ ، ٢]

٣ إذا كان : |س| > ٢ فإن : س > ٢ أو س < -٢

أى أن س ∈ ح - [-٢ ، ٢]

٤ إذا كان : |س| ≥ ٢ فإن : س ≥ ٢ أو س ≤ -٢

أى أن س ∈ ح -]-٢ ، ٢[

* لكل ٢ ∈ ح⁻

١ مجموعة حل المتباينة : |س| < ٢ أ، |س| ≤ ٢ فى ح تساوى ∅

٢ مجموعة حل المتباينة : |س| > ٢ أ، |س| ≥ ٢ فى ح تساوى ح

مثال ٢

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

١ |س - ٣| ≤ ٤

٢ |س + ٢| > ٣

٣ |٢س - ٥| < ١

٤ $\sqrt{٤س^٢ + ١٢س + ٩}$ ≥ ١

٥ |٢س - ٥| + |٥ - ٢س| < ١٤

الحــل

١ ∵ |س - ٣| ≤ ٤ ∴ -٤ ≤ س - ٣ ≤ ٤ ∴ -٤ + ٣ ≤ س ≤ ٤ + ٣

∴ -١ ≤ س ≤ ٧ ∴ مجموعة الحل = [-١ ، ٧]

٢ ∵ |س + ٢| > ٣

∴ س + ٢ > ٣ أ، س + ٢ < -٣

∴ س > ١ ∴ س < -٥

∴ مجموعة الحل = ح - [-٥ ، ١]

[٣] ∵ |٢س − ٥| < ١

∴ −١ < ٢س − ٥ < ١

∴ −١ + ٥ < ٢س < ١ + ٥

∴ ٤ < ٢س < ٦ بالقسمة على ٢

∴ ٢ < س < ٣

∴ مجموعة الحل =]٢ ، ٣[

[٤] ∵ √(٤س² + ١٢س + ٩) ≤ ١

∴ √((٢س + ٣)²) ≤ ١

∴ |٢س + ٣| ≤ ١

∴ −١ ≤ ٢س + ٣ ≤ ١

∴ −٤ ≤ ٢س ≤ −٢

∴ −٢ ≤ س ≤ −١

∴ مجموعة الحل = [−٢ ، −١]

[٥] ∵ |٢س − ٥| + |٥ − ٢س| < ١٤

∴ |٢س − ٥| + |٢س − ٥| < ١٤

∴ ٢ |٢س − ٥| < ١٤ وبالقسمة على ٢

∴ |٢س − ٥| < ٧

∴ −٧ < ٢س − ٥ < ٧

∴ −٢ < ٢س < ١٢

∴ −١ < س < ٦

∴ مجموعة الحل =]−١ ، ٦[

مثال ٣

اكتب متباينة القيمة المطلقة التى تعبر عن :

[١] درجة طالب فى أحد الاختبارات تتراوح من ٧٠ إلى ٩٠ درجة.

[٢] العمق الذى تعيش فيه بعض الأسماك تحت سطح الماء فى حوض سمك ارتفاعه الداخلى ٤٠ سم.

الحل

[١] بفرض أن درجة الطالب = س درجة

∴ ٧٠ ≤ س ≤ ٩٠ (بإضافة −٨٠ إلى أطراف المتباينة)

∴ ٧٠ − ٨٠ ≤ س − ٨٠ ≤ ٩٠ − ٨٠ ∴ −١٠ ≤ س − ٨٠ ≤ ١٠

∴ متباينة القيمة المطلقة هى |س − ٨٠| ≤ ١٠

لاحظ أن

٨٠ هو الوسط الحسابى للعددين ٧٠ ، ٩٠

[٢] بفرض أن العمق الذى تعيش فيه هذه الأسماك = س سم

∴ ٠ < س < ٤٠ (بإضافة −٢٠ إلى أطراف المتباينة)

∴ ٠ − ٢٠ < س − ٢٠ < ٤٠ − ٢٠ ∴ −٢٠ < س − ٢٠ < ٢٠

∴ متباينة القيمة المطلقة هى |س − ٢٠| < ٢٠

لاحظ أن

٢٠ هو الوسط الحسابى للعددين ٠ ، ٤٠

تمارين 6 على حل متباينات القيمة المطلقة



اختبر نفسك

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجموعة حل المتباينة : |س| < ٢ فى ح هى ....

(أ)]-∞ ، ٢[(ب) [-٢ ، ٢] (ج)]-٢ ، ٢[(د) ح - [-٢ ، ٢]

② مجموعة حل المتباينة : |س| ≤ ٣ فى ح هى ....

(أ) [٣ ، ∞[(ب) [-٣ ، ٣] (ج) ح -]-٣ ، ٣[(د) ح - [-٣ ، ٣]

③ مجموعة حل المتباينة : |س| > -١ هى ....

(أ) [٠ ، ∞[(ب) ح (ج) ∅ (د) ح - {٠}

④ مجموعة حل المتباينة : $\frac{١}{|س|}$ ≤ ١ هى ....

(أ) [-١ ، ١] (ب)]-١ ، ١[(ج) [-١ ، ١] - {٠} (د)]-١ ، ١[- {٠}

⑤ مجموعة حل المتباينة : |٣ - س| > ٠ هى ....

(أ)]-٣ ، ٣[(ب) ح - [-٣ ، ٣] (ج) ح - {٣} (د) ح

⑥ مجموعة حل المتباينة : |٣ - ٢س| ≥ ١ فى ح هى ....

(أ) [١ ، ٢] (ب)]١ ، ٢[(ج) ح -]١ ، ٢[(د) ح - [١ ، ٢]

⑦ مجموعة حل المتباينة : $\frac{١}{|س - ٢|}$ ≥ $\frac{١}{٢}$ هى ....

(أ) [٠ ، ٤[- {٢} (ب) [٠ ، ٤] - {٢}

(ج) [٠ ، ٤] (د)]٠ ، ٤]

⑧ مجموعة حل المتباينة : |س + ٣| ≤ ٠ هى ....

(أ) ∅ (ب)]-∞ ، -٣] (ج) [-٣ ، ∞[(د) {-٣}

⑨ مجموعة حل المتباينة : |س - ١| < -٢ فى ح هى ....

(أ)]-١ ، ٣[(ب) ح - [-١ ، ٣] (ج)]-٢ ، ٢[(د) ∅

(١٠) إذا كان : |س| < ٢ ، ٢ ∈ ح⁺ فإن : س ∈ ....

(أ) ح − [−٢ ، ٢] (ب) [−٢ ، ٢] (جـ) ح −]−٢ ، ٢[(د)]−٢ ، ٢[

(١١) مجموعة حل المتباينة : |٢س − ٥| ≥ ٩ فى ح هى ....

(أ)]−∞ ، ٧[(ب) [−٢ ، ٧] (جـ) ح −]−٢ ، ٧[(د) ح − [−٢ ، ٧]

(١٢) مجموعة حل المتباينة : |٤ − ٦س| ≤ ١٤ فى ح هى ....

(أ)]−$\frac{٥}{٣}$ ، ٣[(ب) [−$\frac{٥}{٣}$ ، ٣]

(جـ) ح −]−$\frac{٥}{٣}$ ، ٣[(د) ح − [−$\frac{٥}{٣}$ ، ٣]

(١٣) مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١}$ ≤ ٤ هى ....

(أ) [−٣ ، ٥] (ب) ح −]−٣ ، ٥[(جـ)]−٣ ، ٥[(د) ح − [−٣ ، ٥]

(١٤) مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{٤\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٩}$ ≥ ٩ هى ....

(أ) [−٦ ، ١٢] (ب) [−٣ ، ٦] (جـ) ح − [−٣ ، ٦] (د) ح −]−٣ ، ٦[

(١٥) مجموعة حل المتباينة : |٢س − ٣| + |٦ − ٤س| ≥ ٢١ هى ....

(أ) [−٢ ، ٥] (ب) ح −]−٢ ، ٥[(جـ)]−٢ ، ٥[(د) {−٢ ، ٥}

(١٦) متباينة القيمة المطلقة التى تعبر عن أن درجة الطالب فى أحد الاختبارات (س) تتراوح من ٧٠ إلى ٩٠ درجة هى ....

(أ) |س| ≥ ٩٠ (ب) |س| ≤ ٧٠ (جـ) |س − ٨٠| ≥ ١٠ (د) |س − ٧٠| ≥ ٩٠

(١٧) عدد الحلول التى تنتمى لمجموعة الأعداد الصحيحة للمتباينة |س − ٢| ≥ ٥ هى ....

(أ) صفر (ب) ٧ (جـ) ٩ (د) ١١

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية جبريًا :

① |س − ٣| ≥ ٥ «[−٢ ، ٨]»

② |س − ٣| ≤ ٥ «ح −]−٢ ، ٨[»

③ |٢س − ٣| < ٥ «]−١ ، ٤[»

④ |٢س + ٥| > ٣ «ح − [−٤ ، −١]»

⑤ |٢س + ٦| ≥ ٤ «[−٥ ، −١]»

⑥ |٥ − س| > ٣ «ح − [٢ ، ٨]»

⑦ |٢س + ٣| ≥ ٧ «[−٥ ، ٢]»

⑧ |٢س + ٣| + ٢ ≥ ١ «∅»

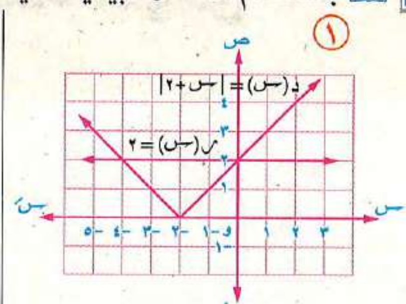
⑨ $\sqrt{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩}$ ≥ ٣ «[٠ ، ٦]»

⑩ $\sqrt{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١}$ ≤ ٤ «ح −]−٣ ، ٥[»

⑪ |س − ٢| + |٢ − س| < ٦ «]−١ ، ٥[»

٢ باستخدام الأشكال البيانية الآتية أكمل :

①

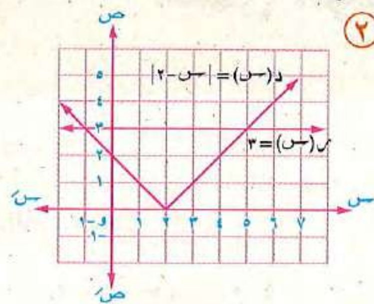


مجموعة حل المتباينة

د (س) < ر (س) فى ح

هى ....

②

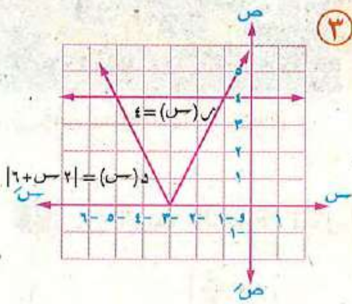


مجموعة حل المتباينة

د (س) > ر (س) فى ح

هى ....

③



مجموعة حل المتباينة

د (س) ≤ ر (س) فى ح

هى ....

---

٣ أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية بيانيًا ثم حقق الناتج جبريًا :

① |س − ١| < ٣ ② |س − ٢| ≤ ٥ ③ |س + ٣| ≥ ٢

④ |٢ − س| < −١ ⑤ |س + ٢| > −١ ⑥ $\sqrt{س^{٢} + ٢س + ١}$ > ٣

---

٤ اكتب على صورة متباينة القيمة المطلقة كلًا مما يأتى :

① −٤ ≤ س ≤ ٤ ② ٠ < س < ٦ ③ س ≤ −٢ أ، س ≥ ٢

---

٥ اكتب متباينة القيمة المطلقة التى تعبر عن :

① درجة طالب فى اختبار ما تقع بين ٦٠ إلى ١٠٠ درجة.

② درجة حرارة مقيسة بالترمومتر الطبى تقع بين ٣٥° C ، ٤٢° C

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : س ∈ [−١ ، ٤] فإن : |٢س − ٣| ≤ ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) −٥

② مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$ > ٠ فى ح هى ....

(أ) ح − {٢} (ب) ح − {−٢} (ج) ح (د) ∅

③ أصغر قيمة للمقدار : $\frac{|س| + |ص|}{|س + ص|}$ هى ....

(أ) −١ (ب) صفر (ج) ١ (د) ٢

④ إذا كان : $٢^{س}$ = ٦١ فإن : |س − ٦| + |س − ٥| = ...

(أ) −١١ (ب) −١ (ج) ١ (د) ١١

⑤ إذا كان : $أ^{٢}$ ب > ٠ ، $\frac{أ}{ب}$ < ٠ فإن : $\sqrt{أ^{٢}} + \sqrt{ب^{٢}}$ − (ب − أ) = ...

(أ) ٢أ (ب) −٢ب (ج) −٢أ + ٢ب (د) صفر

تطبيقات حيـاتيــة  علـى الوحـدة الأولـى

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ **الربط بالتجارة :** تمثل الدالة د ، حيث

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٥}{٢} س & ، ٠ \leq س \leq ٥٠٠٠ \\ ٢ س + ٢٥٠٠ & ، ٥٠٠٠ < س \leq ١٥٠٠٠ \\ \frac{٣}{٢} س + ١٠٠٠٠ & ، ١٥٠٠٠ < س \leq ٦٠٠٠٠ \end{cases}$$

المبلغ بالجنيه الذى تتقاضاه شركة لتوزيع أحد الأجهزة الكهربائية ، حيث س تمثل عدد الأجهزة الموزعة

أوجد : (١) د (٥٠٠٠) (٢) د (١٠٠٠٠) (٣) د (٥٠٠٠٠)

«١٢٥٠٠ جنية ، ٢٢٥٠٠ جنيه ، ٨٥٠٠٠ جنيه»

---

٢ **الربط بالهندسة :** إذا كان ح محيط مربع طول ضلعه ل اكتب محيط المربع كدالة فى طول ضلعه ح (ل)

ثم أوجد : (١) ح (٣) (٢) ح $\left(\frac{١٥}{٤}\right)$ «١٢ وحدة طول ، ١٥ وحدة طول»

---

٣ **الربط بالهندسة :** إذا كانت م مساحة دائرة طول نصف قطرها نق. اكتب المساحة كدالة فى طول نصف القطر م (نق) ثم أوجد : (١) م $\left(\frac{١}{٢}\right)$ (٢) م (٥) «$\frac{١}{٤}\pi$ وحدة مربعة ، ٢٥ π وحدة مربعة»

---

٤ **الربط بالتجارة :** يدفع تاجر غلال ٥٠ جنيهًا عن كل طن يدخل أو يخرج من مستودعه كأجر تحميل أو تنزيل ، اكتب الدالة التى تمثل تكاليف التحميل أو التنزيل ومثلها بيانيًا.

---

٥ **المجتمعات العمرانية :** خصصت قطع أراضى مستطيلة الشكل لإسكان الشباب بإحدى المجتمعات العمرانية الجديدة ، فإذا كان طول كل منها س مترًا ، ومساحتها ٤٠٠ متر مربع.

(١) بين أن طول قطعة الأرض يتناسب عكسيًا مع عرضها.

(٢) اكتب قاعدة الدالة د التى تبين عرض قطعة الأرض بدلالة طولها ومثلها بيانيًا.

(٣) أوجد من الرسم عرض قطعة الأرض التى طولها ٢٥ مترًا وتحقق من ذلك جبريًا.

«١٦ مترًا»

---

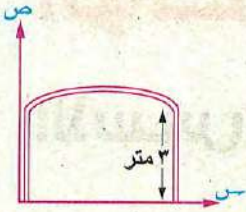
٦ **الربط بالصناعة :** صممت بوابة حديدية ارتفاع جانبيها ٣ أمتار

وقوسها على شكل جزء من منحنى الدالة د : د (س) = أ $(س - ٢)^{٢} + ٤$ كما فى الشكل المقابل.

أوجد :

(١) قيمة أ (٢) أقصى ارتفاع للبوابة.

(٣) عرض البوابة.



«$-\frac{1}{4}$ ، ٤ أمتار ، ٤ أمتار»

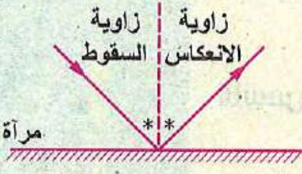
٧ شبكات الطرق : طريقان الأول يمثله منحنى الدالة د حيث د (س) = |س − ٤| ، والثانى يمثله منحنى الدالة ر حيث ر (س) = ٣ ، إذا تقاطع الطريقان فى نقطتى أ ، ب

أوجد المسافة بين أ ، ب علمًا بأن وحدة الأطوال تمثل كيلو مترًا واحدًا. «٦ كم»

٨ قامت محطة الأرصاد الجوية بتسجيل درجة الحرارة فى مدينة القاهرة فى يوم ما فكانت ٣٢° باختلاف ٧ درجات عن معدلها الطبيعى فى ذلك اليوم. كم تكون درجة الحرارة فى المعدل الطبيعى لمدينة القاهرة فى ذلك اليوم ؟ «٢٥° أ ٣٩°»

٩ الطب الرياضى : يختلف وزن باسم عن الوزن الطبيعى لطوله بمقدار ٥ كيلو جرامات ، ما الوزن المحتمل له إذا كان الوزن الطبيعى لطوله ٦٠ كيلو جرامًا ؟ «٥٥ كجم أ ٦٥ كجم»

١٠ تطبيق حياتى : إذا سقط شعاع الضوء على سطح عاكس فإن مساره يخضع لدالة المقياس فيكون قياس زاوية السقوط مساويًا لقياس زاوية الانعكاس ، كذلك مسار كرة البلياردو قبل وبعد تصادمها مع حافة الطاولة فى بعض الحالات.

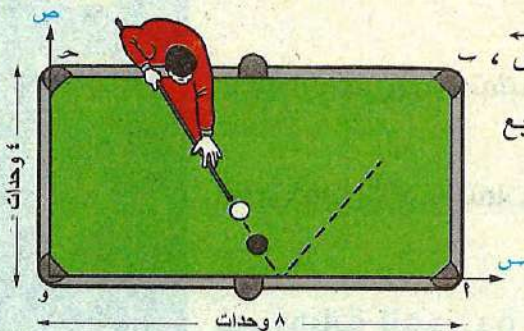


يوضح الشكل المقابل :

تصويب لاعب البلياردو على الكرة السوداء ، باعتبار $\overleftarrow{\text{وس}}$ ، $\overleftarrow{\text{وص}}$ محورى الإحداثيات المتعامدة ، وأن مسار الكرة يتبع منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{4}{3}$ |س − ٥|

هل تسقط الكرة السوداء فى الجيب ب ؟

فسر إجابتك رياضيًا.



١١ وظائف خالية : تسمح إحدى شركات الغاز الطبيعى بتوظيف قارئ العداد إذا كان طوله يتراوح بين ١٧٨ سم ، ١٩٢ سم. عبر عن الأطوال الممكنة لمن يتقدم لشغل هذه الوظيفة بمتباينة القيمة المطلقة.

«|س − ١٨٥| ≤ ٧»

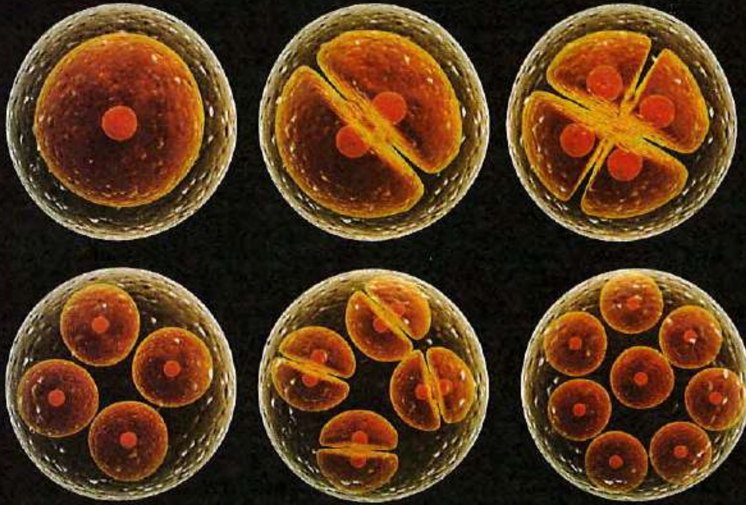
الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها



الدرس 1	الأسس الكسرية والمعادلات الأسية.
الدرس 2	الدالة الأسية وتطبيقاتها.
الدرس 3	الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى.
الدرس 4	بعض خواص اللوغاريتمات.

فى نهاية الوحـــدة : تطبيقات حياتيـة على دروس الوحدة.



الدرس

1

الأسس الكسرية والمعادلات الأسية

الجذر النونى

الجذر النونى للعدد أ هو العملية العكسية لرفع هذا العدد للقوة (ن) ويرمز للجذر النونى للعدد أ بالرمز $\sqrt[ن]{أ}$ ويسمى ن دليل الجذر.

فمثلًا : $\sqrt[5]{32}$ (الجذر الخامس للعدد ٣٢) = ٢ لأن $٢^٥ = ٣٢$

أى أن $\sqrt[ن]{أ}$ (الجذر النونى للعدد أ) = س إذا كان $س^ن = أ$

* لاحظ أن : المعادلة : $س^ن = أ$ حيث أ ∈ ح ، ن ∈ $ص^+$ لها ن من الجذور.

ونستعرض فيما يلى بعض الحالات :

١ إذا كان : ن عددًا زوجيًا ، أ > ٠

فإن المعادلة $س^ن = أ$ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية (عندما ن > ٢) ويرمز للجذرين الحقيقيين بالرمزين $\sqrt[ن]{أ}$ ، $-\sqrt[ن]{أ}$

فمثلًا : المعادلة $س^٦ = ٦٤$ لها جذران حقيقيان هما $\sqrt[6]{64} = ٢$ ، $-\sqrt[6]{64} = -٢$
وتوجد أربعة جذور أخرى مركبة غير حقيقية.

٢ إذا كان : ن عددًا زوجيًا ، أ < ٠

فإن المعادلة $س^ن = أ$ ليس لها جذور حقيقية (جذورها أعداد مركبة غير حقيقية)

فمثلًا : عند حل المعادلة $س^٢ = -١٦$ فإن : س = ± $\sqrt{-16}$ = ± ٤ ت (أعداد مركبة غير حقيقية)

٣ إذا كان : ن عددًا فرديًا ، أ ∈ ح − {٠}

فإن المعادلة $س^ن = أ$ لها جذر حقيقى وحيد هو $\sqrt[ن]{أ}$ وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية

فمثلًا : المعادلة $س^٣ = -٢٧$ لها جذر حقيقى وحيد هو $\sqrt[3]{-27} = -٣$ ويوجد جذران مركبان غير حقيقيين.

٤ إذا كان : $ن \in ص^+$ ، ٩ = صفر فإن المعادلة $س^ن$ = صفر لها حل حقيقى وحيد هو س = ٠

(عدد جذور المعادلة يساوى ن وكل منها يساوى صفر عندما ن > ١)

فمثلًا : المعادلة $س^٣ = ٠$ لها ثلاثة جذور حقيقية متساوية وكل منها يساوى صفر

ملاحظة

$\sqrt[ن]{٩^ن} = |٩|$ إذا كان ن عددًا زوجيًا ، $\sqrt[ن]{٩^ن} = ٩$ إذا كان ن عددًا فرديًا

فمثلًا : $\sqrt[٤]{(-٤)^٤} = |-٤| = ٤$ ، $\sqrt[٣]{(-٣)^٣} = -٣$

خواص الجذور النونية

إذا كان : ٩ ، ب عددين حقيقيين ، $\sqrt[ن]{٩}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ح$ فإن :

١ $\sqrt[ن]{٩ ب} = \sqrt[ن]{٩} \times \sqrt[ن]{ب}$

٢ $\sqrt[ن]{\frac{٩}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{٩}}{\sqrt[ن]{ب}}$ حيث ب ≠ ٠ لاحظ أن : $\sqrt[ن]{٩ \pm ب} \neq \sqrt[ن]{٩} \pm \sqrt[ن]{ب}$

فمثلًا : $\sqrt[٣]{٢٧ ب^{١٥}} = \sqrt[٣]{٢٧} \times \sqrt[٣]{ب^{١٥}} = ٣ ب^٥$

، $\sqrt[٤]{٨١ س^٤ ص^٨} = \sqrt[٤]{٨١} \times \sqrt[٤]{س^٤} \times \sqrt[٤]{ص^٨} = ٣ |س| ص^٢$

الأسس الكسرية

تعريف

١ إذا كان : $ن \in ص^+ - \{١\}$ ، $٩ \in ح$ فإن : $٩^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{٩}$

مع ملاحظة أن : إذا كان : ن عدد زوجى ، ٩ < ٠ فإن : $٩^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{٩} \notin ح$

فمثلًا : $٩^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٩} = ٣ \in ح$ ، $\left(\frac{-١}{٨}\right)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{\frac{-١}{٨}} = \frac{-١}{٢} \in ح$

بينما : $(-١٦)^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{-١٦} \notin ح$

٢ إذا كان م ، ن عددين صحيحين ليس بينهما عامل مشترك ، ن > ١ ، $\sqrt[ن]{٩} \in ح$

فإن : $٩^{\frac{م}{ن}} = \left(\sqrt[ن]{٩}\right)^م = \sqrt[ن]{٩^م}$

فمثلًا : $(٨)^{\frac{٢}{٣}} = \left(\sqrt[٣]{٨}\right)^٢ = ٢^٢ = ٤$ ، $(٨١)^{-\frac{٣}{٤}} = \left(\sqrt[٤]{٨١}\right)^{-٣} = ٣^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$

قوانين الأسس

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين ، م ، ن عددين نسبيين ومع مراعاة استثناء الحالات التى يكون فيها المقام = صفر ، والحالات التى يكون فيها الأساس = صفر ، الأس = صفر معًا وأن تكون جميع التعبيرات المستخدمة معرفة فإن :

١ $أ^{صفر} = ١$
٢ $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$
٣ $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$
٤ $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$
٥ $(أ^{م})^{ن} = أ^{من}$
٦ $(أب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$
٧ $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-ن} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{ن} = \frac{ب^{ن}}{أ^{ن}}$

ملاحظات

١ إذا كان : $أ \in ح^{-}$ فإن :

$أ^{ن} > ٠$ إذا كان ن عددًا صحيحًا زوجيًا

$أ^{ن} < ٠$ إذا كان ن عددًا صحيحًا فرديًا

فمثلًا : $(-٤)^{٢} = ١٦ > ٠$ بينما $(-٤)^{٣} = -٦٤ < ٠$

٢ * إذا كان : $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن : $س = أ^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد فردى

* إذا كان : $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن : $س = \pm أ^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد زوجى

بشرط أن يكون م ، ن عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك (أى $\frac{م}{ن}$ عدد نسبى فى أبسط صورة) وإذا كان أحدهما زوجيًا فيجب أن يكون $أ \geq ٠$

٣ **خطأ شائع :** * $(-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = \sqrt[١٠]{(-٣٢)^{٢}} = ٢$ (حل خطأ)

* $(-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = \left(\sqrt[١٠]{-٣٢}\right)^{٢} =$ غير معرف فى ح (حل خطأ)

وذلك لأن الأس $\frac{٢}{١٠}$ ليس فى أبسط صورة ويجب اختصاره أولًا $\left[\frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}\right]$

$\therefore (-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = (-٣٢)^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$ (الحل الصحيح)

مثال ١

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١ $\sqrt[٥]{أ^{٣}} \times \sqrt[٧]{أ^{٣}}$
٢ $\left(\sqrt[٥]{س}\right)^{٢} \times \sqrt[٣]{س^{٢}}$
٣ $\left(\sqrt[٣]{أ^{-٥}}\right)^{٢} \times \left(\sqrt[٤]{أ^{٣}}\right)^{٣}$

الحل

١ $\sqrt[٥]{أ^{٣}} \times \sqrt{أ^{٣}} = أ^{\frac{٣}{٥}} \times أ^{\frac{٣}{٢}} = أ^{\frac{٣}{٥}+\frac{٣}{٢}} = أ^{\frac{٢١}{١٠}} = أ^{٢} \times أ^{\frac{١}{١٠}} = أ^{٢}\sqrt[١٠]{أ}$

٢ $(\sqrt[٥]{س})^{٢} \times \sqrt[٣]{س^{٢}} = س^{\frac{٢}{٥}} \times س^{\frac{٢}{٣}} = س^{\frac{٢}{٥}+\frac{٢}{٣}} = س^{\frac{١٦}{١٥}} = س \times س^{\frac{١}{١٥}} = س\sqrt[١٥]{س}$

٣ $(\sqrt[٣]{أ^{-٥}})^{٢} \times (\sqrt[٤]{أ^{٣}})^{٣} = (أ^{\frac{-٥}{٣}})^{٢} \times (أ^{\frac{٣}{٤}})^{٣} = أ^{\frac{-١٠}{٣}} \times أ^{\frac{٩}{٤}} = أ^{\frac{-١٣}{١٢}} = \frac{١}{أ^{\frac{١٣}{١٢}}} = \frac{١}{|أ| \times أ^{\frac{١}{١٢}}} = \frac{١}{|أ|\sqrt[١٢]{أ}}$

مثال ٢

اختصر لأبسط صورة : $\dfrac{\sqrt[٤]{٨} \times \sqrt[٨]{٠{,}٠١} \times ١٢٥}{\sqrt[٤]{(١٥)^{٣}} \times \sqrt[٨]{٤^{٥}} \times (٣٦)^{-\frac{٣}{٨}}}$

الحل

المقدار $= \dfrac{\sqrt[٤]{٢^{٣}} \times \sqrt[٨]{(١٠)^{-٢}} \times ٥^{٣}}{\sqrt[٤]{(١٥)^{٣}} \times \sqrt[٨]{٤^{٥}} \times (٣٦)^{-\frac{٣}{٨}}} = \dfrac{٢^{\frac{٣}{٤}} \times (١٠)^{-\frac{١}{٤}} \times ٥^{٣}}{(١٥)^{\frac{٣}{٤}} \times ٤^{\frac{٥}{٨}} \times (٣٦)^{-\frac{٣}{٨}}} = \dfrac{٢^{\frac{٣}{٤}} \times (٢ \times ٥)^{-\frac{١}{٤}} \times ٥^{٣}}{(٣ \times ٥)^{\frac{٣}{٤}} \times (٢^{٢})^{\frac{٥}{٨}} \times (٢^{٢} \times ٣^{٢})^{-\frac{٣}{٨}}}$

$= \dfrac{٢^{\frac{٣}{٤}} \times ٢^{-\frac{١}{٤}} \times ٥^{-\frac{١}{٤}} \times ٥^{٣}}{٣^{\frac{٣}{٤}} \times ٥^{\frac{٣}{٤}} \times ٢^{\frac{٥}{٤}} \times ٢^{-\frac{٣}{٤}} \times ٣^{-\frac{٣}{٤}}} = ٢^{\frac{٣}{٤}-\frac{١}{٤}-\frac{٥}{٤}+\frac{٣}{٤}} \times ٣^{-\frac{٣}{٤}+\frac{٣}{٤}} \times ٥^{-\frac{١}{٤}+٣-\frac{٣}{٤}}$

$= ٢^{٠} \times ٣^{٠} \times ٥^{٢} = ١ \times ١ \times ٢٥ = ٢٥$

مثال ٣

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

١ $٣ س^{٥} = -٩٦$ | ٢ $س^{٦} = -٦٤$ | ٣ $(س - ٢)^{٤} = ٨١$

٤ $س^{\frac{٣}{٤}} = ٢٧$ | ٥ $\sqrt[٥]{س^{٢}} = ١$ | ٦ $\sqrt[٤]{(٣س + ٢)^{٣}} = ٨$

٧ $س^{\frac{٤}{٣}} - ٥ \times س^{\frac{٢}{٣}} + ٤ = ٠$

الحل

لاحظ أن المطلوب إيجاد مجموعة الحل فى ح أى إيجاد الجذور الحقيقية فقط.

١ $\because ٣ س^{٥} = -٩٦$ $\quad \therefore س^{٥} = -٣٢$

$\therefore س = \sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$ $\quad \therefore$ م.ح $= \{-٢\}$

٢ $س^{٦} = -٦٤$ $\quad \because -٦٤ < ٠$ ، ٦ عدد زوجى $\quad \therefore$ م.ح $= \varnothing$

٣ $\because (س - ٢)^{٤} = ٨١$ $\quad \therefore س - ٢ = \sqrt[٤]{٨١} = ٣$ أ، $س - ٢ = -\sqrt[٤]{٨١} = -٣$

$\therefore س = ٣ + ٢ = ٥$ أ، $س = -٣ + ٢ = -١$ $\quad \therefore$ م.ح $= \{٥ ، -١\}$

٤ $\because س^{\frac{٣}{٤}} = ٢٧$ $\quad \therefore س = ٢٧^{\frac{٤}{٣}} = (٣^{٣})^{\frac{٤}{٣}} = ٣^{٤}$

$\therefore س = ٨١$ $\quad \therefore$ م.ح $= \{٨١\}$

٥ $\because \sqrt[5]{س^{٢}} = ١$ $\quad\therefore س^{\frac{٢}{٥}} = ١$ $\quad\therefore س = \pm ١^{\frac{٥}{٢}}$

$\therefore س = \pm ١$ $\quad\therefore م.ح = \{١ ، -١\}$

٦ $\because \sqrt[4]{(٣س + ٢)^{٣}} = ٨$ $\quad\therefore (٣س + ٢)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$ $\quad\therefore ٣س + ٢ = ٨^{\frac{٤}{٣}}$

$\therefore ٣س + ٢ = (٢^{٣})^{\frac{٤}{٣}}$ $\quad\therefore ٣س + ٢ = ١٦$ $\quad\therefore س = \frac{١٤}{٣}$

$\therefore م.ح = \left\{\frac{١٤}{٣}\right\}$

٧ $\because س^{\frac{٤}{٣}} - ٥ \times س^{\frac{٢}{٣}} + ٤ = ٠$ $\quad\therefore (س^{\frac{٢}{٣}} - ١)(س^{\frac{٢}{٣}} - ٤) = ٠$

$\therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ١$ ومنها $س = \pm ١^{\frac{٣}{٢}} = \pm ١$

أ، $س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$ ومنها $س = \pm ٤^{\frac{٣}{٢}} = \pm (٢^{٢})^{\frac{٣}{٢}} = \pm ٢^{٣} = \pm ٨$

$\therefore م.ح = \{١ ، -١ ، ٨ ، -٨\}$

حل آخر: نفرض $س^{\frac{٢}{٣}} = ل$ $\quad\therefore ل^{٢} - ٥ل + ٤ = ٠$

$\therefore (ل - ٤)(ل - ١) = ٠$ $\quad\therefore ل = ٤$ $\quad\therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$

$\therefore س = \pm \sqrt{٤^{٣}} = \pm ٨$ $\quad$ أ، $ل = ١$ $\quad\therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ١$

$\therefore س = \pm \sqrt{١^{٣}} = \pm ١$ $\quad\therefore م.ح = \{١ ، -١ ، ٨ ، -٨\}$

المعادلة الأسية

هى معادلة تتضمن متغيرًا (مجهولًا) فى الأس مثل ($٢^{س + ١} = ٨$)

قوانين المعادلة الأسية

لكل م ، ن ∈ ص ، أ ، ب ∈ ح − {−١ ، ٠ ، ١} نجد أن :

١ إذا كان : $أ^{ن} = ١$ فإن : ن = صفر

٢ إذا كان : $أ^{م} = أ^{ن}$ فإن : م = ن

٣ إذا كان : $أ^{ن} = ب^{ن}$

- وكان ن عددًا فرديًا فإن أ = ب
- وكان ن عددًا زوجيًا فإن أ = ± ب
- وكان أ ≠ ب فإن ن = صفر

مثال ٤

أوجد قيمة س التى تحقق كلاً من المعادلات الآتية :

١ $٢^{س + ٥} = ٨$ ٢ $٣^{س^٢ - ٤} = ١$ ٣ $٤^{س + ٢} = س^{س + ٢}$

٤ $٤^{س - ٣} = ٣^{٢س - ٦}$ ٥ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|س - ٥|} = \left(٣\frac{٣}{٨}\right)^{-٢}$

الحل

١ ∵ $٢^{س + ٥} = ٨$ ∴ $٢^{س + ٥} = ٢^٣$

∴ س + ٥ = ٣ ∴ س = −٢

٢ ∵ $٣^{س^٢ - ٤} = ١$ ∴ $س^٢ - ٤ = ٠$

∴ س = ± ٢

٣ ∵ $٤^{س + ٢} = س^{س + ٢}$ ∴ إما س = ± ٤

أ، س + ٢ = ٠ ومنها س = −٢ ∴ س ∈ {−٢ ، ٤ ، −٤}

٤ ∵ $٤^{س - ٣} = ٣^{٢س - ٦}$ ∴ $٤^{س - ٣} = ٣^{٢(س - ٣)}$

∴ $٤^{س - ٣} = ٩^{س - ٣}$ ∵ ٤ ≠ ٩

∴ س − ٣ = ٠ ومنها س = ٣

٥ ∵ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|س - ٥|} = \left(\frac{٢٧}{٨}\right)^{-٢}$ ∴ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|س - ٥|} = \left(\left(\frac{٣}{٢}\right)^٣\right)^{-٢}$

∴ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|س - ٥|} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{-٦} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^٦$ ∴ |س − ٥| = ٦

∴ س − ٥ = ± ٦

∴ إما س − ٥ = ٦ أ، س − ٥ = −٦

ومنها س = ١١ | ومنها س = −١

مثال ٥

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ $٢^س \times ٥^{-س} = \frac{١٢٥}{٨}$ ٢ $\left(٣\sqrt{٣}\right)^{س + ١} = ٢٧$

٣ $٢^س \times \sqrt[٣]{٤} = \left(\sqrt[٣]{١٦}\right)^{-١}$ ٤ $٤^{س^٢ - ١} = ٨^{-س}$

الحل

١ ∵ $٢^س \times ٥^{-س} = \frac{١٢٥}{٨}$ ∴ $\frac{٢^س}{٥^س} = \left(\frac{٥}{٢}\right)^٣$

∴ $\left(\frac{٢}{٥}\right)^س = \left(\frac{٢}{٥}\right)^{-٣}$ ∴ س = −٣ ∴ مجموعة الحل = {−٣}

[٢] $\because (٣\sqrt{٣})^{س+١} = ٢٧$ $\therefore (٣ \times ٣^{\frac{١}{٢}})^{س+١} = ٣^٣$

$\therefore (٣^{\frac{٣}{٢}})^{س+١} = ٣^٣$ $\therefore ٣^{\frac{٣}{٢}(س+١)} = ٣^٣$

$\therefore \frac{٣}{٢}(س+١) = ٣$ $\therefore س + ١ = ٣ \times \frac{٢}{٣} = ٢$

$\therefore س = ١$ $\therefore$ مجموعة الحل = $\{١\}$

[٣] $\because ٢^س \times ٤^{\frac{١}{٣}} = (١٦)^{-\frac{١}{٣}}$ $\therefore ٢^س \times (٢^٢)^{\frac{١}{٣}} = (٢^٤)^{-\frac{١}{٣}}$

$\therefore ٢^س \times ٢^{\frac{٢}{٣}} = ٢^{-\frac{٤}{٣}}$ $\therefore ٢^{س+\frac{٢}{٣}} = ٢^{-\frac{٤}{٣}}$

$\therefore س + \frac{٢}{٣} = -\frac{٤}{٣}$ $\therefore س = -٢$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{-٢\}$

[٤] $\because ٤^{س^٢-١} = ٨^{-س}$ $\therefore (٢^٢)^{س^٢-١} = (٢^٣)^{-س}$

$\therefore ٢^{٢س^٢-٢} = ٢^{-٣س}$ $\therefore ٢س^٢ - ٢ = -٣س$

$\therefore ٢س^٢ + ٣س - ٢ = ٠$ $\therefore (٢س - ١)(س + ٢) = ٠$

$\therefore ٢س - ١ = ٠$ ومنها $٢س = ١$ $\therefore س = \frac{١}{٢}$

أ، $س + ٢ = ٠$ $\therefore س = -٢$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٢} ، -٢\}$

مثال ٦

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

[١] $٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ٥$ [٢] $٥^س + \frac{١٢٥}{٥^س} = ٣٠$ [٣] $٩^س + ٣^{س+١} = ١٨$

الحــل

[١] بأخذ $٢^{س-١}$ عامل مشترك $\therefore ٢^{س-١}(٢^٢ + ١) = ٥$

$\therefore ٢^{س-١}(٤ + ١) = ٥$ $\therefore ٢^{س-١} = ١$

$\therefore س - ١ =$ صفر $\therefore س = ١$ $\therefore$ مجموعة الحل = $\{١\}$

حل آخر : $٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ٥$ $\therefore ٢^س \times ٢ + ٢^س \times ٢^{-١} = ٥$

$\therefore ٢^س [٢ + \frac{١}{٢}] = ٥$ $\therefore ٢^س \times \frac{٥}{٢} = ٥$

$\therefore ٢^س = ٢$ $\therefore س = ١$ $\therefore$ مجموعة الحل = $\{١\}$

[٢] بضرب الطرفين × $٥^س$ $\therefore ٥^{٢س} + ١٢٥ = ٣٠ \times ٥^س$

$\therefore ٥^{٢س} - ٣٠ \times ٥^س + ١٢٥ = ٠$

وبالتحليل : ∴ $(٥^{س} - ٥)(٥^{س} - ٢٥) = ٠$

∴ إما $٥^{س} - ٥ = ٠$ ، أ $٥^{س} - ٢٥ = ٠$

∴ $٥^{س} = ٥$ | ∴ $٥^{س} = ٥^{٢}$

∴ $س = ١$ | ∴ $س = ٢$

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}

حل آخر :

بوضع $٥^{س} = ص$

∴ $ص + \frac{١٢٥}{ص} = ٣٠$ وبضرب الطرفين فى ص

∴ $ص^{٢} - ٣٠ ص + ١٢٥ = ٠$

∴ $(ص - ٥)(ص - ٢٥) = ٠$

∴ $ص = ٥$ أ، $ص = ٢٥$

∴ $٥^{س} = ٥$ ∴ $س = ١$

أ، $٥^{س} = ٥^{٢}$ ∴ $س = ٢$

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}

٣ ∵ $٣^{٢س} + ٣ \times ٣^{س} - ١٨ = ٠$

∴ $(٣^{س} - ٣)(٣^{س} + ٦) = ٠$

∴ إما $٣^{س} - ٣ = ٠$ ∴ $٣^{س} = ٣$

∴ $س = ١$

أ، $٣^{س} + ٦ = ٠$

∴ $٣^{س} = -٦$ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {١}

تمارين 7

على الأسس الكسرية والمعادلات الأسية



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $أ^{م} \times أ^{م} =$ ....

(أ) $أ^{٢م}$ (ب) $أ^{م^٢}$ (ج) $٢ أ^{م}$ (د) $م أ^{٢}$

(٢) إذا كان : $٣^{س - ٥} = ٩$ فإن : س = ...

(أ) -٧ (ب) -٣ (ج) ٢ (د) ٧

(٣) $٣^{س + ٥} = \frac{١}{٢٧}$ فإن : س = ...

(أ) -٣ (ب) ٨ (ج) -٨ (د) ٣

(٤) إذا كان : $٥^{س - ٣} = ٤^{٣ - س}$ فإن : س = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) ٣ (ج) صفر (د) ١

(٥) مجموعة حل المعادلة : $٥^{س^٢ - ٤} = ٧^{س^٢ - ٤}$ هي ....

(أ) $\{٢\}$ (ب) $\{-٢\}$ (ج) $\{٢ ، -٢\}$ (د) $\{صفر\}$

(٦) إذا كانت : $٢^{س + ١} = ٥^{س + ١}$ فإن : $٣^{س + ١} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) -١ (د) ٣

(٧) $\sqrt[٥]{أ^٣} \times \sqrt{أ^٣} =$ ....

(أ) $\sqrt[٧]{أ^٢}$ (ب) $\sqrt[٧]{أ^٦}$ (ج) $\sqrt[٥]{أ^{١٤}}$ (د) $أ^٢ \sqrt[١٠]{أ}$

(٨) إذا كان : $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س - ٢} = \frac{٨}{٢٧}$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

(٩) إذا كان : $٢^{|س|} = ٣٢$ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) -٥ (ج) ± ٥ (د) ١٠

(١٠) إذا كان : $٢^{س} = ٤^{ص} = ٦٤$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٩

(١١) إذا كان : $\left(\frac{١}{٢}\right)^{أ^٢ - أ - ٢} = ١$ حيث أ > صفر فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) -٣ (ج) ٢ (د) ٣

(١٢) مجموعة حل المعادلة : $٧^{س^٢} = ٤٩^{س + ٤}$ هو ....

(أ) $\{-٢\}$ (ب) $\{-٢ ، ٤\}$ (ج) $\{-٢ ، ٣\}$ (د) $\{٢ ، -٤\}$

(١٣) إذا كان : $٣^{س} = ٢$ ، $٢^{ص} = ٩$ فإن : س ص = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) ١٨

(١٤) إذا كان : $٥^{س} = ٢$ فإن : $٢٥^{س}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ٦٢٥ (جـ) ٤ (د) ٢

(١٥) إذا كان : $٢^{س} = ٥$ فإن : $٢^{س + ٢}$ = ...

(أ) ١٥ (ب) ٤ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(١٦) إذا كان : $س^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$ فإن : س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

(١٧) إذا كانت : $س^{\frac{٢}{٥}} = ٤$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ± ٤ (د) ± ٣٢

(١٨) إذا كان : $\sqrt[٣]{س^{٢}} = ٩$ فإن : س ∈ ....

(أ) {٢٧} (ب) {٢٧ ، −٢٧} (جـ) {١} (د) ∅

(١٩) إذا كان : $س^{-\frac{٣}{٢}} = ٨$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $-\frac{١}{٤}$

(٢٠) $(١٢٨)^{\frac{-٢}{٧}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٤

(٢١) $(٦٤)^{-\frac{١}{٦}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $-\frac{١}{٢}$

(٢٢) $\sqrt[٣]{س^{-٣}}$ = ...

(أ) $س^{-١}$ (ب) − س (جـ) $|س^{-١}|$ (د) − |س|

(٢٣) إذا كان : $٢ \times ٤^{س - ٣} = ١٦$ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) $٤\frac{١}{٢}$ (د) $-١\frac{١}{٢}$

(٢٤) $\frac{٦^{-\frac{١}{٥}} \times ٦^{\frac{٢}{٥}}}{\sqrt[٥]{٣٦}}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٦ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\sqrt{٦}$

(٢٥) إذا كان : س ، ص ∈ ح فإن : $\sqrt{س^{٢} ص^{٦}}$ = ...

(أ) $س ص^{٣}$ (ب) $|س ص^{٣}|$ (جـ) $\frac{١}{٢} س^{٢} ص^{٦}$ (د) $\pm س ص^{٣}$

(٢٦) $\sqrt[٤]{س^{٤} ص^{٨}}$ = ...

(أ) $س ص^{٢}$ (ب) $|س| ص^{٢}$ (جـ) $\pm س ص^{٢}$ (د) $س |ص^{٢}|$

(٢٧) إذا كان : $٢^{س - ١} = ٤٤$ فإن : $٢^{س - ٢} =$ ....

(أ) ١٨ (ب) ٢٢ (جـ) ١٠ (د) ١٦

(٢٨) إذا كان : $س^{\frac{٥}{٣}} ÷ ٢ ص^{\frac{٤}{٣}} = ٣٢$ فإن : س + ص = ...

(أ) ١٦ (ب) صفر (جـ) ١٦ ، −١٦ (د) صفر ، ١٦

(٢٩) مجموعة حل المعادلة : $٣^{س + ١} + ٣^{س} = ١٢$ فى ح هى ....

(أ) {٠} (ب) {٣} (جـ) {١} (د) {١ ، ٠}

(٣٠) مجموعة حل المعادلة : $٣^{س} + ٣^{٣ - س} = ١٢$ هى ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {٠ ، ٣} (جـ) {٣ ، ٤} (د) {−١ ، −٢}

(٣١) مجموعة حل المعادلة : $\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٣ \sqrt[٣]{س} + ٢ = ٠$ هى ....

(أ) {١ ، ٨} (ب) {٩ ، ٣} (جـ) {٨} (د) {١}

(٣٢) مجموعة حل المعادلة : $٩^{س} - ٣٠ \times ٣^{س - ١} + ٩ =$ صفر هى ....

(أ) {٠ ، ١} (ب) {١ ، ٢} (جـ) {٠ ، ٢} (د) {٠ ، ٣}

(٣٣) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة $س^{ن} = أ$ حيث ن عدد فردى هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ن

(٣٤) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة : $س^{٦} = أ$ ، أ > ٠ هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٣٥) المعادلة : $س^{٣} = ٤$ عدد جذورها يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٦) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة : $س^{٤} = -١٦$ هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣٧) مجموعة الجذور الحقيقية للمعادلة : $(س - ٢)^{٤} = ١٦$ هى ....

(أ) {٠} (ب) {٤} (جـ) {٨} (د) {٠ ، ٤}

(٣٨) مجموعة حل المعادلة : $(س - ٣)^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢$ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {١١} (جـ) {١١ ، −٥} (د) {−١١ ، ١١}

(٣٩) أى مما يأتى لا يساوى ($\sqrt[٥]{س^{٤}}$) ؟

(أ) $\left(\sqrt[٥]{س}\right)^{٤}$ (ب) $\sqrt[٤]{س^{٥}}$ (جـ) $س^{\frac{٤}{٥}}$ (د) $\left(س^{\frac{١}{٥}}\right)^{٤}$

(٤٠) إذا كان : أ < ٠ < ب < حـ فأى من الأعداد الآتية لا ينتمى إلى ح ؟

(أ) $\sqrt[٣]{أ ب}$ (ب) $\sqrt[٤]{ب حـ}$ (جـ) $\sqrt[٥]{أ ب + حـ}$ (د) $\sqrt[٦]{أ حـ}$

(٤١) إذا كان: $٣^{س-٢} = \sqrt[٤]{٢٧}$ فإن: س = ...

(أ) $\frac{١١}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ٦

(٤٢) إذا كان: $٢^{س} = ٢٠$ ، ن < س < ن + ١ ، ن عدد صحيح فإن: ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٤٣) إذا كان: $٢^{س} =$ أ ، $٣^{س} =$ ب ، $٥^{س} =$ جـ فإن: $(٩٠)^{س} =$ ....

(أ) أ ب جـ (ب) $أ^{٢}$ ب جـ (جـ) أ $ب^{٢}$ جـ (د) أ + ٢ب + جـ

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اكتب كلاً مما يأتى على صورة أسية :

(١) $\sqrt[٤]{أ^{٣}}$ (٢) $٢\sqrt[٣]{ن}$ (٣) $\sqrt[٤]{أ^{٢} ب^{٣}}$

(٤) س $\sqrt[٣]{س}$ (٥) $\frac{\sqrt[٣]{س}}{\sqrt[٥]{س^{٣}}}$ (٦) $\frac{أ^{٣}}{\sqrt{أ}}$

٢ اكتب كلاً مما يأتى على صورة جذرية :

(١) $أ^{\frac{١}{٢}}$ (٢) $ب^{\frac{٢}{٣}}$ (٣) $٥ أ^{\frac{٤}{٥}}$

(٤) $٨ ب^{\frac{٤}{٩}}$ (٥) $(٣س)^{-\frac{٢}{٣}}$ (٦) $س^{\frac{١}{٢}} \times س^{\frac{١}{٣}}$

٣ إذا كانت $س^{ن} =$ أ فأوجد قيم س فى ح (إن وجدت) فى كل من الحالات الآتية :

(١) ن = ٥ ، أ = ٠ (٢) ن = ٤ ، أ = ٨١

(٣) ن = ٢ ، أ = -٤ (٤) ن = ٣ ، أ = -٨

٤ أوجد فى أبسط صورة كلاً مما يأتى :

(١) $\left(\frac{١٦}{٦٢٥}\right)^{-\frac{٣}{٤}}$ (٢) $\sqrt[٣]{(-٨)^{٢}}$ (٣) $\left(\sqrt[٣]{١٠^{٢}}\right)^{-\frac{٣}{٢}}$

(٤) $\sqrt[٤]{\left(٢ - \sqrt{٣}\right)^{٤}}$ (٥) $\sqrt[٦]{\left(١ - \sqrt{٧}\right)^{٦}}$ (٦) $\sqrt[٥]{\left(٢ - \sqrt{٥}\right)^{٥}}$

(٧) $\sqrt[٥]{٢٤٣} + \sqrt[٩]{٥١٢}$ (٨) $(٢٧)^{\frac{٢}{٣}} - (٦٤)^{\frac{٥}{٦}}$ (٩) $(١٦)^{\frac{٣}{٢}} \div (٨)^{\frac{٢}{٣}}$

(١٠) $\sqrt{١٦ س^{٢}}$ (١١) $\sqrt[٥]{-٣٢ س^{٥}}$ (١٢) $-\sqrt[٣]{٨ أ^{٦} ب^{٩}}$

(١٣) $\pm\sqrt{٦٤ (أ^{٢} + ٣)^{٦}}$ (١٤) $\sqrt[٤]{٨١ أ^{١٢}}$ (١٥) $\sqrt[٧]{١٢٨ (أ + ب)^{٧}}$

٥ أوجد فى أبسط صورة ناتج كل من العمليات الآتية :

① 📖 $\left(أ^{-\frac{٢}{٣}}\right)^{-٣}$

② 📖 $\sqrt[٣]{س} \times س^{\frac{١}{٢}}$

③ $\left(س^{\frac{١}{٢}} - س^{-\frac{١}{٢}}\right)\left(س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}\right)$

④ $\left(أ^{\frac{١}{٣}} - ب^{\frac{١}{٣}}\right)\left(أ^{\frac{٢}{٣}} + أ^{\frac{١}{٣}} ب^{\frac{١}{٣}} + ب^{\frac{٢}{٣}}\right)$

⑤ 📖 $\left(س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}\right)^{٢}$

⑥ 📖 $\frac{\sqrt{أ}}{أ \sqrt[٣]{أ}}$

---

٦ اختصر لأبسط صورة :

① $\frac{٦^{٢} \times ٩^{٢} \times ٨}{(١٢)^{٢} \times ٣^{٥}}$ «$\frac{٢}{٣}$»

② $\frac{٦^{٤ن} \times (٣٠)^{-٢ن} \times ٢^{٢ن}}{(١٨)^{٢ن} \times (١٥)^{-٢ن}}$ «$٢^{٢ن}$»

③ 📖 $\frac{(٢٧)^{-٣} \times (١٢)^{٢}}{١٦ \times (٨١)^{-٢}}$ «٣»

④ $\frac{٩^{٤ن+١} \times ٤^{٢-٢ن}}{٣^{٩ن+١} \times ٤٨^{١-ن}}$ «١»

⑤ 📖 $\frac{١٦^{س-\frac{١}{٤}} \times ٩^{س+\frac{١}{٢}}}{٨^{س-١} \times ١٨^{س+٢}}$ «$\frac{١}{٢٧}$»

⑥ $\frac{٢٥}{٢٧} \times \left(\frac{١}{٢٥}\right)^{\frac{١}{٢}} \times (٨١)^{\frac{٣}{٤}}$ «٥»

⑦ 📖 $(١٢٥)^{\frac{٢}{٣}} \times (٨١)^{\frac{١}{٤}} \times (١٥)^{-١}$ «٥»

⑧ 📖 $\frac{٨^{\frac{٣}{٨}} \times ٤^{-\frac{٣}{١٦}}}{٢^{-\frac{٥}{٤}}}$ «٤»

---

٧ أثبت أن :

① 📖 $\frac{٢^{س} \times ٩^{س+١}}{٣ \times ١٨^{س}} = ٣$

② $\frac{(٣٤٣)^{٢س-\frac{١}{٣}} \times (٤)^{٣س+١}}{(١٩٦)^{٣س} \times ٤} = \frac{١}{٧}$

---

٨ 📖 اكتشف الخطأ :

① $\sqrt[٤]{س^{٤}} = س$

② إذا كان : $س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$ فإن : $س = ٨$

---

٩ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① 📖 $س^{٢} = ٣٦$

② 📖 $س^{٢} = -٤٩$

③ 📖 $س^{٣} = ١٢٥$

④ 📖 $س^{٥} = -٣٢$

⑤ 📖 $س^{٧} = -١٢٨$

⑥ 📖 $س^{٤} = ١٢٩٦$

⑦ 📖 $س^{-٤} = \frac{١}{١٦}$

⑧ $س^{\frac{٧}{٢}} = ١٢٨$

⑨ $س^{-\frac{٥}{٢}} = \sqrt[٣]{٣٢}$

⑩ 📖 $٣ س^{-\frac{٣}{٤}} = \frac{٣}{٨}$

⑪ $\sqrt{س^{-٥}} = ٢٤٣$

⑫ $\sqrt[٣]{س^{٢}} = \frac{١}{٢٥}$

⑬ 📖 $(س + ١)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$

⑭ 📖 $(س - ٥)^{\frac{٥}{٢}} = ٣٢$

⑮ 📖 $\sqrt[٣]{(س - ١)^{٥}} = ٣٢$

⑯ $(٢ س + ٣)^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$

⑰ $\left(\sqrt{س} + ٢\right)^{\frac{١}{٢}} = ٣$

⑱ $س^{\frac{٤}{٥}} - ٥ س^{\frac{٢}{٥}} + ٤ = ٠$

---

١٠ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① 📖 $٣^{س+٤} = ٩$ «$\{-٢\}$»

② 📖 $٢^{س-٥} = \frac{١}{٣٢}$ «$\{٠\}$»

③ $٧^{س-٢} = ١$ «$\{٢\}$»

④ 📖 $٤^{١-س} = \frac{١}{٤}$ «$\{٢\}$»

⑤ $٥^{س+٣} = ٤^{س+٣}$ «{−٣}»	⑥ $٥^{س+٢} = س^{س+٢}$ «{٥ ، −٢}»
⑦ $٢ \times ٣^{س-٢} = ٥٤$ «{٥}»	⑧ $٢^{٣س-٦} = ٥^{س-٢}$ «{٢}»
⑨ $٢^{س^٢-٩} = ١$ «{٣ ، −٣}»	⑩ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢س-١} = \frac{٢٧}{١٢٥}$ «{٢}»
⑪ $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{س-٢} = \frac{٨}{٢٧}$ «{−١}»	⑫ $٢^{س} \times ٥^{-س} = \frac{٤}{٢٥}$ «{٢}»
⑬ $\left(\sqrt{٧}\right)^{\lvert س+٢ \rvert} = ٤٩$ «{٢ ، −٦}»	⑭ $٥^{س^٢} = ٢٥^{س+٤}$ «{−٢ ، ٤}»

١١ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $٣^{س} + ٣^{١+س} = ٣٦$ «{٢}»	② $٥^{س+١} + ٥^{س-١} = ٢٦$ «{١}»
③ $٣^{س+٣} - ٣^{س+٢} = ١٦٢$ «{٢}»	④ $٢^{٣س+١} - ٢^{٣س-٢} = ٥٦$ «{$\frac{٥}{٣}$}»
⑤ $٩^{س} - ٣ \times ٣^{س} = ٠$ «{١}»	⑥ $٢^{س} + ٢^{٥-س} = ١٢$ «{٢ ، ٣}»
⑦ $٢^{س} + \frac{٨}{٢^{س}} = ٦$ «{١ ، ٢}»	⑧ $٤^{س} + ٢^{س+١} = ٨$ «{١}»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $\sqrt{٢} \times \sqrt[٣]{٣} = \sqrt[٦]{س}$ فإن : س = ...

(أ) ٢٧ (ب) ٤٨ (جـ) ٧٢ (د) ١٠٨

② العدد ($٥^{س+١} + ٥^{س}$) يقبل القسمة على .... لجميع قيم س الطبيعية.

(أ) ٧ (ب) ٦ (جـ) ١٣ (د) ١٧

③ إذا كان : $٣^{أ} = ٤^{ب}$ فإن : $٩^{\frac{أ}{ب}} + ١٦^{\frac{ب}{أ}} = $ ....

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

④ إذا كان : $٢^{أ} = ٣$ ، $٣^{ب} = ٧$ ، $٧^{جـ} = ١١$ فإن : $٢^{أبجـ} = $ ....

(أ) ١١ (ب) ٢٧ (جـ) ٢١ (د) ٢٣١

⑤ إذا كانت : س ∈ ح* ، ن عدد صحيح زوجى فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) $س^{ن} > ٠$ (ب) $س^{ن} < ٠$ (جـ) $س^{ن} \leq ٠$ (د) $س^{ن} = ٠$

⑥ المعادلة : $س^{\frac{٢}{٣}} = أ$ يكون لها حل فى ح إذا كان ....

(أ) أ ∈ ح (ب) أ ∈ $ح^{+}$ (جـ) أ ∈ $ح^{-}$ (د) أ ∈ $ح^{+} \cup \{٠\}$

نشاط

استخدم الآلة الحاسبة فى تبسيط إجراء كل من العمليتين الآتيتين (مقربًا الناتج لرقمين عشريين) :

① $٧٥ \, (١,٢١)^{\frac{١٩}{٣}}$

② $\frac{\sqrt[٥]{٢^{-١}} \times \sqrt[٣]{٧^{-٢}}}{\sqrt{٤^{-٣}}}$

الدرس

2

الدالة الأسية وتطبيقاتها

تعريف

إذا كان : أ ∈ $ح^{+}$ − {١} فإن الدالة د : ح ⟵ $ح^{+}$ حيث د (س) = $أ^{س}$ تسمى دالة أسية أساسها أ

فمثلًا :

- د : د (س) = $٣^{س}$ دالة أسية أساسها ٣ وأسها س
- د : د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س + ١}$ دالة أسية أساسها $\frac{١}{٢}$ وأسها (س + ١)

ملاحظة

لاحظ الفرق بين الدالة الجبرية والدالة الأسية :

- فى الدالة الجبرية يكون المتغير المستقل س موجود كأساس فى قاعدة الدالة أما الأس فهو عدد حقيقى.

مثل : د : د (س) = $س^{٢}$ − ٣ س + ١ أو د : د (س) = $(س − ٣)^{٣}$ أو ...

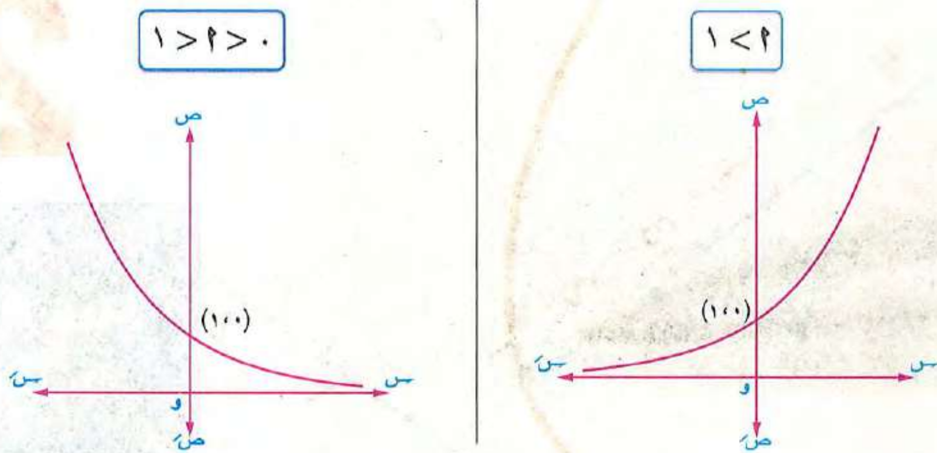
- فى الدالة الأسية يكون المتغير المستقل س موجود كأس فى قاعدة الدالة أما الأساس فهو عدد حقيقى موجب لا يساوى الواحد.

فمثلًا : د : د (س) = $٣^{س}$ أو د : د (س) = $٣^{س − ١}$ + ٢ دوال أسية

أما د : د (س) = $(-٣)^{س}$ أو د : د (س) = $(١)^{س}$ ليست دوال أسية

التمثيل البيانى للدالة الأسية

الشكل العام لمنحنى الدالة د : د (س) = $ا^{س}$ كما هو موضح بالشكلين التاليين :

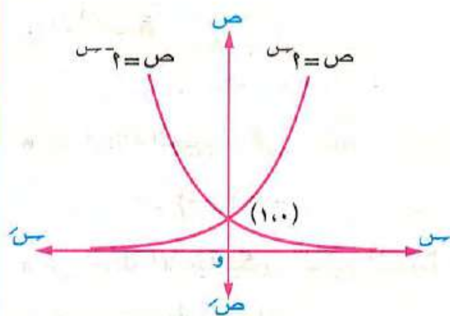


بعض خواص الدالة الأسية د : د (س) = $ا^{س}$

- مجالها ح
- مداها $ح^{+}$ ويقع منحناها بأكمله فوق محور السينات.
- الدالة تزايدية على مجالها ح إذا كان ا > ١ وتسمى دالة نمو أسى معامله ا ومنحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما قلت قيمة س .
- الدالة تناقصية على مجالها ح إذا كان ٠ < ا < ١ وتسمى دالة تضاؤل أسى معامله ا ومنحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما زادت قيمة س
- منحنى الدالة الأسية يمر بالنقطة (٠ ، ١)
- إذا كانت : د (س) = $ا^{س}$

فإن : د (−س) = $ا^{-س}$ = $\left(\frac{١}{ا}\right)^{س}$

ويكون المنحنى ص = $\left(\frac{١}{ا}\right)^{س}$ صورة المنحنى ص = $ا^{س}$ بالانعكاس فى محور الصادات.



مثال ١

ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ $ح^{+}$ ، د (س) = $٢^{س}$ متخذاً س ∋ [−٣ ، ٤]

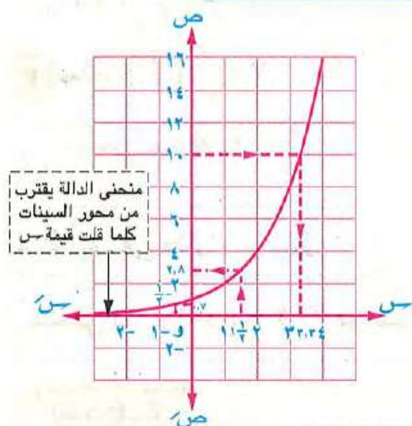
ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل من :

١ د (١,٥) ، د $\left(-\frac{١}{٢}\right)$ ٢ قيمة س عندما د (س) = ١٠

الحـــل

نكون الجدول الآتى :

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣	٤
ص = ٢^س	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨	١٦



١ إيجاد قيمة د (١,٥) :

عند س = ١,٥ نرسم مستقيمًا

يوازى محور الصادات ليقابل

المنحنى فى نقطة ثم نقرأ قيمة ص

المناظرة على محور الصادات

فنجدها ٢,٨ تقريبًا.

∴ د (١,٥) ≃ ٢,٨

وبالمثل د $\left(-\frac{١}{٢}\right)$ ≃ ٠,٧

لاحظ أن

د (س) = ٢^س دالة نمو أسى حيث ٢ > ١

٢ إيجاد قيمة س عندما د (س) = ١٠ أى عندما ٢^س = ١٠

∴ عند ص = ١٠ نرسم مستقيمًا يوازى محور السينات يقابل المنحنى فى نقطة

ثم نقرأ قيمة س المناظرة على محور السينات فنجدها ٣,٣ تقريبًا.

∴ عندما ٢^س = ١٠ تكون س ≃ ٣,٣

مثال ٢

ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح⁺ ، د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ متخذًا س ∈ [-٤ ، ٣]

ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل مما يأتى :

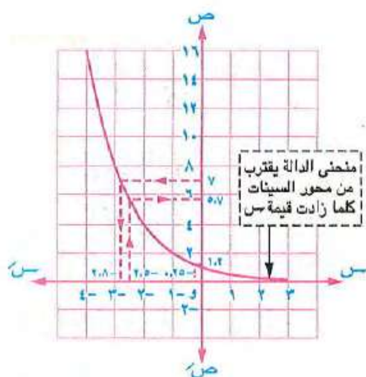
١ د (-٢,٥) **٢** $\sqrt[٤]{٢}$ **٣** س عندما $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ = ٧

الحـــل

نكون الجدول الآتى :

س	٤-	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$	١٦	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

* ومن الرسم نجد أن :



١ د (− ٢,٥) ≃ ٥,٧

٢ ∵ $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} = (2^{-1})^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} =$ د $\left(-\frac{1}{4}\right)$

∴ د $\left(-\frac{1}{4}\right) \simeq 1,2$

٣ عندما $\left(\frac{1}{2}\right)^{س} = 7$

∴ س ≃ − ٢,٨

لاحظ أن

د (س) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$ دالة تضاؤل أسى حيث ٠ < أ < ١

لاحظ أنه : فى مثال ١ ، مثال ٢ :

منحنى د : د (س) = ٢ ^س^ هو صورة منحنى الدالة د : د (س) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$ بالانعكاس فى محور الصادات.

ملاحظة

إذا كانت : د (س) = أ ^س^ فإن المنحنى : ص = د (س + ب)

أى ص = أ ^س + ب^ يمثله بيانيًا المنحنى : ص = أ ^س^ بإزاحة أفقية مقدارها |ب|

• فى اتجاه و س← إذا كان ب < ٠ • فى اتجاه و س′← إذا كان ب > ٠

مثال ٣

مثل الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ثم أوجد المجال والمدى لكل منهما وبين أيًا منهما تزايدية وأيًا منهما تناقصية :

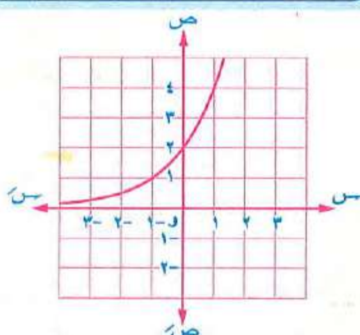
١ ص = ٢ ^س + ١^ ٢ ص = ٣ ^س − ١^

الحل

١

لاحظ أن

المنحنى ص = ٢ ^س + ١^ صورة المنحنى ص = ٢ ^س^ بإزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه و س′

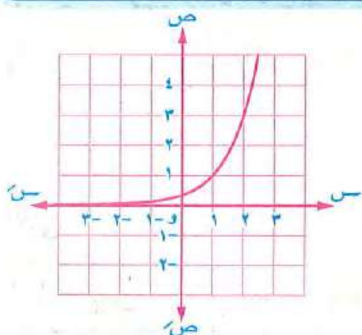


مجال الدالة = ح ، مدى الدالة =]٠ ، ∞[
، الدالة تزايدية على مجالها.

٢

لاحظ أن

المنحنى ص = ٣ ^س − ١^ صورة المنحنى ص = ٣ ^س^ بإزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه و س



مجال الدالة = ح ، مدى الدالة =]٠ ، ∞[
، الدالة تزايدية على مجالها.

حل المعادلات الأسية بيانيًا

يعتمد الحل البيانى للمعادلات الأسية على فرض الطرف الأيمن للمعادلة على أنه دالة أسية د وفرض الطرف الأيسر للمعادلة على أنه أى دالة أخرى ر وبرسم الدالتين د ، ر فى شكل واحد وإيجاد الإحداثى السينى لنقطة (نقط) التقاطع نحصل على مجموعة الحل.

مثال ٤

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : $٢^{س+١} = ٤$

الحل

نفرض أن الطرف الأيمن للمعادلة

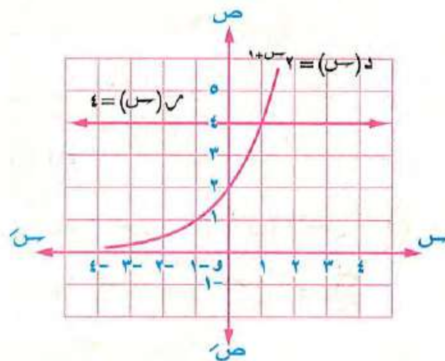
هو قاعدة الدالة د : د (س) = $٢^{س+١}$

والطرف الأيسر هو قاعدة الدالة

ر : ر (س) = ٤

وبرسم الشكل البيانى للدالتين فى شكل واحد

ومن الرسم :



∴ نقطة التقاطع هى (١ ، ٤) ∴ س = ١ ∴ مجموعة الحل = {١}

مثال ٥

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : $٣^{س} = ٢ س + ١$

الحل

نفرض أن الطرف الأيمن للمعادلة هو قاعدة الدالة

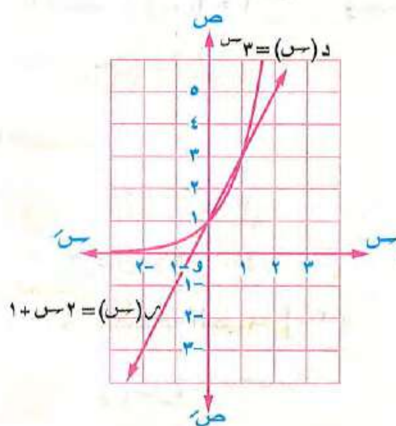
د : د (س) = $٣^{س}$ والطرف الأيسر هو قاعدة الدالة

ر : ر (س) = ٢ س + ١

وبرسم الشكل البيانى للدالتين فى شكل واحد

ومن الرسم : الإحداثيان السينيان لنقطتى التقاطع هما ٠ ، ١

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١}



مثال ٦

إذا كانت د : ح ⟵ ح⁺ ، د (س) = ٣^س فأثبت أن : $\frac{د (س + ٥) + د (س + ٣)}{د (س + ٣) + د (س + ١)} = د (٢)$

الحل

∵ الطرف الأيمن = $\frac{٣^{س+٥} + ٣^{س+٣}}{٣^{س+٣} + ٣^{س+١}} = \frac{٣^{س+٣} (٣^٢ + ١)}{٣^{س+١} (٣^٢ + ١)} = \frac{٣^{س+٣}}{٣^{س+١}} = ٣^٢$

، الطرف الأيسر = د (٢) = $٣^٢$ ∴ الطرفان متساويان.

حل آخر : الطرف الأيمن = $\frac{٣^{س+٥} + ٣^{س+٣}}{٣^{س+٣} + ٣^{س+١}} = \frac{٣^{س} (٣^٥ + ٣^٣)}{٣^{س} (٣^٣ + ٣)} = ٩ = ٣^٢ = د (٢)$

مثال ٧

إذا كانت د (س) = $٥^{س}$ أوجد قيمة س إذا كان : د (٢ س − ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{٢٦}{٢٥}$

الحل

∵ د (٢ س − ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{٢٦}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س-١} + ٥^{٢س+١} = \frac{٢٦}{٢٥}$ ∴ $٥^{٢س-١}(١ + ٥^{٢}) = \frac{٢٦}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س-١} \times ٢٦ = \frac{٢٦}{٢٥}$ ∴ $٥^{٢س-١} = \frac{١}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س-١} = ٥^{-٢}$ ∴ ٢ س − ١ = −٢   ∴ س = $-\frac{١}{٢}$

حل آخر :

∵ د (٢ س − ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{٢٦}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س-١} + ٥^{٢س+١} = \frac{٢٦}{٢٥}$ ∴ $٥^{٢س}(٥^{-١} + ٥) = \frac{٢٦}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س} = ٥^{-١}$ ∴ ٢ س = −١   ∴ س = $-\frac{١}{٢}$

مثال ٨

إذا كانت : د (س) = $٣^{س-٢}$ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ د (س) = $\frac{١}{٨١}$ ٢ د (س − ١) = ٩   ٣ د (٢ س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

الحل

١ ∵ $٣^{س-٢} = \frac{١}{٨١}$ ∴ $٣^{س-٢} = ٣^{-٤}$

∴ س − ٢ = −٤   ومنها س = −٢

∴ مجموعة الحل = {−٢}

٢ ∵ د (س) = $٣^{س-٢}$ ∴ د (س − ١) = $٣^{(س-١)-٢} = ٣^{س-٣}$

∴ $٣^{س-٣} = ٩$ ∴ $٣^{س-٣} = ٣^{٢}$

∴ س − ٣ = ٢   ومنها س = ٥

∴ مجموعة الحل = {٥}

٣ ∵ د (س) = $٣^{س-٢}$ ∴ د (٢ س) = $٣^{٢س-٢}$

∴ $٣^{٢س-٢} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$ ∴ $٣^{٢س-٢} = ٣^{-س}$

∴ ٢ س − ٢ = − س   ∴ ٢ س + س = ٢

∴ ٣ س = ٢   ومنها س = $\frac{٢}{٣}$

∴ مجموعة الحل = $\left\{\frac{٢}{٣}\right\}$

تطبيقات حياتية على النمو والتضاؤل الأسى

١ النمو الأسى

* الدالة د : د (ن) = أ (١ + ر)^ن تستخدم لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية حيث أ القيمة الابتدائية ، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة ، ن الفترة الزمنية.

* ويمكن استنتاج هذه الدالة عند دراسة ظاهرة تزايد السكان على سبيل المثال : فإذا كان عدد سكان إحدى المدن فى أحد الأعوام أ وكان هذا العدد يتزايد سنويًا بنسبة مئوية ثابتة ر فإن عدد السكان بعد عام = أ + ر أ = أ (١ + ر) ، وبعد عامين = أ (١ + ر) + ر أ (١ + ر) = أ (١ + ر)^٢ وهكذا فيكون عدد السكان بعد ن عام = أ (١ + ر)^ن

مثال ٩

اشترى وائل منزلًا بمبلغ ١٣٥٠٠٠٠ جنيه فإذا كان سعر المنزل يزداد بمعدل ٢,٥ ٪ كل سنة :

١ اكتب دالة أسية تمثل سعر المنزل بعد ن سنة من شرائه.

٢ قدِّر لأقرب جنيه سعر المنزل بعد مرور ٦ سنوات من شرائه.

الحل

أ = ١٣٥٠٠٠٠ ، ر = $\frac{٢,٥}{١٠٠}$ = ٠,٠٢٥ ، ن = ٦

١ دالة النمو الأسى د : د (ن) = أ (١ + ر)^ن ∴ د (ن) = ١٣٥٠٠٠٠ (١ + ٠,٠٢٥)^ن

∴ د (ن) = ١٣٥٠٠٠٠ (١,٠٢٥)^ن

٢ بالتعويض عن ن = ٦ ∴ د (٦) = ١٣٥٠٠٠٠ (١,٠٢٥)^٦ ≈ ١٥٦٥٥٨٦ جنيهًا

الربح المركب

* عند حساب الجملة (جـ) لمبلغ (أ) مستثمر فى أحد البنوك التى تعطى ربحًا سنويًا مركبًا (ر) كنسبة مئوية لعدد من السنوات (ن) بفترات تقسيم العائد السنوى إلى (س) فترة فإن جملة المبلغ تعطى بالعلاقة :

جـ = أ $\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

مثال ١٠

أودع رجل مبلغ ١٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٧٪ أوجد جملة هذا المبلغ بعد مرور ١٠ سنوات فى كل من الحالات الآتية :

١ العائد سنوى. ٢ العائد ربع سنوى. ٣ العائد شهرى.

الحـــل

$\because$ ح = أ $(١ + \frac{ر}{س})^{ن س}$

١ $\because$ العائد سنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ١ $\therefore$ س = ١

$\therefore$ ح = ١٥٠٠٠ $(١ + ٠,٠٧)^{١٠}$ ≈ ٢٩٥٠٧,٢٧ جنيه

٢ $\because$ العائد ربع سنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ٤ $\therefore$ س = ٤

$\therefore$ ح = ١٥٠٠٠ $(١ + \frac{٠,٠٧}{٤})^{١٠ × ٤}$ ≈ ٣٠٠٢٣,٩٦ جنيه

٣ $\because$ العائد شهرى أى أن عدد فترات التقسيم = ١٢ $\therefore$ س = ١٢

$\therefore$ ح = ١٥٠٠٠ $(١ + \frac{٠,٠٧}{١٢})^{١٠ × ١٢}$ ≈ ٣٠١٤٤,٩٢ جنيه

٢ التضاؤل الأسى

الدالة د : د (ن) = أ $(١ - ر)^{ن}$ تستخدم لتمثيل التضاؤل الأسىْ حيث أ القيمة الابتدائية ، ر النسبة المئوية للتضاؤل فى الفترة الزمنية الواحدة ، ن الفترة الزمنية.

مثال ١١

يتناقص عدد المرضى بفيروس الالتهاب الكبدى الوبائى ح بمعدل ١٥٪ سنويًا نتيجة اكتشاف علاج له فإذا كان عدد المرضى فى إحدى الدول ٨٠٠٠٠٠٠ مريض فاكتب دالة أسية تمثل عدد المرضى بعد ن سنة من اكتشاف العلاج ثم قدر عدد المرضى بعد ٨ سنوات.

الحـــل

أ = ٨٠٠٠٠٠٠ ، ر = ٠,١٥ ، ن = ٨

الدالة الأسية د : د (ن) = ٨٠٠٠٠٠٠ $(١ - ٠,١٥)^{ن}$ = ٨٠٠٠٠٠٠ $(٠,٨٥)^{ن}$

وعند ن = ٨ فإن عدد المرضى = ٨٠٠٠٠٠٠ $(٠,٨٥)^{٨}$ ≈ ٢١٧٩٩٢٤ مريضًا.

تمـارين 8 على الدالة الأسية وتطبيقاتها


اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا / أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د : د (س) = $أ^{س}$ دالة أسية فإن : أ ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^{+}$ (جـ) $ح^{-}$ (د) $ح^{+} - \{١\}$

(٢) إذا كان : د (س) = $٣^{س + ٢}$ فإن : د (−٢) = ...

(أ) ٣ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ١

(٣) إذا كان : د (س) = $٤^{س - ١}$ فإن : د (س + ١) = ...

(أ) $٤^{س}$ (ب) $٤^{س + ١}$ (جـ) $٤^{س + ٢}$ (د) $٢^{س}$

(٤) إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$ فإن : د (− س) = ...

(أ) $-٢^{س}$ (ب) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ (جـ) $٢^{س + ١}$ (د) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-س}$

(٥) إذا كانت : د (س) = $(٥)^{-س}$ فإن : $\frac{د (س - ١)}{د (س + ١)}$ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) ٢٥ (د) $\frac{١}{٢٥}$

(٦) إذا كانت : د (س − ١) = $٢^{س + ١}$ فإن : د (س) = ...

(أ) $٢^{س}$ (ب) $٢^{س - ١}$ (جـ) $٢^{س + ٢}$ (د) $٢^{س - ٢}$

(٧) إذا كانت : د (س) = $أ^{س}$ فإن : د (س + ١) × د (س − ١) = د (..............)

(أ) ٢ س + ١ (ب) $أ^{٢ س}$ (جـ) ٢ س (د) ٢

(٨) إذا كان : د (س + ١) = $٢^{س}$ وكان : د (أ) = ٨ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٥

(٩) إذا كانت : د (س) = $٣^{س - ٢}$ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س − ١) = ٨١ هي ....

(أ) \{٧\} (ب) \{٥\} (جـ) \{٤\} (د) \{٣\}

(١٠) إذا كان د (س) = $٢^{س}$ فإن مجموعة حل المعادلة : د (٢ س) − د (س + ١) = صفر هي ....

(أ) \{٠\} (ب) \{٠ ، ١\} (جـ) \{١\} (د) \{−١\}

(١١) إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق المعادلة : د (س + ١) − د (س − ١) = ٢٤ هى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) صفر

(١٢) إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق العلاقة :
د (٢ س) − ٢٤ د (س − ١) − د (٢) = ٠ هى ....

(أ) ٢ ، $\frac{١}{٣}$ (ب) ٢ ، صفر (جـ) ٢ (د) ٢ ، −١

(١٣) تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

(١٤) الدالة د حيث د (س) = $أ^{س}$ تكون تناقصية على مجالها ح عندما ....

(أ) أ = ١ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = −١

(١٥) مدى الدالة د : د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ هو ....

(أ)]−∞ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠] (جـ)]٠ ، ∞[(د)]١ ، ∞[

(١٦) إذا كانت د (س) = $٢^{-س}$ فإن : د (س) تكون تناقصية عند س ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^{+}$ (جـ) $ح^{-}$ (د) ∅

(١٧) أى من الدوال الآتية تكون متزايدة على مجالها ؟

(أ) د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ (ب) د (س) = $٣^{-س}$

(جـ) د (س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$ (د) د (س) = $٥^{س}$

(١٨) إذا كان : ن (س) = $\left(\frac{-١}{٢}\right)^{س+١}$ فأنها تعبر عن ....

(أ) دالة أسية أساسها $\left(\frac{-١}{٢}\right)$ (ب) دالة أسية أسها (س + ١)

(جـ) ليست دالة أسية لأن الأساس < ٠ (د) (أ) ، (ب) معًا.

(١٩) إذا كانت د (س) = $٢^{س+١}$ وكانت النقطة (أ ، $\frac{١}{٢}$) ∈ بيان د فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) −٢

(٢٠) إذا كان : د (س) = $أ^{س}$. فإن : ....

(أ) د (س + ص) = د (س) + د (ص) (ب) د (س − ص) = د (س) − د (ص)

(جـ) د (س + ص) = د (س) . د (ص) (د) د (س ص) = د (س) . د (ص)

(٢١) إذا تحرك منحنى الدالة د : د (س) = $٢^{س}$ وحدة واحدة لليسار
فإن الدالة الجديدة هى ر : ر (س) = ...

(أ) $٢^{س+١}$ (ب) $٢^{س-١}$ (جـ) $-٢^{س}$ (د) $-٢^{١-س}$

(٢٢) إذا مر منحنى الدالة د : د (س) = أ^س بالنقطة (١ ، ٣) فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٣

(٢٣) منحنى الدالة د : د (س) = ٣^س هو صورة منحنى الدالة ر : ر (س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$ بالانعكاس فى المستقيم ....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = ٣ س

(٢٤) إذا قطع منحنى الدالة $د_١$ حيث $د_١$ (س) = ٣^س منحنى الدالة $د_٢$ حيث $د_٢$ (س) = ٤ − س فى نقطة (ك ، ٣) فإن مجموعة حل المعادلة ٣^س = ٤ − س تساوى ....

(أ) {١} (ب) {٢} (جـ) {٣} (د) {٤}

(٢٥) منحنيا الدالتين د : د (س) = ٢^س ، ر : ر (س) = ٣^س يتقاطعان عند س = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(٢٦) منحنى الدالة د : د (س) = ٥^س يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (٥ ، ١) (د) (١ ، ٥)

(٢٧) منحنى الدالة د : د (س) = ٢^(س + ٢) يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٠ ، ٢) (جـ) (٠ ، ٤) (د) (٠ ، ٨)

(٢٨) المستقيم ص = ٩ يقطع منحنى الدالة د : د (س) = ٣^س فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٩) (د) (١ ، ٩)

(٢٩) إذا كانت النقطة (أ ، ب) حيث أ ≠ ٠ تقع على منحنى الدالة ص = ٢^س فأى من النقط الآتية تقع على منحنى الدالة ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ ؟

(أ) (أ ، ب) (ب) (−أ ، ب) (جـ) (أ ، −ب) (د) (أ ، $\frac{١}{٢}$ ب)

(٣٠) إذا كانت النقطة (أ ، ب) تقع على منحنى الدالة : ص = ٢^س فأى النقط الآتية تقع على منحنى الدالة ص = ٢^(س + ٣) ؟

(أ) (أ ، ب) (ب) (أ + ٣ ، ب) (جـ) (أ ، ب + ٣) (د) (أ ، ٨ ب)

(٣١) أى من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة نماء أسى ؟

(أ) د (س) = ٢^(−س) (ب) د (س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

(جـ) د (س) = ٣^س (د) د (س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

(٣٢) أى من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة تضاؤل أسى ؟

(أ) د (س) = ٢^س (ب) د (س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{-س}$

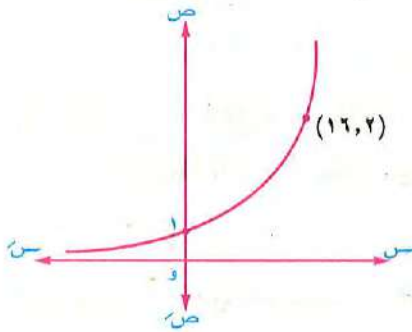
(جـ) د (س) = ٣^س (د) د (س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

(٣٣) أى من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة أسية تزايدية على مجالها ح ؟

(أ) ص = ٣ $(١,٠٥)^{س}$ (ب) ص = ٣ $\left(\frac{١}{١,٠٥}\right)^{س}$

(جـ) ص = ٣ + $(٠,٥)^{س}$ (د) ص = $(٠,٠٥)^{س}$

(٣٤) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = $أ^{س}$



فإن : أ = ...

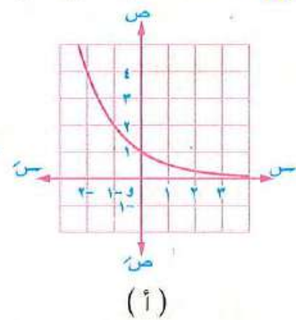
(أ) ٢

(ب) ٣

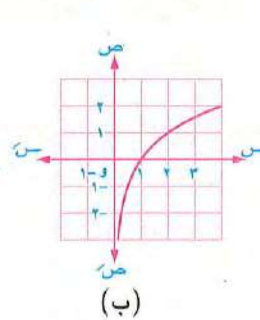
(جـ) ٤

(د) ٩

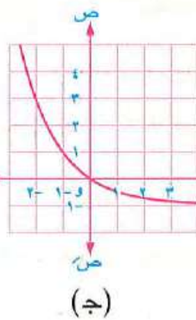
(٣٥) الدالة د حيث د (س) = $٢^{س}$ يمثلها الشكل البيانى ....



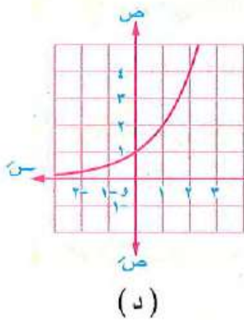
(أ)



(ب)

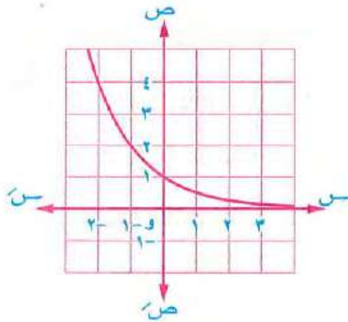


(جـ)



(د)

(٣٦) الشكل المقابل يمثل الدالة د حيث ....



(أ) د (س) = $٢^{س+١}$

(ب) د (س) = $٢^{-س}$

(جـ) د (س) = $٣^{-س}$

(د) د (س) = $٢^{س}$

(٣٧) جملة مبلغ ٥٠٠٠ جنيه موضوع فى بنك يعطى فائدة مركبة سنوية قدرها ٥٪ لمدة ٧ سنوات ≃ .... جنيه.

(أ) ٦٧٥٠ (ب) ٧٠٣٥,٥ (جـ) ٥٣٥٠ (د) ٨٥٠٠

(٣٨) اشترى جلال سيارة بمبلغ ٢٠٠٠٠٠ جنيه فإذا كان سعر السيارة يتناقص بمعدل ٠,٤ ٪ كل سنة ، أى الدوال الآتية يعبر عن سعر السيارة بعد ن سنة ؟

(أ) ص = ٢٠٠٠٠٠ × $(٠,٤)^{ن}$ (ب) ص = ٢٠٠٠٠٠ $(٠,٩٩٦)^{ن}$

(جـ) ص = ٢٠٠٠٠٠ × $(١,٤)^{ن}$ (د) ص = ٢٠٠٠٠٠ $(٠,٢)^{ن}$



ثانيًا الأسئلة المقالية

1 بين أيًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دالة أسية ، ثم اكتب أسها وأساسها :

① د (س) = ٢ $س^{٣}$ | ② د (س) = $\frac{٢}{٣}$ $(٥)^{س}$ | ③ د (س) = $\frac{١}{س - ١}$

④ د (س) = ٣ $س^{٢}$ − ١ | ⑤ د (س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س - ١}$ | ⑥ د (س) = $(-٧)^{س}$

---

2 إذا كانت : د (س) = $٥^{س}$ فأوجد قيمة : $\frac{د (س + ٤) - د (س + ٣)}{د (س + ٥) - د (س + ٤)}$ «$\frac{١}{٥}$»

---

3 إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ فأثبت أن : د (أ) × د (ب) = د (أ + ب)

---

4 إذا كانت : د (س) = $٥^{س + ١}$ فأثبت أن : $\frac{د (س) × د (س - ١)}{د (س - ٢) × د (س + ١)} = ١$

---

5 إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د (س + ١)}{د (س - ١)} + \frac{د (س - ١)}{د (س + ١)} = \frac{١٧}{٤}$

---

6 إذا كانت د (س) = $٢^{س}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

① د (س) = ٨ ② د (س + ١) = $\frac{١}{٣٢}$ «{٣} ، {-٦}»

---

7 إذا كانت د (س) = $٣^{س + ١}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

① د (س) = ٢٧ ② د (س - ١) = $\frac{١}{٩}$ «{٢} ، {-٢}»

---

8 إذا كانت د (س) = $٧^{س - ٢}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

① د (س) = ٣٤٣ ② د (٢ س) = $\frac{١}{٤٩}$ «{٥} ، {٠}»

---

9 إذا كانت : د (س) = $٧^{س + ١}$ فأوجد قيمة س التى تحقق أن :

د (٢ س - ١) + د (س - ٢) = ٥٠ «١»

---

10 إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$

أوجد قيمة س إذا كانت : د (س + ١) + د (س - ١) = ٩٠ «٣»

---

11 إذا كانت : د (س) = $٤^{س}$

فأوجد قيمة س التى تحقق أن : د (س + ١) + د (س - ١) = ٦٨ «٢»

١٢ إذا كانت : $د_{١}(س) = ٣^{س}$ ، $د_{٢}(س) = ٩^{س}$ **فأوجد قيمة س التى تحقق أن :**

$د_{١}(٢س - ١) + د_{٢}(س + ١) = ٧٥٦$ «٢»

---

١٣ إذا كانت : $د(س) = ٧^{س}$ **أوجد قيمة س إذا كانت :**

$د(٢س - ١) + د(٢س + ١) = \frac{٥٠}{٤٩}$ «$-\frac{١}{٢}$»

---

١٤ إذا كانت : $د(س) = ٣^{س - ١}$

فأوجد قيمة س التى تحقق أن : $د(س + ٢) + د(٤ - س) = ٣٠$ «٠ أ، ٢»

---

١٥ إذا كانت : $د(س) = ٢^{س}$

فأوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $د(٢س) - ٦ د(س) + د(٣) = ٠$ «{١ ، ٢}»

---

١٦ إذا كانت : $د(س) = ٣^{س}$ **فأثبت أن :** $\frac{د(٢س + ٢) + د(٢س - ١)}{٥ د(٢س) - ٧ د(٢س - ١)} = \frac{٧}{٢}$

---

١٧ إذا كانت : $د(س) = ٣^{٢س - ١}$ **فأثبت أن :** $\frac{د(س + ١) \times د(س + ٢)}{د(س + ٣)} = د(س)$

---

١٨ مثل الدالة د فى كل مما يأتى بيانيًا ، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها ، وبين أيًا منها تزايدية وأيًا منها تناقصية :

① $د(س) = ٣^{س}$
② $د(س) = ٢^{س}$
③ $د(س) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$
④ $د(س) = ٢^{-س + ١}$
⑤ $د(س) = ٢^{س - ١}$

---

١٩ أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $٣^{س} = ٣$
② $٢^{س + ١} = ٥$
③ $٣^{س} = ٤ - س$
④ $٣^{س + ١} = -س$
⑤ $٢^{س} = \frac{١}{٢} س + ١$
⑥ $٢^{س} = ٢س$

---

٢٠ إذا كانت : د : ح ⟵ $ح^{+}$ حيث $د(س) = ٣^{س - ١}$ ، فارسم منحنى الدالة لكل

س ∈ [-٢ ، ٣] ومن الرسم أوجد :

① $د\left(\frac{٣}{٢}\right)$
② قيمة س عندما $٣^{س - ١} = ٧\frac{١}{٢}$ «١,٧ ، ٢,٨»

تطبيقات على النمو والتضاؤل الأسى

٢١ **الربط بالادخار :** أوجد جملة مبلغ ٨٠٠٠ جنيه موضوع فى بنك يعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٥٪ لمدة ٧ سنوات. «١١٢٥٦,٨ جنيه»

٢٢ الربط بالسكان : إذا كان عدد سكان إحدى الدول فى نهاية عام ٢٠٠٠ هو ٤٣,٣ مليون نسمة وكان معدل الزيادة السكانية فى السنة يساوى ١,٥ ٪

(١) أوجد صيغة تمثل عدد سكان هذه الدولة بعد مرور ن سنة من عام ٢٠٠٠

(٢) استخدم هذه الصيغة لإيجاد عدد السكان المتوقع لهذه الدولة عام ٢٠٢٠ «٥٨,٣ مليون نسمة»

---

٢٣ الربط بالرياضة : يتناقص عدد المشجعين لإحدى فرق كرة القدم بمعدل ٤٪ نتيجة خسارتها فى إحدى الدورات الرياضية ، فإذا كان عدد المشجعين فى أول مباراة ٣٦٤٠٠ فاكتب دالة أسية تمثل عدد الحضور (ص) فى المباراة (ن) ، ثم قدر عدد المشجعين فى المباراة العاشرة. «٢٤٢٠٠ مشجع»

---

٢٤ إذا بلغ أقصى إنتاج لمنجم من الذهب فى السنة ١٨٥٠ كجم وأخذ هذا الإنتاج فى التناقص سنويًا بنسبة ٩ ٪

(١) اكتب دالة أسية تمثل إنتاج الذهب من هذا المنجم بعد ن سنة.

(٢) قدر لأقرب كجم إنتاج المنجم بعد مرور ٨ سنوات. «٨٧٠ كجم»

---

٢٥ **أودع رجل مبلغ ٢٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٧ ٪ أوجد جملة المبلغ بعد مرور ١٠ سنوات فى كل من الحالات الآتية :**

(١) العائد سنوى. (٢) العائد نصف سنوى. (٣) العائد شهرى.

«٣٩٣٤,٣ جنيه ، ٣٩٧٩,٥٨ جنيه ، ٤٠١٩,٣٢ جنيه»

---

٢٦ **إذا كان السعر السوقى لسيارة يتناقص طبقًا للعلاقة س = ١٦٠٠٠٠ $(٠,٩٥)^{ن}$**

حيث س سعر السيارة بالجنيه ، ن الزمن بالسنوات من لحظة شرائها أوجد :

(١) سعر السيارة عند شرائها جديدة.

(٢) سعر السيارة بعد مرور ٥ سنوات من شرائها. «١٦٠٠٠٠ جنيه ، ١٢٣٨٠٤,٩٥ جنيه»

---

٢٧ الربط بالثروة السمكية : إذا كان عدد أسماك السلمون فى إحدى البحيرات يتزايد تبعًا لدالة النمو الأسى د : د (ن) = ٢٠٠ $(١,٠٣)^{ن}$ حيث ن عدد الأسابيع. أوجد عدد أسماك السلمون فى هذه البحيرة بعد مرور ٨ أسابيع. «٢٥٣ سمكة»

---

٢٨ الربط بالسكان : بلغ تعداد سكان إحدى المحافظات فى جمهورية مصر العربية ٤,٦ مليون نسمة بمتوسط زيادة ٤٪ سنويًا.

(١) اكتب دالة أسية تمثل النمو المستقبلى بعد ن سنة.

(٢) قدر عدد سكان هذه المحافظة بعد مرور ٥ سنوات من وقت التعداد. «٥,٦ مليون نسمة»

٢٩ يزداد سعر إحدى السلع المعمرة سنويًا بمقدار ٨ ٪ فإذا كان السعر الأصلى للسلعة ٤٠٠٠ جنيه.

(١) أوجد صيغة توضح بها سعر السلعة بعد مرور ن سنة.

(٢) قدر سعر السلعة بعد مرور ٤ سنوات لأقرب جنيه. «٥٤٤٢ جنيهًا»

---

٣٠ الربط بالاستثمار : إذا استثمر رجل مبلغ مليون جنيه فى مشروع ، بحيث ينمو هذا المبلغ تبعًا لدالة أسية بزيادة سنوية قدرها ٦ ٪ أوجد :

(١) صيغة توضح نماء هذا المبلغ بعد ن سنة.

(٢) قدر هذا المبلغ بعد مرور ١٠ سنوات. «١٧٩٠٨٤٧,٦٩٧ جنيه»

---

٣١ يزداد سعر إحدى السلع المعمرة ١٠٪ سنويًا فإذا كان سعرها الأصلى هو ٢٠٠٠ جنيه.

(١) اكتب صيغة توضح بها سعر السلعة بعد ن سنة.

(٢) بعد كم سنة يصبح سعرها ٢٤٢٠ جنيهًا ؟ «بعد سنتين»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة د : د (س) = (٢ أ)^س تكون متناقصة عندما أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٢[(د)]٠ ، $\frac{1}{2}$[

(٢) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\left(\frac{أ}{3}\right)^{س}$ دالة أسية تزايدية فإن ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) أ > ٣ (د) أ < ٣

(٣) أى المنحنيات الآتية يقطع محور السينات ؟

(أ) د (س) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$ (ب) د (س) = ٢^س + ٣

(جـ) د (س) = ٣^س − ١ (د) د (س) = ٣^(س−١)

(٤) إذا كانت : د (س) = $\frac{9^{س}}{9^{س}+3}$ فإن : د (س) + د (١ − س) = ...

(أ) $\frac{2}{9^{س}+3}$ (ب) $\frac{9^{س}+3}{2}$ (جـ) $\frac{1}{3}$ (د) ١

الدرس

3

الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى

نعلم أنه يمكن كتابة العدد (٨) على الصورة : ٨ = $٢^{٣}$ ، والعدد (٣) الذى يجب وضعه كأس للعدد (٢) ليعطى (٨) يسمى لوغاريتم العدد (٨) للأساس (٢) ويرمز له بالرمز لو$_{٢}$ ٨

أى أن لو$_{٢}$ ٨ = ٣

وهكذا نجد أن كل صورة أسية أساسها عدد حقيقى موجب ≠ ١ يوجد لها صورة أخرى تكافئها تسمى بالصورة اللوغاريتمية وعمومًا فإن :

ص = لو$_{أ}$ س ⟺ س = $أ^{ص}$ حيث أ ∈ $ح^{+}$ − {١} ، س ∈ $ح^{+}$ ، ص ∈ ح

فمثلًا : لو$_{٣}$ ٨١ = ٤ ⟺ $٣^{٤}$ = ٨١ ، لو$_{٣}$ $\frac{١}{٩}$ = −٢ ⟺ $٣^{-٢}$ = $\frac{١}{٩}$

، $٤^{٢}$ = ١٦ ⟺ لو$_{٤}$ ١٦ = ٢ ، $٢^{-٣}$ = $\frac{١}{٨}$ ⟺ لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ = −٣ وهكذا

ملاحظـات

١ لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب ، فكل من لو$_{٢}$ −٣ ، لو$_{٥}$ − ٨ ، لو$_{٦}$ صفر لا معنى له.

٢ الأساس أ يجب أن يكون عددًا موجبًا يختلف عن الواحد الصحيح ويترتب على أن كلًا من : لو$_{-٢}$ ٨ ، لو$_{صفر}$ ٥ ، لو$_{١}$ ٤ لا معنى له.

٣ اللوغاريتم المعتاد هو اللوغاريتم الذى أساسه ١٠ وقد اتفق على حذف هذا الأساس عند كتابة اللوغاريتم **فمثلًا :** لو$_{١٠}$ ٣ تكتب لو ٣

مثال ١

عبر عن كل مما يأتى بالصورة الأسية المكافئة :

١ لو$_{٢}$ ٦٤ = ٦

٢ لو$_{٢}$ ٨ $\sqrt{٢}$ = $\frac{٧}{٢}$

٣ لو$_{٣}$ $\frac{١}{٢٧}$ = −٣

٤ لو ٠,٠١ = −٢

الحل

١ $لو_{٢} ٦٤ = ٦ \Leftrightarrow ٦٤ = ٢^{٦}$

٢ $لو_{٢} ٨\sqrt{٢} = \frac{٧}{٢} \Leftrightarrow ٨\sqrt{٢} = ٢^{\frac{٧}{٢}}$

٣ $لو_{٣} \frac{١}{٢٧} = -٣ \Leftrightarrow \frac{١}{٢٧} = ٣^{-٣}$

٤ $لو ٠,٠١ = -٢ \Leftrightarrow ٠,٠١ = ١٠^{-٢}$

مثال ٢

اكتب الصورة اللوغاريتمية المكافئة لكل من الصور الأسية الآتية :

١ $٢٤٣ = (\sqrt{٣})^{١٠}$ ٢ $١٠^{-٢} = ٠,٠١$ ٣ $٣^{\frac{٥}{٢}} = ٩\sqrt{٣}$ ٤ $حـ = أ^{س}$

الحل

١ $٢٤٣ = (\sqrt{٣})^{١٠} \Leftrightarrow لو_{\sqrt{٣}} ٢٤٣ = ١٠$

٢ $١٠^{-٢} = ٠,٠١ \Leftrightarrow لو_{١٠} ٠,٠١ = -٢$

٣ $٣^{\frac{٥}{٢}} = ٩\sqrt{٣} \Leftrightarrow لو_{٣} ٩\sqrt{٣} = \frac{٥}{٢}$

٤ $حـ = أ^{س} \Leftrightarrow لو_{أ} حـ = س$

مثال ٣

أوجد قيمة كل من :

١ $لو_{٢} ٦٤$ ٢ $لو_{٦} ١$ ٣ $لو_{\sqrt{٣}} \frac{١}{٢٧}$ ٤ $لو ٠,٠٠٠١$

الحل

١ بفرض أن : $لو_{٢} ٦٤ = س$ ∴ $٢^{س} = ٦٤$ ∴ $٢^{س} = ٢^{٦}$

∴ $س = ٦$ ∴ $لو_{٢} ٦٤ = ٦$

٢ بفرض أن : $لو_{٦} ١ = س$ ∴ $٦^{س} = ١$

∴ $س$ = صفر ∴ $لو_{٦} ١$ = صفر

٣ بفرض أن : $لو_{\sqrt{٣}} \frac{١}{٢٧} = س$ ∴ $(\sqrt{٣})^{س} = \frac{١}{٢٧}$ ∴ $٣^{\frac{١}{٢}س} = ٣^{-٣}$

∴ $\frac{١}{٢} س = -٣$ ∴ $س = -٦$ ∴ $لو_{\sqrt{٣}} \frac{١}{٢٧} = -٦$

٤ بفرض أن : $لو ٠,٠٠٠١ = س$ ∴ $١٠^{س} = ٠,٠٠٠١ = ١٠^{-٤}$

∴ $س = -٤$ ∴ $لو ٠,٠٠٠١ = -٤$

مثال ٤

أوجد قيمة س إذا كان :

١ $لو_{٢} س = -٤$ ٢ $لو_{٩} ٨١\sqrt{٣} = س$ ٣ $لو_{\frac{١}{٢}} س = -٣$

الحل

١ ∵ $لو_{٢} س = -٤$ ∴ $س = ٢^{-٤}$ ∴ $س = \frac{١}{٢^{٤}} = \frac{١}{١٦}$

٢ ∵ $لو_{٩} ٨١\sqrt{٣} = س$ ∴ $٩^{س} = ٨١\sqrt{٣}$ ∴ $٣^{٢س} = ٣^{٤} \times ٣^{\frac{١}{٢}}$

∴ $٣^{٢س} = ٣^{\frac{٩}{٢}}$ ∴ $٢س = \frac{٩}{٢}$ ∴ $س = \frac{٩}{٤}$

٣ ∵ $لو_{\frac{١}{٢}} س = -٣$ ∴ $س = (\frac{١}{٢})^{-٣} = ٢^{٣}$ ∴ $س = ٨$

مثال ٥

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ لو$_{س}$ ٧ س = ٢   ٢ لو$_{٢}$ (س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ س) = −٢   ٣ (لو$_{٢}$ س)^{٢} − ٣ لو$_{٢}$ س = ٤

الحل

١ ∵ لو$_{س}$ ٧ س = ٢   ∴ س^{٢} = ٧ س

∴ س^{٢} − ٧ س = ٠   ∴ س (س − ٧) = ٠

∴ إما س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٧ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {٧}

٢ ∵ لو$_{٢}$ (س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ س) = −٢   ∴ س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ س = ٢$^{-٢}$

∴ س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ س = $\frac{١}{٤}$

∴ ٤ س^{٢} + ٣ س − ١ = ٠

∴ (س + ١) (٤ س − ١) = ٠

∴ س = −١ (يحقق) أ، س = $\frac{١}{٤}$ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {−١ ، $\frac{١}{٤}$}

لاحظ أنه

عند حل المعادلات نعوض بالقيم التى نحصل عليها فى المعادلة الأصلية ويكون الحل هو القيمة التى تحقق هذه المعادلة حيث إنه لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب.
أو إيجاد مجموعة قيم المتغير س المسموح التعويض بها قبل البدء فى حل المعادلات وذلك لتجنب التعويض بقيم س التى تم الحصول عليها.

٣ ∵ (لو$_{٢}$ س)^{٢} − ٣ لو$_{٢}$ س − ٤ = ٠   ∴ (لو$_{٢}$ س − ٤) (لو$_{٢}$ س + ١) = ٠

∴ إما لو$_{٢}$ س = ٤   ∴ س = ٢^{٤} = ١٦ (يحقق)

أ، لو$_{٢}$ س = −١   ∴ س = ٢$^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {١٦ ، $\frac{١}{٢}$}

الدالة اللوغاريتمية

إذا كان أ ∈ ح$^{+}$ − {١} فإن الدالة د : ح$^{+}$ ⟵ ح حيث د (س) = لو$_{أ}$ س
تسمى بالدالة اللوغاريتمية.

مثال ٦

أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = لو$_{٤}$ (٤ − س)   ٢ د (س) = لو$_{س-١}$ ٥

٣ د (س) = لو$_{س-٣}$ س   ٤ د (س) = لو$_{٣-س}$ س

الحـــل

١ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن : ٤ − س > ٠

أى س < ٤ ∴ مجال د =]− ∞ ، ٤[

٢ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن :

١ − س > ٠ ، ١ − س ≠ ١ أى تحقق أن س < ١ ، س ≠ ٠

∴ مجال د =]− ∞ ، ١[− {٠}

٣ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن :

س > ٠ ، س − ٣ > ٠ ، س − ٣ ≠ ١ أى تحقق أن س > ٠ ، س > ٣ ، س ≠ ٤ ∴ مجال د =]٣ ، ∞[− {٤}

٤ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن س > ٠ ، ٣ − س > ٠ ، ٣ − س ≠ ١ أى تحقق أن س > ٠ ، س < ٣ ، س ≠ ٢

∴ مجال د =]٠ ، ٣[− {٢}

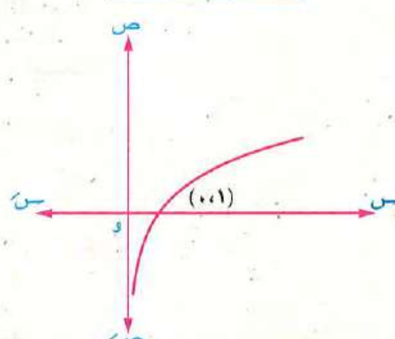
تذكر أن

الدالة د : د (س) = لو$_{ا}$ س معرفة لجميع قيم س ، ا التى تحقق أن : س > ٠ ، ا > ٠ ، ا ≠ ١

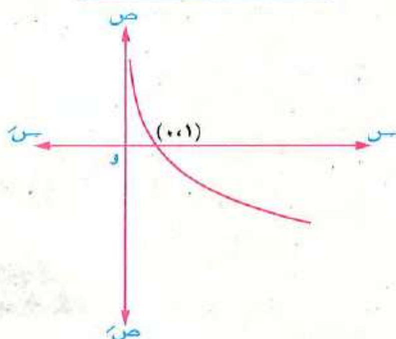
التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية د : د (س) = لو$_{ا}$ س

- الشكل البيانى للدالة اللوغاريتمية يأخذ أحد الشكلين الآتيين حسب قيمة الأساس ا :

إذا كانت ا > ١



إذا كانت ٠ < ا < ١



بعض خواص الدالة اللوغاريتمية د : د (س) = لو$_{ا}$ س

١ مجال الدالة = ح$^{+}$

٢ مدى الدالة = ح

٣ الدالة تزايدية عندما ا > ١ وتناقصية عندما ٠ < ا < ١

٤ منحنى الدالة لأى أساس موجب ≠ ١ يمر بالنقطة (١ ، ٠)

مثال ٧

إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٢٧ ، ٣)

أوجد قيمة أ ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∈ [$\frac{١}{٩}$ ، ٩] ومن الرسم :

١ استنتج المجال والمدى والاطراد ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات.

٢ أوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_{٣}$ ٦

الحل

∵ د (س) = لو$_{أ}$ س لكل س > ٠ ، أ ∈ ح$^{+}$ − {١}

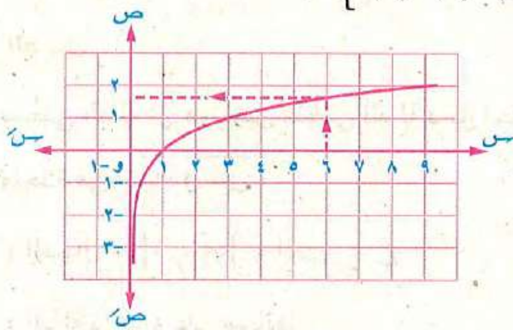
، ∵ النقطة (٢٧ ، ٣) ∈ منحنى الدالة ∴ ٣ = لو$_{أ}$ ٢٧ ∴ أ^{٣} = ٢٧ = ٣^{٣}

∴ أ = ٣ ∴ د (س) = لو$_{٣}$ س

نكون الجدول الآتى : [مع ملاحظة أن الأساس = ٣ > ١]

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
ص = لو$_{٣}$ س	−٢	−١	صفر	١	٢

* لاحظ اختيار قيم س قوى العدد ٣ (الأساس) {٣$^{-٢}$ ، ٣$^{-١}$ ، ٣^{٠} ، ٣^{١} ، ٣^{٢}}



ومن الرسم نجد أن :

* المجال = ح$^{+}$ ، المدى = ح
* الدالة تزايدية على مجالها.
* المنحنى يقطع محور السينات فى النقطة (١ ، ٠)
* لو$_{٣}$ ٦ ≃ ١,٦

مثال ٨

إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة ($\frac{١}{١٦}$ ، ٤) أوجد قيمة أ ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∈ [$\frac{١}{٤}$ ، ٤] ومن الرسم استنتج المدى والاطراد ثم أوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥

الحل

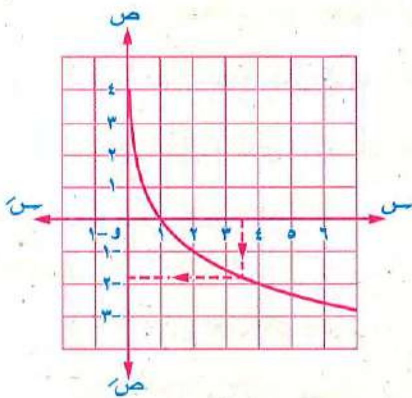
∵ د (س) = لو$_{أ}$ س لكل س > ٠ ، أ ∈ ح$^{+}$ − {١}

، ∵ النقطة ($\frac{١}{١٦}$ ، ٤) ∈ منحنى الدالة ∴ ٤ = لو$_{أ}$ $\frac{١}{١٦}$

∴ أ^{٤} = $\frac{١}{١٦}$ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$ ∴ أ = $\frac{١}{٢}$ (ويرفض الحل السالب)

∴ د (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س

نكون الجدول الآتى : (مع ملاحظة أن الأساس = $\frac{1}{2}$ < ١)



س	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤
ص = لو$_{\frac{1}{2}}$ س	٢	١	صفر	١−	٢−

* لاحظ اختيار قيم س قوى العدد $\frac{1}{2}$ (الأساس)

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} ، \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} ، \left(\frac{1}{2}\right)^{0} ، \left(\frac{1}{2}\right)^{1} ، \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \right\}$$

ومن الرسم نجد أن :

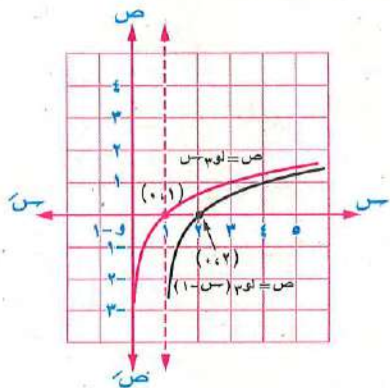
* المدى = ح * الدالة تناقصية على مجالها.

* لو$_{\frac{1}{2}}$ ٣,٥ ≃ −١,٨

مثال ٩

استخدم منحنى الدالة د : د (س) = لو$_٣$ س لتمثيل الدالة ر : ر (س) = لو$_٣$ (س − ١) ومن الرسم حدد المجال والمدى وابحث الاطراد.

الحـــل



منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

، المجال =]١ ، ∞[، المدى = ح

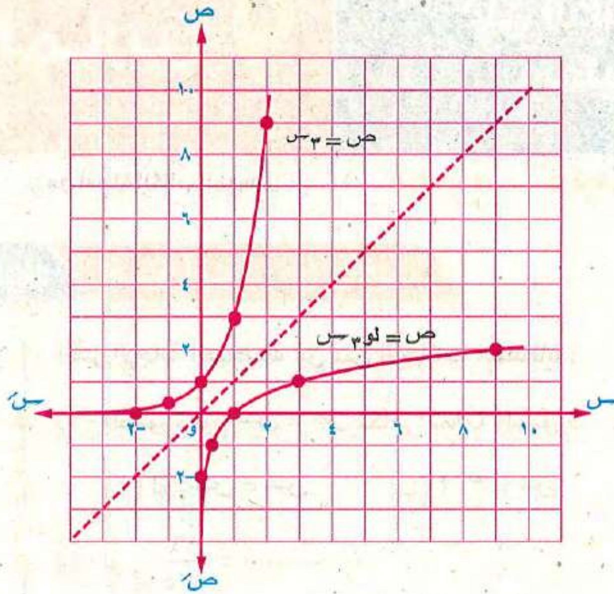
، الدالة تزايدية على مجالها.

العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية

درسنا فيما سبق لرسم الدالة الأسية د : د (س) = ٣^{س} أى ص = ٣^{س} **نكون الجدول التالى :**

س	٢−	١−	٠	١	٢
ص = ٣^{س}	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	١	٣	٩

وبتبديل المتغيرين نحصل على دالة تُسمى الدالة العكسية س = ٣^{ص} وهى الصورة المكافئة للدالة اللوغاريتمية ص = لو$_٣$ س



ويمكن رسم هذه الدالة بتبديل قيم س ، ص في الجدول السابق كما يلى :

س	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	١	٣	٩
ص = لو٣ س	-٢	-١	٠	١	٢

* من الشكل المقابل نلاحظ أن :

منحنيا الدالتين متماثلان حول المستقيم ص = س

، مجال الدالة الأسية هو ح والمدى =]٠ ، ∞[

، مجال الدالة اللوغاريتمية هو]٠ ، ∞[والمدى = ح

استخدام الآلة الحاسبة

* مفتاح اللوغاريتم لأى أساس هو $\log_{\square}\square$ ، مفتاح اللوغاريتم المعتاد هو log

فمثلًا :

١ لإيجاد لو٣ ٢٤ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى



فيكون لو٣ ٢٤ ≃ ٢,٨٩٢٨ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

٢ لإيجاد لو ٨,٤ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى



فيكون لو ٨,٤ ≃ ٠,٩٢٤٣ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

٣ لإيجاد العدد س الذى يحقق لو س = ٠,٤٥٧٢ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى



∴ س ≃ ٢,٨٦٥٥ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

تمارين 9

على الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى | • فهم | ○ تطبيق | ⁂ مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الصورة لو$_{أ}$ س = ص تكافئ تمامًا الصورة ....

(أ) لو$_{أ}$ ص = س (ب) $أ^{ص}$ = س (جـ) $أ^{س}$ = ص (د) ص = أ س

(٢) لو$_{\frac{٥}{٢}}$ $\frac{١٦}{٦٢٥}$ = ...

(أ) −٢ (ب) −٤ (جـ) ٣ (د) ٥

(٣) إذا كان : لو ٠,٠١ = ٣ س + ١ فإن : س = ...

(أ) −٣ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٧

(٤) إذا كان : لو$_{٣}$ س = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ٩

(٥) إذا كان : لو$_{\frac{١}{٤}}$ س = −١ فإن : س = ...

(أ) −٤ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٤

(٦) إذا كان : لو$_{٢}$ س = لو$_{٣}$ ٩ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٧) إذا كان : لو$_{٥}$ س = ٢ فإن : لو (٤٠ س) = ...

(أ) ٣ (ب) ٢٥ (جـ) ١٠٠ (د) ١٠٠٠

(٨) إذا كان : لو$_{٥}$ س = ٣ فإن : لو$_{٥}$ $\frac{س}{٥}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٢٥ (د) ١٢٥

(٩) إذا كان : لو (س + ١١) = ٢ فإن : س = ...

(أ) −٩ (ب) ٢٢ (جـ) ٨٩ (د) ٩١

(١٠) إذا كان لو$_{٩}$ $\sqrt{س + ٧}$ = $\frac{١}{٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(١١) مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ ٨١ = ٤ هى ....

(أ) {-٣} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، -٣} (د) {٩}

(١٢) مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ ٣ = -٢ فى ح هى ....

(أ) {$\frac{١}{٩}$} (ب) {٩} (جـ) {$\sqrt{٣}$} (د) {$\frac{١}{\sqrt{٣}}$}

(١٣) إذا كان : لو$_{س}$ ٢٥ = ٢ فإن : س^{٣} + س^{٢} - س = ...

(أ) ٩٥ (ب) ١٠٥ (جـ) ١٤٥ (د) ١٥٥

(١٤) إذا كان : لو$_{٣}$ (٢ س + ٣) = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٩ (د) ٤

(١٥) مجموعة حل المعادلة : لو$_{(س + ٣)}$ ١٢٥ = ٣ فى ح هى ....

(أ) {٥} (ب) {٣} (جـ) ∅ (د) {٢}

(١٦) مجموعة حل المعادلة لو (س - ١) = صفر هى ....

(أ) {$\frac{١}{١٠}$} (ب) {١} (جـ) {٢} (د) {-١}

(١٧) مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ (٣ س - ٢) = ٢ هى ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {١} (جـ) {٢} (د) ∅

(١٨) 📖 مجموعة حل المعادلة لو$_{س}$ (س + ٦) = ٢ فى ح هى ....

(أ) {٣ ، -٢} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، ١} (د) {٦ ، ١}

(١٩) مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ ٦٤ س = ٤ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {٤} (جـ) {٦} (د) {٠ ، ٤}

(٢٠) إذا كان : لو$_{|س + ٢|}$ ٦٤ = ٣ فإن : س ∈ ....

(أ) {٦ ، -٢} (ب) {٢ ، -٦} (جـ) {٠ ، -٨} (د) {٤ ، -٨}

(٢١) قيمة لو$_{٦}$ ٣٣ باستخدام الحاسبة هى .... تقريبًا.

(أ) ١,٩٥ (ب) ٠,٥١٢ (جـ) ٢,٢٩٧ (د) ٠,٧٤

(٢٢) قيمة س حيث لو س = ٠,٣٥ هى .... مقربة لأقرب جزء من ألف

(أ) ٣,٥٣٤ (ب) ٢,٨٣٩ (جـ) ٢,٢٣٩ (د) ± ٢,٢٣٩

(٢٣) منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{٢}$ (س + ١) يقطع محور السينات فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (١ ، ١)

(٢٤) منحنى الدالة د : د (س) = لو $_٢$ (٣ − س) يقطع محور السينات فى النقطة ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٠ ، ١) (د) (٣ ، ٠)

(٢٥) منحنى الدالة د : د (س) = لو $_٢$ س يمر بالنقطة (٨ ، ....)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) لو $_٢$ ٣ (د) ٢٥٦

(٢٦) الدالة د : د (س) = لو $_أ$ س متناقصة لكل أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠[(جـ)]٠ ، ١[(د)]١ ، ∞[

(٢٧) إذا كانت الدالة د : د (س) = لو $_{\frac{١}{٢}}$ س فإن : د $\left(\frac{١}{٤}\right)$ + د (٨) = ...

(أ) −٣ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٥

(٢٨) إذا كان : لو $_{\frac{١}{٢}}$ د (س) = س فإن : ٨ د (٢) + د (−٣) + د (٠) = ...

(أ) $\frac{١}{١٦}$ (ب) $\frac{١}{٨}$ (جـ) ١١ (د) ٢٢

(٢٩) إذا كان المنحنى ص = لو $_٤$ (١ − أ س) يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢}\right)$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

(٣٠) إذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) = لو $_أ$ س يمر بالنقطة (٨ ، ٣) فإن : د (٤) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) −٢

(٣١) مجال الدالة د حيث د (س) = لو $_{(١ - س)}$ ٣ هو ....

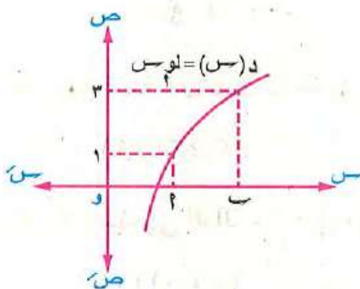
(أ)]−∞ ، ٠[∪]٠ ، ١[(ب)]−∞ ، ١[

(جـ)]١ ، ∞[(د)]−١ ، ١[

(٣٢) مجال الدالة د : د (س) = لو $_{١ - س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١

(جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١



(٣٣) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د : د (س) = لو $_أ$ س

فإن : ب = ...

(أ) أ^٢ (ب) أ + ٣

(جـ) أ^٣ (د) ٣ أ

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ عبر عن كل من الصور اللوغاريتمية الآتية بالصورة الأسية المكافئة لها :

(١) $\text{لو}_{٢}\ ١٢٨ = ٧$
(٢) $\text{لو}_{٤٩}\ ٧ = \frac{١}{٢}$
(٣) $\text{لو}_{\frac{٢}{٥}}\ \frac{٤}{٢٥} = ٢$
(٤) $\text{لو}_{٣}\ \frac{١}{٨١} = -٤$
(٥) $\text{لو}\ ٠,٠٠١ = -٣$
(٦) $\text{لو}_{٢}\ ٤\sqrt{٢} = \frac{٥}{٢}$

٢ عبر عن كل من الصور الأسية الآتية بالصورة اللوغاريتمية المكافئة لها :

(١) $١٢٥ = ٥^{٣}$
(٢) $٨١ = ٩^{٢}$
(٣) $٥^{\text{صفر}} = ١$
(٤) $(\sqrt{٢})^{٤} = ٤$
(٥) $٥^{-٣} = \frac{١}{١٢٥}$
(٦) $\text{ح} = ٢^{\text{ن}}$

٣ أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) $\text{لو}_{٧}\ ٧$ «١»
(٢) $\text{لو}_{٥}\ ١$ «صفر»
(٣) $\text{لو}_{٣}\ ٩$ «٢»
(٤) $\text{لو}\ ٠,٠٠٠٠١$ «−٥»
(٥) $\text{لو}_{٤}\ ٢\sqrt{٢}$ «$\frac{٣}{٤}$»
(٦) $\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\ ١٢٨$ «−٧»
(٧) $\text{لو}_{٩}\ \frac{١}{٢٧}$ «$\frac{-٣}{٢}$»
(٨) $\text{لو}_{٠,٢}\ ١٢٥$ «−٣»
(٩) $\text{لو}_{\sqrt{٢}}\ ٨\sqrt{٢}$ «٧»

٤ حل فى ح كلاً من المعادلات الآتية :

(١) $\text{لو}_{\frac{١}{٣}}\ \text{س} = -١$ «٣»
(٢) $\text{لو}_{\sqrt{٣}}\ \text{س} = ٤$ «٩»
(٣) $\text{لو}_{٣}\ \text{س}^{٢} = ٤$ «± ٩»
(٤) $\text{لو}_{٨١}\ \text{س} = \frac{٣}{٤}$ «٢٧»
(٥) $\text{لو}_{٨١}\ ٣\text{س} = \frac{١}{٤}$ «١»
(٦) $\text{لو}_{٠,٢}\ \text{س} = -٢$ «٢٥»
(٧) $\text{لو}_{٥}\ \frac{١}{\text{س}} = -٢$ «٢٥»
(٨) $\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\ ٢^{\text{س}} = -٤$ «٤»
(٩) $\text{لو}_{٣}\ (٢\text{س} - ٥) = ٠$ «٣»
(١٠) $\text{لو}_{٢}\ (\text{س} + ٥) = ٣$ «٣»
(١١) $\text{لو}_{٣}\ (\text{س} - ١) = ٢$ «١٠»
(١٢) $\text{لو}_{٥}\ (٣\text{س} - ١) = ١$ «٢»
(١٣) $\text{لو}_{٦}\ \sqrt{\text{س} + ٤} = \frac{١}{٢}$ «٢»
(١٤) $\text{لو}_{٣}|\text{س}| = ١$ «± ٣»
(١٥) $\text{لو}_{٥}|٢\text{س} + ١| = ١$ «٢ أ، −٣»
(١٦) $\text{لو}_{٢}\ \text{س}\ (\text{س} + ٦) = ٤$ «٢ أ، −٨»
(١٧) $\text{لو}_{٢}\ (\text{س} - ١)^{٢} = ٢$ «٣ أ، −١»
(١٨) $\text{لو}_{٣}\ (\text{س}^{٢} - ٢\text{س}) = ١$ «٣ أ، −١»
(١٩) $(\text{لو}_{٣}\ \text{س})^{٢} - ٩\ \text{لو}_{٣}\ \text{س} + ٢٠ = ٠$ «٨١ أ، ٢٤٣»
(٢٠) $|\text{لو}_{١٠}\ \text{س} - ٢| = ٢$ «$١٠^{٤}$ أ، ١»

٥ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $\text{لو}_{\text{س}}\ ٩ = ٢$ «{٣}»
(٢) $\text{لو}_{\text{س}}\ ٩ = \frac{٢}{٣}$ «{٢٧}»
(٣) $\text{لو}_{\text{س}}\ ٠,٠٠١ = \frac{-٣}{٤}$ «{١٠٠٠٠}»
(٤) $\text{لو}_{\text{س}}\ ٨١ = ٤$ «{−٣}»

(٥) لو$_{س-١}$ ٩ = ٢ «{٤}»
(٦) لو$_{س-١}$ ٢٧ = ٣ «{٤}»
(٧) لو$_{س-١}$ (٧ − س) = ٢ «{٣}»
(٨) لو$_{س+١}$ ٨ = $\frac{٣}{٤}$ «{١٥}»
(٩) لو$_{س}$ ٥ س = ٢ «{٥}»
(١٠) لو$_{س}$ (س + ٢) = ٢ «{٢}»
(١١) لو$_{س}$ (٢ س + ٨) = ٢ «{٤}»
(١٢) لو$_{س}$ $\left(\sqrt{س - ٢} + ٢\right)$ = ١ «{٢ ، ٣}»

٦ أوجد قيمة س فى كل مما يأتى :

(١) لو$_{٣}$ $\frac{١}{٢٧}$ = س «−٣»
(٢) لو$_{٥}$ ٦٢٥ = س − ١ «٥»
(٣) لو$_{٣}$ ٢٧ = س + ٢ «١»
(٤) لو$_{٢٧}$ ١ = س^{٣} «صفر»
(٥) لو$_{٤}$ ٨ $\sqrt{٢}$ = س «$\frac{٧}{٤}$»
(٦) لو$_{\sqrt{٥}}$ ٦٢٥ $\sqrt{٥}$ = س^{٢} «± ٣»

٧ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى مقربًا لأربعة أرقام عشرية :

(١) لو ١٥
(٢) لو$_{٢}$ ٢٧
(٣) ٤ لو ٧ − ٥ لو ١٣

٨ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة س فى كل مما يأتى مقربًا لأربعة أرقام عشرية :

(١) لو س = ٠,٢٣٤٥
(٢) لو س = ١,٤١٢
(٣) لو س = −٠,٣

٩ عين مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

(١) د (س) = لو$_{٢}$ (٢ س + ١)
(٢) د (س) = ٢ لو س
(٣) ر (س) = لو$_{٢}$ (س − ٢)
(٤) د (س) = لو$_{س}$ س
(٥) د (س) = لو$_{س-٢}$ س
(٦) د (س) = لو$_{٢-س}$ س

١٠ مثل بيانيًا منحنى كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد المدى وابحث الاطراد :

(١) ك (س) = لو$_{٢}$ س
(٢) هـ (س) = لو$_{٣}$ س
(٣) د (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س
(٤) ق (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ (س + ١)
(٥) ر (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ (س − ١)
(٦) ت (س) = ١ − لو$_{٢}$ س

١١ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٤ ، ٢) أوجد قيمة أ ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∈ [$\frac{١}{٨}$ ، ٨] ومن الرسم استنتج المدى والاطراد ثم أوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_{٢}$ ١,٥

١٢ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٨١ ، ٤)

أوجد قيمة أ ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∈ [$\frac{١}{٩}$ ، ٩] ومن الرسم :

(١) استنتج المجال والمدى والاطراد ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات.

(٢) أوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_{٣}$ ٥

الدرس

4

بعض خواص اللوغاريتمات

الخاصية الأولى

* إذا كان : $أ \in ح^{+} - \{١\}$ فإن : $لو_{أ}\, أ = ١$

فمثلاً : $لو_{٧}\, ٧ = ١$ ، $لو_{٥}\, ٥ = ١$ ، $لو_{\sqrt{٣}}\, \sqrt{٣} = ١$

الإثبات ∵ $أ^{١} = أ$ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية ∴ $لو_{أ}\, أ = ١$

الخاصية الثانية

* إذا كان : $أ \in ح^{+} - \{١\}$ فإن : $لو_{أ}\, ١ = صفر$

فمثلًا : $لو_{٣}\, ١ = صفر$ ، $لو_{٥}\, ١ = صفر$ ، $لو_{\sqrt{٧}}\, ١ = صفر$

الإثبات ∵ $أ^{صفر} = ١$ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية ∴ $لو_{أ}\, ١ = صفر$

الخاصية الثالثة خاصية الضرب

* إذا كان : $س ، ص \in ح^{+} ، أ \in ح^{+} - \{١\}$ فإن : $لو_{أ}\, س\, ص = لو_{أ}\, س + لو_{أ}\, ص$

فمثلًا : $لو_{٣}\, (٢ \times ٥) = لو_{٣}\, ٢ + لو_{٣}\, ٥$

والعكس صحيح : $لو_{٥}\, ٢ + لو_{٥}\, ١١ = لو_{٥}\, (٢ \times ١١) = لو_{٥}\, ٢٢$

الإثبات بوضع $لو_{أ}\, س = ب$ ، $لو_{أ}\, ص = جـ$

∴ $س = أ^{ب}$ ، $ص = أ^{جـ}$ ∴ $س\, ص = أ^{ب} \times أ^{جـ}$

∴ $س\, ص = أ^{ب + جـ}$ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية

∴ $لو_{أ}\, س\, ص = ب + جـ$ ∴ $لو_{أ}\, س\, ص = لو_{أ}\, س + لو_{أ}\, ص$

نتيجة : إذا كانت : $س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣} ، ..... ، س_{ن} \in ح^{+} ، أ \in ح^{+} - \{١\}$

فإن : $لو_{أ}\, (س_{١} \times س_{٢} \times س_{٣} \times ..... \times س_{ن}) = لو_{أ}\, س_{١} + لو_{أ}\, س_{٢} + ... + لو_{أ}\, س_{ن}$

فمثلًا : لو$_{٢}$ (٣ × ٥ × ٧) = لو$_{٢}$ ٣ + لو$_{٢}$ ٥ + لو$_{٢}$ ٧

والعكس صحيح : لو$_{م}$ ٧٥ + لو$_{م}$ $\frac{٤}{٩}$ + لو$_{م}$ ٠,٠٦ = لو$_{م}$ $\left(٧٥ \times \frac{٤}{٩} \times \frac{٦}{١٠٠}\right)$ = لو$_{م}$ ٢

تنبيه هام

> تذكر جيدًا أن : لو$_{م}$ (س + ص) $\neq$ لو$_{م}$ س + لو$_{م}$ ص
>
> كما أن : لو$_{م}$ (س × ص) $\neq$ لو$_{م}$ س × لو$_{م}$ ص

الخاصية الرابعة — خاصية القسمة

* إذا كان : س ، ص $\in$ ح$^{+}$ ، م $\in$ ح$^{+}$ − {١} فإن : لو$_{م}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{م}$ س − لو$_{م}$ ص

فمثلًا : لو$_{٥}$ $\frac{٢}{٣}$ = لو$_{٥}$ ٢ − لو$_{٥}$ ٣ **والعكس صحيح :** لو$_{٥}$ ١١ − لو$_{٥}$ ٢ = لو$_{٥}$ $\frac{١١}{٢}$

الإثبات بوضع لو$_{م}$ س = ب ، لو$_{م}$ ص = جـ ∴ س = م^{ب} ، ص = م^{جـ}

∴ $\frac{س}{ص}$ = $\frac{م^{ب}}{م^{جـ}}$ = م$^{ب - جـ}$

وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية ∴ لو$_{م}$ $\frac{س}{ص}$ = ب − جـ

أى أن لو$_{م}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{م}$ س − لو$_{م}$ ص

نتيجة : لو$_{م}$ $\frac{س\,ص}{ع\,ل}$ = لو$_{م}$ س + لو$_{م}$ ص − لو$_{م}$ ع − لو$_{م}$ ل

تنبيه هام

> تذكر جيدًا أن : لو$_{م}$ (س − ص) $\neq$ لو$_{م}$ س − لو$_{م}$ ص
>
> كما أن : لو$_{م}$ $\left(\frac{س}{ص}\right)$ $\neq$ لو$_{م}$ س ÷ لو$_{م}$ ص

الخاصية الخامسة — خاصية لوغاريتم القوة

* إذا كان : س $\in$ ح$^{+}$ ، م $\in$ ح$^{+}$ − {١} ، ن $\in$ ح فإن : لو$_{م}$ س^{ن} = ن لو$_{م}$ س

فمثلًا : لو$_{٢}$ ١٢٥ = لو$_{٢}$ ٥^{٣} = ٣ لو$_{٢}$ ٥ **والعكس صحيح :** ٧ لو$_{٥}$ ٢ = لو$_{٥}$ ٢^{٧} = لو$_{٥}$ ١٢٨

الإثبات لو$_{م}$ س^{ن} = لو$_{م}$ (س × س × س × س × .... إلى ن حدًا) = لو$_{م}$ س + لو$_{م}$ س + ... إلى ن حدًا

= ن لو$_{م}$ س

الخاصية السادسة — خاصية تغيير الأساس

* إذا كان : س $\in$ ح$^{+}$ ، ص $\in$ ح$^{+}$ − {١} ، م $\in$ ح$^{+}$ − {١} فإن : لو$_{ص}$ س = $\frac{لو_{م}\ س}{لو_{م}\ ص}$

فمثلًا : لو$_{٥}$ ٧ = $\frac{لو\ ٧}{لو\ ٥}$ ، لو$_{٣}$ ٢ = $\frac{لو_{١١}\ ٢}{لو_{١١}\ ٣}$

الإثبات بوضع $لو_{ص} س = ع$ ∴ $ص^{ع} = س$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس م

∴ $ع \; لو_{م} ص = لو_{م} س$ ∴ $ع = \frac{لو_{م} س}{لو_{م} ص}$

أى أن $لو_{ص} س = \frac{لو_{م} س}{لو_{م} ص}$

الخاصية السابعة خاصية المعكوس الضربى

* إذا كان : $س ، ص \in ح^{+} - \{1\}$ فإن : $لو_{ص} س = \frac{1}{لو_{س} ص}$

فمثلاً : $لو_{7} 5 = \frac{1}{لو_{5} 7}$ ومنها $لو_{7} 5 \times لو_{5} 7 = 1$

الإثبات ∵ $لو_{ص} س = \frac{لو س}{لو ص}$ ، $لو_{س} ص = \frac{لو ص}{لو س}$

∴ $لو_{ص} س \times لو_{س} ص = 1$ ∴ $لو_{ص} س = \frac{1}{لو_{س} ص}$

مثال ①

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتى :

① $لو_{3} 15 + لو_{3} 6 - لو_{3} 10$

② $لو_{5} 100 - 3 \; لو_{5} 2 - لو_{5} 18 + لو_{5} 36$

③ $لو_{5} \frac{3}{5} + 2 \; لو_{5} \frac{15}{2} - لو_{5} \frac{5}{36} + لو_{5} \frac{5}{243}$

④ $لو_{2} 7 \times لو_{7} 11 \times لو_{11} 9 \times لو_{3} 2$

⑤ $\frac{لو_{2} 243 - لو_{3} 32}{لو_{2} 27 - لو_{3} 8}$

الحل

① المقدار $= لو_{3} \frac{15 \times 6}{10} = لو_{3} 9 = لو_{3} 3^{2} = 2 \; لو_{3} 3 = 2 \times 1 = 2$

② المقدار $= لو_{5} 100 - لو_{5} 2^{3} - لو_{5} 18 + لو_{5} 36$

$= لو_{5} \frac{100 \times 36}{8 \times 18} = لو_{5} 25 = لو_{5} 5^{2} = 2 \; لو_{5} 5 = 2 \times 1 = 2$

③ المقدار $= لو_{5} \frac{3}{5} + لو_{5} \left(\frac{15}{2}\right)^{2} - لو_{5} \frac{5}{36} + لو_{5} \frac{5}{243}$

$= لو_{5} \frac{\frac{3}{5} \times \frac{15}{2} \times \frac{15}{2} \times \frac{5}{243}}{\frac{5}{36}} = لو_{5} \frac{3 \times 15 \times 15 \times 5 \times 36}{5 \times 2 \times 2 \times 243 \times 5} = لو_{5} 5 = 1$

④ المقدار $= \frac{لو 7}{لو 2} \times \frac{لو 11}{لو 7} \times \frac{لو 9}{لو 11} \times \frac{لو 2}{لو 3} = \frac{لو 9}{لو 3} = \frac{لو 3^{2}}{لو 3} = \frac{2 \; لو 3}{لو 3} = 2$

⑤ المقدار $= \frac{لو_{2} 3^{5} - لو_{3} 2^{5}}{لو_{2} 3^{3} - لو_{3} 2^{3}} = \frac{5 \; لو_{2} 3 - 5 \; لو_{3} 2}{3 \; لو_{2} 3 - 3 \; لو_{3} 2} = \frac{5 \; (لو_{2} 3 - لو_{3} 2)}{3 \; (لو_{2} 3 - لو_{3} 2)} = \frac{5}{3}$

مثال ٢

بدون استخدام حاسبة الجيب أثبت كلاً مما يأتى :

١ ٣ لو ٥ + ٢ لو ٦ − لو ٩ + لو ٠,٢ = $\text{لو}_{\text{ه}}$ ٢٥

٢ $\frac{\text{لو ٣٠ − لو ٦ + لو ٥}}{\text{لو ١٢ − لو ٣ + لو ٢٥}}$ = ١ − لو ٢

الحل

١ الطرف الأيمن = لو $٥^{٣}$ + لو $٦^{٢}$ − لو ٩ + لو $\frac{٢}{١٠}$ = لو $\frac{٥^{٣} \times ٦^{٢} \times \frac{٢}{١٠}}{٩}$ = لو $\frac{١٢٥ \times ٣٦ \times ٢}{٩ \times ١٠}$

= لو ١٠٠ = لو $١٠^{٢}$ = ٢ لو ١٠ = ٢

، الطرف الأيسر = $\text{لو}_{\text{ه}}$ $٥^{٢}$ = ٢ $\text{لو}_{\text{ه}}$ ٥ = ٢ ∴ الطرفان متساويان.

٢ الطرف الأيمن = $\frac{\text{لو } \frac{٣٠ \times ٥}{٦}}{\text{لو } \frac{١٢ \times ٢٥}{٣}}$ = $\frac{\text{لو ٢٥}}{\text{لو ١٠٠}}$ = $\frac{\text{لو } ٥^{٢}}{\text{لو } ١٠^{٢}}$ = $\frac{\text{٢ لو ٥}}{\text{٢ لو ١٠}}$ = لو ٥

، الطرف الأيسر = ١ − لو ٢ = لو ١٠ − لو ٢ = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥

∴ الطرفان متساويان.

مثال ٣

إذا كان : $\text{لو}_{٣}$ ٧ ≃ ١,٧٧١

أوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة :

١ $\text{لو}_{٣}$ ٢١ ٢ $\text{لو}_{٣}$ ٦٣ ٣ $\text{لو}_{٣}$ $\frac{٧}{٩}$

الحل

١ $\text{لو}_{٣}$ ٢١ = $\text{لو}_{٣}$ (٣ × ٧) = $\text{لو}_{٣}$ ٣ + $\text{لو}_{٣}$ ٧ = ١ + ١,٧٧١ = ٢,٧٧١

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... Start → log▫ 3 REPLAY 2 1 =)

٢ $\text{لو}_{٣}$ ٦٣ = $\text{لو}_{٣}$ (٩ × ٧) = $\text{لو}_{٣}$ ٩ + $\text{لو}_{٣}$ ٧ = $\text{لو}_{٣}$ $٣^{٢}$ + $\text{لو}_{٣}$ ٧ = ٢ $\text{لو}_{٣}$ ٣ + $\text{لو}_{٣}$ ٧

= ٢ + ١,٧٧١ = ٣,٧٧١

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... Start → log▫ 3 REPLAY 6 3 =)

٣ $\text{لو}_{٣}$ $\frac{٧}{٩}$ = $\text{لو}_{٣}$ ٧ − $\text{لو}_{٣}$ ٩ = $\text{لو}_{٣}$ ٧ − $\text{لو}_{٣}$ $٣^{٢}$ = $\text{لو}_{٣}$ ٧ − ٢ $\text{لو}_{٣}$ ٣ = ($\text{لو}_{٣}$ ٧) − ٢

= ١,٧٧١ − ٢ = −٠,٢٢٩

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... Start → log▫ 3 REPLAY ▭/▭ 7 REPLAY 9 =)

مثال ٤

أوجد فى أبسط صورة قيمة كل مما يأتى :

١ $\text{لو}_{٢}\sqrt[٧]{٣٢}$

٢ $\dfrac{١}{\text{لو}_{\text{س}}\text{س ص ع}} + \dfrac{١}{\text{لو}_{\text{ص}}\text{س ص ع}} + \dfrac{١}{\text{لو}_{\text{ع}}\text{س ص ع}}$

الحــل

١ $\text{لو}_{٢}\sqrt[٧]{٣٢} = \text{لو}_{٢}(٢^{٥})^{\frac{١}{٧}} = \text{لو}_{٢}\,٢^{\frac{٥}{٧}} = \frac{٥}{٧}\,\text{لو}_{٢}\,٢ = \frac{٥}{٧}$

٢ $\dfrac{١}{\text{لو}_{\text{س}}\text{س ص ع}} + \dfrac{١}{\text{لو}_{\text{ص}}\text{س ص ع}} + \dfrac{١}{\text{لو}_{\text{ع}}\text{س ص ع}}$

$= \text{لو}_{\text{س ص ع}}\text{س} + \text{لو}_{\text{س ص ع}}\text{ص} + \text{لو}_{\text{س ص ع}}\text{ع} = \text{لو}_{\text{س ص ع}}\text{س ص ع} = ١$

مثال ٥

باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين فى كل مما يأتى :

١ $٥^{\text{س}} = ١٧$

٢ $٢^{\text{س}-١} = ٧$

٣ $٥^{\text{س}+١} = ٢^{٤\text{س}-٣}$

٤ $٥^{\text{س}-٢} = ٣ \times ٤^{\text{س}+١}$

الحــل

١ $\because ٥^{\text{س}} = ١٧$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين $\therefore \text{لو } ٥^{\text{س}} = \text{لو } ١٧$ $\therefore \text{س لو } ٥ = \text{لو } ١٧$

$\therefore \text{س} = \dfrac{\text{لو } ١٧}{\text{لو } ٥}$ وباستخدام حاسبة الجيب $\therefore \text{س} \simeq ١{,}٧٦$

٢ $\because ٢^{\text{س}-١} = ٧$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين $\therefore \text{لو } ٢^{\text{س}-١} = \text{لو } ٧$ $\therefore (\text{س} - ١)\text{ لو } ٢ = \text{لو } ٧$

$\therefore \text{س لو } ٢ - \text{لو } ٢ = \text{لو } ٧$ $\therefore \text{س} = \dfrac{\text{لو } ٧ + \text{لو } ٢}{\text{لو } ٢} \simeq ٣{,}٨١$

٣ $\because ٥^{\text{س}+١} = ٢^{٤\text{س}-٣}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore \text{لو } ٥^{\text{س}+١} = \text{لو } ٢^{٤\text{س}-٣}$ $\therefore (\text{س} + ١)\text{ لو } ٥ = (٤\text{س} - ٣)\text{ لو } ٢$

$\therefore \text{س لو } ٥ + \text{لو } ٥ = ٤\text{س لو } ٢ - ٣\text{ لو } ٢$ $\therefore ٤\text{س لو } ٢ - \text{س لو } ٥ = ٣\text{ لو } ٢ + \text{لو } ٥$

$\therefore \text{س}(٤\text{ لو } ٢ - \text{لو } ٥) = ٣\text{ لو } ٢ + \text{لو } ٥$ $\therefore \text{س} = \dfrac{٣\text{ لو } ٢ + \text{لو } ٥}{٤\text{ لو } ٢ - \text{لو } ٥} \simeq ٣{,}١٧$

٤ $\because ٥^{\text{س}-٢} = ٣ \times ٤^{\text{س}+١}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore (\text{س} - ٢)\text{ لو } ٥ = \text{لو } ٣ + (\text{س} + ١)\text{ لو } ٤$

$\therefore \text{س لو } ٥ - ٢\text{ لو } ٥ = \text{لو } ٣ + \text{س لو } ٤ + \text{لو } ٤$

$\therefore \text{س لو } ٥ - \text{س لو } ٤ = \text{لو } ٣ + \text{لو } ٤ + ٢\text{ لو } ٥$

$\therefore \text{س}(\text{لو } ٥ - \text{لو } ٤) = \text{لو } ٣ + \text{لو } ٤ + ٢\text{ لو } ٥$

$\therefore \text{س} = \dfrac{\text{لو } ٣ + \text{لو } ٤ + ٢\text{ لو } ٥}{\text{لو } ٥ - \text{لو } ٤} \simeq ٢٥{,}٥٦$

حل آخر

$\because ٥^{\text{س}-٢} = ٣ \times ٤^{\text{س}+١}$

$\therefore \dfrac{٥^{\text{س}}}{٥^{٢}} = ٣ \times ٤^{\text{س}} \times ٤$

$\therefore \dfrac{٥^{\text{س}}}{٤^{\text{س}}} = ٣ \times ٤ \times ٥^{٢}$

$\therefore \left(\frac{٥}{٤}\right)^{\text{س}} = ٣٠٠$

$\therefore \text{س} = \dfrac{\text{لو } ٣٠٠}{\text{لو }\frac{٥}{٤}} \simeq ٢٥{,}٥٦$

ملاحظة هامة عند حل المعادلة اللوغاريتمية

١ إذا كان : لو$_{م}$ س = لو$_{م}$ ص فإن : س = ص

٢ إذا كانت س ∈ ح* ، م عددًا زوجيًا لا يساوى الصفر ، م ∈ ح$^{+}$ − {١}

فإن : لو$_{م}$ س^{م} = م لو$_{م}$ |س| **فمثلًا :** لو$_{م}$ س^{٤} = ٤ لو$_{م}$ |س|

مثال ٦

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ ٢ لو س − لو (س + ٢) = ٠

٢ لو س^{٢} = لو ٤ + لو ٩

٣ لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س − ٢) = ٣

٤ لو س + لو (س + ٢) = لو (س + ٦)

٥ $\frac{\text{لو ٤٩} - (\text{لو ٧})^{٢}}{\text{لو ٠,٠٧}}$ = لو س

الحـــل

١ ∵ ٢ لو س − لو (س + ٢) = ٠

∴ لو س^{٢} = لو (س + ٢)

∴ س^{٢} = س + ٢

∴ س^{٢} − س − ٢ = ٠

∴ (س − ٢) (س + ١) = ٠

∴ إما س = ٢ (تحقق) أ ، س = −١ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٢}

تذكر أنه

يجب التعويض بالقيم التى نحصل عليها فى المعادلة الأصلية ويكون الحل هو القيمة التى تحقق هذه المعادلة حيث إنه لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب.

٢ ∵ لو س^{٢} = لو ٤ + لو ٩

∴ لو س^{٢} = لو ٣٦

∴ س = ± ٦ (تحقق)

∴ لو س^{٢} = لو (٤ × ٩)

∴ س^{٢} = ٣٦

∴ مجموعة الحل = {٦ ، −٦}

حل آخر : ∵ لو س^{٢} = لو ٤ + لو ٩

∴ لو س^{٢} = لو ٣٦ = لو ٦^{٢}

∴ |س| = ٦

∴ مجموعة الحل = {٦ ، −٦}

∴ لو س^{٢} = لو (٤ × ٩)

∴ ٢ لو |س| = ٢ لو ٦

∴ س = ± ٦ (تحقق)

٣ ∵ لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س − ٢) = ٣

∴ س^{٢} − ٢ س = ٢^{٣} = ٨

∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ مجموعة الحل = {٤}

∴ لو$_{٢}$ س (س − ٢) = ٣

∴ س^{٢} − ٢ س − ٨ = ٠

∴ إما س = ٤ (تحقق) أ ، س = −٢ (مرفوض)

٤ ∵ لو س + لو (س + ٢) = لو (س + ٦)

∴ لو س (س + ٢) = لو (س + ٦)

∴ س (س + ٢) = س + ٦ ∴ س^{٢} + ٢ س − س − ٦ = ٠

∴ س^{٢} + س − ٦ = ٠ ∴ (س + ٣) (س − ٢) = ٠

∴ إما س = −٣ (مرفوض) أ، س = ٢ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٢}

٥ ∵ $\frac{\text{لو } ٤٩ - (\text{لو } ٧)^{٢}}{\text{لو } ٠٫٠٧}$ = لو س ∴ $\frac{\text{لو } ٧^{٢} - (\text{لو } ٧)^{٢}}{\text{لو } \frac{٧}{١٠٠}}$ = لو س

∴ $\frac{٢ \text{ لو } ٧ - (\text{لو } ٧)^{٢}}{\text{لو } ٧ - \text{لو } ١٠٠}$ = لو س

∴ $\frac{\text{لو } ٧ (٢ - \text{لو } ٧)}{\text{لو } ٧ - ٢}$ = لو س

تذكر أن ! لو ١٠٠ = لو ١٠^{٢} = ٢

∴ − لو ٧ = لو س ∴ لو ٧$^{-١}$ = لو س

∴ س = ٧$^{-١}$ = $\frac{١}{٧}$ (تحقق) ∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{٧}$}

مثال ٧

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ لو$_{٣}$ (س^{٢} − ٣ س + ٢) − لو$_{٣}$ (س − ٢) = لو$_{٧}$ ٤٩

٢ لو$_{٢}$ س = لو$_{٤}$ ٢٥

٣ لو$_{٣}$ س × لو$_{٩}$ س = ٢

٤ لو$_{٤}$ س + لو$_{س}$ ٤ = ٢

٥ لو س^{٢} = (لو س)^{٢}

الحل

١ ∵ لو$_{٣}$ (س^{٢} − ٣ س + ٢) − لو$_{٣}$ (س − ٢) = لو$_{٧}$ ٤٩

∴ لو$_{٣}$ $\frac{\text{س}^{٢} - ٣ \text{ س} + ٢}{\text{س} - ٢}$ = لو$_{٧}$ ٧^{٢} ∴ لو$_{٣}$ $\frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)}{\text{س} - ٢}$ = ٢ لو$_{٧}$ ٧

∴ لو$_{٣}$ (س − ١) = ٢ ∴ س − ١ = ٣^{٢}

∴ س = ١ + ٩ = ١٠ ∴ مجموعة الحل = {١٠}

٢ ∵ لو$_{٢}$ س = لو$_{٤}$ ٢٥ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو } ٢} = \frac{\text{لو } ٢٥}{\text{لو } ٤}$

∴ لو س = $\frac{\text{لو } ٥^{٢} \times \text{لو } ٢}{\text{لو } ٢^{٢}} = \frac{٢ \text{ لو } ٥ \times \text{لو } ٢}{٢ \text{ لو } ٢}$ = لو ٥

∴ س = ٥ (تحقق) ∴ مجموعة الحل = {٥}

٣ ∵ لو$_{٣}$ س × لو$_{٩}$ س = ٢

∴ لو$_{٣}$ س × $\frac{\text{لو}_{٣}\text{ س}}{\text{لو}_{٣}\text{ ٩}}$ = ٢

∴ (لو$_{٣}$ س)^{٢} = ٢ لو$_{٣}$ ٩ = ٢ لو$_{٣}$ ٣^{٢} = ٤ لو$_{٣}$ ٣ = ٤

∴ لو$_{٣}$ س = ± ٢

∴ س = ٣^{٢} = ٩ (تحقق) أ، س = ٣$^{-٢}$ = $\frac{١}{٩}$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٩ ، $\frac{١}{٩}$}

٤ ∵ لو$_{٤}$ س + لو$_{\text{س}}$ ٤ = ٢

∴ لو$_{٤}$ س + $\frac{١}{\text{لو}_{٤}\text{ س}}$ = ٢ (بالضرب × لو$_{٤}$ س)

∴ (لو$_{٤}$ س)^{٢} + ١ = ٢ لو$_{٤}$ س

∴ (لو$_{٤}$ س)^{٢} − ٢ لو$_{٤}$ س + ١ = ٠

∴ ((لو$_{٤}$ س) − ١)^{٢} = ٠ ∴ لو$_{٤}$ س = ١

∴ س = ٤ (تحقق) ∴ مجموعة الحل = {٤}

٥ ∵ لو س^{٢} = (لو س)^{٢} ∴ ٢ لو س = (لو س)^{٢} حيث س > ٠

∴ (لو س)^{٢} − ٢ لو س = ٠ ∴ لو س (لو س − ٢) = ٠

∴ إما لو س = ٠ ومنها س = (١٠)$^{\text{صفر}}$ = ١ (تحقق)

أ، لو س = ٢ ومنها س = ١٠^{٢} = ١٠٠ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١ ، ١٠٠}

مثال ٨

إذا كان : س ص = ١٦ **فأثبت أن :** ٣ لو$_{٢}$ س + ٤ لو$_{٢}$ ص − لو$_{٢}$ س ص^{٢} = ٨

الحل

الطرف الأيمن = لو$_{٢}$ س^{٣} + لو$_{٢}$ ص^{٤} − لو$_{٢}$ س ص^{٢}

= لو$_{٢}$ $\frac{\text{س}^{٣} \times \text{ص}^{٤}}{\text{س ص}^{٢}}$ = لو$_{٢}$ س^{٢} ص^{٢} = لو$_{٢}$ (س ص)^{٢}

= ٢ لو$_{٢}$ س ص = ٢ لو$_{٢}$ ١٦ = ٢ لو$_{٢}$ ٢^{٤} = ٢ × ٤ لو$_{٢}$ ٢

= ٨ = الطرف الأيسر.

تمـارين 10 على بعض خواص اللوغاريتمات



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $لو_{٢}$ ٥ × $لو_{٥}$ ٢ = ...

(أ) ١ (ب) ١٠ (جـ) $لو_{٢}$ ١٠ (د) $لو_{٥}$ ١٠

(٢) ١ + لو ٢ = ...

(أ) لو ٥ (ب) ٢ لو ٢ (جـ) لو ٢٠ (د) − لو ٥

(٣) قيمة المقدار : ٢ لو ٢٥ + لو $\frac{٨}{١٥}$ + ٢ لو ٣ − لو ٣٠ = ...

(أ) ٦ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) −١

(٤) أى العبارات الآتية صحيحة ؟

(أ) لو ٢ − لو $\sqrt{٢}$ = لو $\sqrt{٢}$ (ب) $لو_{١}$ ١ = صفر

(جـ) لو $\frac{٧}{٥}$ = $\frac{لو ٧}{لو ٥}$ (د) لو ٧ ÷ لو ٢ = لو ٥

(٥) $لو_{٠,٠٩}$ $(٠,٣)^{-٢}$ = ...

(أ) −١ (ب) −٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٣}$

(٦) إذا كان : $لو_{٢}$ س = ٣ فإن : $لو_{٨}$ س = ...

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ١

(٧) إذا كان : لو س − لو ٢ = لو ٤ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٨) إذا كان : لو س + لو ٥ = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

(٩) ٢ $لو_{٥}$ ٣ + ٣ $لو_{٥}$ ٢ = ...

(أ) $لو_{٥}$ ٦ (ب) ٦ $لو_{٥}$ ٦ (جـ) $لو_{٥}$ ٧٢ (د) $لو_{٥}$ ٣٦

(١٠) $\frac{١}{لو_{٢} ١٤}$ + $\frac{١}{لو_{٧} ١٤}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٧ (د) ١٤

(١١) ٢ $لو_م$ س + $لو_م$ ص − $لو_م$ (س ص) = ...

(أ) لو س (ب) $لو_م$ س (جـ) $لو_م$ س ص (د) $لو_م$ $س^٢$

(١٢) أبسط صورة للمقدار : $لو_ب$ $أ^٢$ × $لو_حـ$ $ب^٣$ × $لو_أ$ حـ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١

(١٣) لو $\left(\frac{أ^٢}{ب حـ}\right)$ = ... حيث أ ، ب ، حـ ∈ $ح^+$

(أ) ٢ لو أ + لو ب + لو حـ (ب) ٢ لو أ − لو ب + لو حـ

(جـ) ٢ لو أ − لو ب − لو حـ (د) ٢ (لو أ − لو ب − لو حـ)

(١٤) إذا كان : أ ∈ $ح^+$ − {١} ، س ، ص ∈ $ح^+$ ، $لو_أ$ ص ≠ ٠ فإن : $\frac{لو_أ س}{لو_أ ص}$ = ...

(أ) $لو_أ$ $\frac{س}{ص}$ (ب) $لو_أ$ (س − ص) (جـ) $لو_أ$ س − $لو_أ$ ص (د) $لو_ص$ س

(١٥) $لو_{أب}$ $\frac{١}{أ}$ + $لو_{أب}$ $\frac{١}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{أ}{ب}$ (ب) $\frac{ب}{أ}$ (جـ) −١ (د) ١

(١٦) 📖 المقدار $\frac{٣ لو ٢}{لو ٤ + لو ٣}$ يكافئ المقدار ....

(أ) $لو_٣$ ٢ (ب) $لو_٧$ ٢ (جـ) $لو_{١٢}$ ٨ (د) $لو_٧$ ٨

(١٧) 📖 إذا كان : $٣^{س}$ = ٥ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) $لو_٣$ ٥ (جـ) $لو_٥$ ٣ (د) $\frac{٥}{٣}$

(١٨) مجموعة حل المعادلة : $لو_٢$ $(٢^{س - ٤})$ = ٥ − س هي ....

(أ) {٤} (ب) {٤ , ٥} (جـ) {٥} (د) {٥ , ٤}

(١٩) مجموعة حل المعادلة : $لو_{\sqrt{٢}}$ س + $لو_{\sqrt{٢}}$ (س + ١) = ٢ هي ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {−٢} (جـ) {١ ، −٢} (د) {١}

(٢٠) مجموعة حل المعادلة : ٢ لو ٢ − لو س = لو (س + ٣) − لو ٧ هي ....

(أ) {٧} (ب) {٤} (جـ) {٧ ، ٤} (د) ∅

(٢١) إذا كان : س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ فإن : لو $\left(س + \frac{١}{س}\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) ٥ − ٢ $\sqrt{٦}$ (جـ) ١٠ (د) ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$

(٢٢) إذا كان : $لو_٣$ س = $لو_٩$ ٢٥ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) $\frac{٢٥}{٣}$

(٢٣) مجموعة حل المعادلة : لو$_{٢}$ س + لو$_{٤}$ س = ٣ هى ....

(أ) {٢}　　(ب) {٤}　　(جـ) {٢ ، ٤}　　(د) {٠}

(٢٤) إذا كان : لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ س^{٢} = ٦　　فإن : س = ...

(أ) ٢　　(ب) ٤　　(جـ) ٦　　(د) ٢١٦

(٢٥) مجموعة حل المعادلة : لو س^{٢} − (لو س)^{٢} = ٠ هى ....

(أ) {١}　　(ب) {١ ، ١٠}　　(جـ) {١ ، ١٠٠}　　(د) {١٠٠}

(٢٦) مجموعة حل المعادلة : (لو$_{٣}$ س)^{٢} − لو$_{٣}$ س^{٣} + ٢ = ٠　هى ....

(أ) {٣}　　(ب) {٣ ، ٩}　　(جـ) {٩}　　(د) {١ ، ٢}

(٢٧) مجموعة حل المعادلة : لو$_{٣}$ س − ٢ لو$_{س}$ ٣ = ١ فى ح هى ....

(أ) {٨ ، ٣}　　(ب) {٨ ، $\frac{١}{٣}$}　　(جـ) {٩ ، $\frac{١}{٣}$}　　(د) {٨}

(٢٨) إذا كان : لو ٢٣ = أ　　فإن : لو ٢٣٠٠ = ...

(أ) أ + ٢　　(ب) أ − ٢　　(جـ) ١٠٠ أ　　(د) أ^{٢}

(٢٩) إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٤ = ص　　فإن : لو ١٢ = ...

(أ) س + ص　　(ب) س ص　　(جـ) س − ص　　(د) لو س + لو ص

(٣٠) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ فيه : أ ب = (لو$_{٤}$ ٣) سم ، أ حـ = (لو$_{٣}$ ٦٤) سم

فإن مساحة △ أ ب حـ = ... سم^{٢}

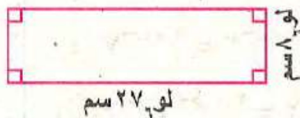
(أ) ١,٥　　(ب) ٣　　(جـ) لو ١٦　　(د) لو$_{٣}$ ١٦

(٣١) إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : ٣ س^{٢} − ١٦ س + ١٢ = ٠

فإن قيمة : لو$_{٢}$ ل + لو$_{٢}$ م = ...

(أ) ٢　　(ب) ٤　　(جـ) ١٢　　(د) ١٦

(٣٢) فى الشكل المقابل :



محيط الشكل = ... سم

(أ) ٢ لو$_{٢}$ ٣٥　　(ب) لو$_{٢}$ ٧٠　　(جـ) ٣　　(د) ٦

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) لو$_{٣}$ ٢ + لو$_{٣}$ $\frac{١}{٢}$ «٠»

(٢) لو$_{٢}$ ٤ + لو$_{٢}$ ١٦ «٦»

(٣) ٣ لو$_{٣}$ ٥ + لو$_{٣}$ $\frac{٢٤٣}{١٢٥}$ «٥»

(٤) لو$_{٣}$ ٨١ × لو$_{٩}$ ٣ «٢»

(٥) لو$_{٦}$ ٥٤ − لو$_{٦}$ ٩ «١»

(٦) لو$_{٢}$ ١٢ + لو$_{٢}$ $\frac{٢}{٣}$ «٣»

(٧) لو ٤٨ + لو ١٢٥ − لو ٦ «٣»

(٨) لو$_{٢}$ ١٥ + لو$_{٢}$ ١٤ − لو$_{٢}$ ١٠٥ «١»

(٩) لو$_{٢}$ $\frac{٣}{٢٥}$ + ٥ لو$_{٢}$ ٥ + لو$_{٢}$ ٢٧ − لو$_{٢}$ $\frac{١٢٥}{١٢}$ − لو$_{٢}$ ٢٤٣ «٢»

(١٠) لو$_{٢}$ ١٦ + لو$_{٣}$ $\sqrt{٣}$ + لو ٠,١ «$٣\frac{١}{٢}$»

(١١) $\frac{١ - \text{لو } ٢}{\text{لو } ١٢٥}$ «$\frac{١}{٣}$»

(١٢) $\frac{\text{لو } ٤٩ + ٣ \text{ لو } ٧}{\text{لو } ٧}$ «٥»

(١٣) ١ + لو ٣ − لو ٢ − لو ١٥ «٠»

(١٤) لو ٢٥ + $\frac{\text{لو } ٨ \times \text{لو } ١٦}{\text{لو } ٦٤}$ «٢»

(١٥) لو$_{\text{س ص}}$ س + لو$_{\text{س ص}}$ ص «١»

(١٦) لو$_{\text{أ ب ح}}$ أ + لو$_{\text{أ ب ح}}$ ب + لو$_{\text{أ ب ح}}$ ح «١»

(١٧) $\frac{١}{\text{لو}_{٢} ١٢} + \frac{١}{\text{لو}_{٨} ١٢} + \frac{١}{\text{لو}_{٩} ١٢}$ «٢»

(١٨) $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ أ + $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ ب + ٢ لو$_{٣}$ ح − لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أ ب}}$ − لو$_{٣}$ ٣ ح^{٢} «−١»

---

٢ بدون استخدام حاسبة الجيب أثبت كلًا مما يأتى :

(١) لو$_{٤}$ ١٦ + لو$_{٤}$ ٦٤ = ٥

(٢) لو$_{٣}$ ٢٤٣ − لو$_{٣}$ ٩ = ٣

(٣) لو$_{٥}$ ١٢٥ + لو ١٠ + لو$_{٣}$ (٢٥ + ٢) = ٧

(٤) لو$_{٢}$ $\frac{٤}{١١}$ − لو$_{٢}$ $\frac{٧}{١٣٠}$ + لو$_{٢}$ $\frac{٧٧}{٦٥}$ = لو$_{٥}$ ١٢٥

(٥) لو (٤^{٢} − ٢^{٢}) − (لو ٤^{٢} − لو ٢^{٢}) = لو ٣

(٦) (١ − لو ٥) (٢ − لو ٢٥) = ٢ (لو ٢)^{٢}

(٧) $\frac{\text{لو}_{٢} ٢٤٣ - \text{لو}_{٢} ٣٢}{\text{لو}_{٢} ٢٧ - \text{لو}_{٢} ٨} = \frac{٥}{٣}$

(٨) $\frac{(\text{لو } ٥)^{٢} - \text{لو } ٥^{٢}}{\text{لو } ٥ - \text{لو } ١٠٠}$ = ١ − لو ٢

---

٣ باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين فى كل مما يأتى :

(١) ٣$^{\text{س} + ٢}$ = ٦ «−٠,٣٧»

(٢) ٥$^{\text{س} - ١}$ = ٢ «١,٤٣»

(٣) ٤ × ٧$^{\text{س} - ٢}$ = ١ «١,٢٩»

(٤) $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{\text{س}}$ = ٠,٠٤٢ «٣,٤٦»

(٥) ٧$^{\text{س} + ١}$ = ٣$^{\text{س} - ٢}$ «−٤,٨٩»

(٦) ٣$^{٢\text{س} - ٣}$ = ١١$^{١ - \text{س}}$ «١,٢٤»

(٧) ٢$^{\text{س} - ٣}$ = ٣$^{\text{س} + ١}$ «−٧,٨٤»

(٨) س^{١,٦} = ٩٤,٥ «± ١٧,١٧»

(٩) ٧$^{\text{س} + ١}$ + ٧$^{\text{س} - ١}$ = ٣٠٠ «١,٩٢»

(١٠) ٢٥$^{\text{س}}$ − ٢٧ × ٥$^{\text{س}}$ + ٥٠ = ٠ «٠,٤٣ ، أ ٢»



٤ إذا كان : لو$_{٢}$ ٧ ≃ ٢,٨٠٧ فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة :

(١) لو$_{٢}$ ١٤ (٢) لو$_{٢}$ ٥٦ (٣) لو$_{٢}$ $\frac{٧}{٤}$

---

٥ إذا كان : لو ٢ ≃ ٠,٣٠١ ، لو ٣ ≃ ٠,٤٧٧١ فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة :

(١) لو ٦ (٢) لو ٩ (٣) لو ١٢

---

٦ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) لو س = لو ٣ + لو ١٠ «{٣٠}»

(٢) لو$_{٥}$ س − لو$_{٥}$ ٢ = ٢ «{٥٠}»

(٣) لو$_{٣}$ (س + ٦) = ٢ لو$_{٣}$ س «{٣}»

(٤) لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س + ٢) = ٣ «{٢}»

(٥) لو (س + ٣) − لو ٣ = لو س «{$\frac{٣}{٢}$}»

(٦) لو$_{٢}$ (س − ١) − لو$_{٢}$ (س − ٢) = ٢ «{$\frac{٧}{٣}$}»

(٧) لو$_{٣}$ س + لو$_{٣}$ س^{٢} = ٣ «{٣}»

(٨) لو (س + ١) + لو (س − ١) = لو (س + ٥) «{٣}»

(٩) لو (س + ٨) − لو (س − ١) = ١ «{٢}»

(١٠) لو$_{٥}$ س^{٢} + لو$_{٥}$ ٢ = لو$_{٥}$ ١٨ «{٣ ، −٣}»

(١١) لو$_{٣}$ (٧ س^{٢} − ٤) = ٢ لو$_{٣}$ س + $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ ٩ «{١}»

(١٢) لو (س + ٢) + لو (س − ٢) = ١ − لو ٢ «{٣}»

(١٣) لو$_{٢}$ س = لو$_{٤}$ ٩ «{٣}»

(١٤) لو$_{٣}$ س = لو$_{س}$ ٣ «{٣ ، $\frac{١}{٣}$}»

(١٥) لو س = $\frac{(\text{لو } ٣)^{٢} - \text{لو } ٢٧}{\text{لو } ٠,٠٠٣}$ «{٣}»

(١٦) (لو س)^{٢} − لو س^{٢} = ٣ «{١٠٠٠ ، ٠,١}»

---

٧ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $\frac{١}{\text{لو}_{٢} \text{س}}$ + $\frac{١}{\text{لو}_{٣} \text{س}}$ = ٢ «{$\sqrt{٦}$}»

(٢) لو س − $\frac{٣}{\text{لو س}}$ = ٢ «{١٠٠٠ ، ٠,١}»

(٣) لو ٧ × لو ٧٢٩ = لو ٤٩ × لو س^{٣} «{٣}»

(٤) لو$_{٢}$ س + لو$_{س}$ ٢ = ٢ «{٢}»

(٥) (لو س)^{٣} = لو س^{٩} «{١ ، ١٠٠٠ ، ٠,٠٠١}»

(٦) لو$_{٢}$ (س^{٢} + ٦ س + ٩) − لو$_{٢}$ (س − ١) = لو$_{٥}$ ٦٢٥ «{٥}»

(٧) لو$_{٢}$ س + لو$_{٤}$ س = $\frac{-٣}{٢}$ «{$\frac{١}{٢}$}»

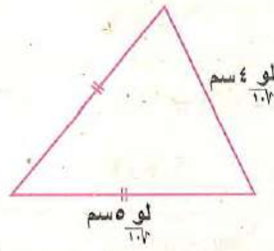
٨ أوجد محيط كل من الشكلين الآتيين فى أبسط صورة :

①



« ٦ سم »

②



« ٤ سم »

---

٩ أثبت أن : $\text{لو}_{ب}\, أ \times \text{لو}_{ح}\, ب \times \text{لو}_{ء}\, ح \times \text{لو}_{أ}\, ء = ١$

ثم احسب قيمة : $\text{لو}_{٢}\, ٣ \times \text{لو}_{٣}\, ٥ \times \text{لو}_{٥}\, ١٦$ « ٤ »

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أى العبارات الآتية صحيحة ؟

(أ) لو ٣ + لو ٣ = لو ٦ (ب) ١ − لو ٥ = ٢

(جـ) لو ٢ × لو ٢ = لو ٤ (د) لو (١ + ٢ + ٣) = لو ١ + لو ٢ + لو ٣

② إذا كان : $\frac{\text{لو } س}{\text{لو } ٥} = \frac{\text{لو } ٣٦}{\text{لو } ٦} = \frac{\text{لو } ٦٤}{\text{لو } ص}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ٣٣

③ $\frac{١}{١ + \text{لو}_{ب}\, أ + \text{لو}_{ب}\, ح} + \frac{١}{١ + \text{لو}_{ح}\, أ + \text{لو}_{ح}\, ب} + \frac{١}{١ + \text{لو}_{أ}\, ب + \text{لو}_{أ}\, ح} = ...$

(أ) $\text{لو}_{أ}\, ب ح$ (ب) $\text{لو}_{ب}\, أ ح$ (جـ) $\text{لو}_{ح}\, أ ب$ (د) ١

④ إذا كان : $\frac{١}{\text{لو}_{٢}\, س} + \frac{١}{\text{لو}_{٤}\, س} + \frac{١}{\text{لو}_{٨}\, س} + \frac{١}{\text{لو}_{١٦}\, س} = ٥$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

تطبيقات حياتيـــة  علـى الوحـدة الثانية

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

١ 📖 **الربط بالاقتصاد :**

إذا علم أن الفائدة ($ر$) لأحد البنوك على مبلغ وقدره ($أ$) بعد ($ن$) سنة تعطى بالعلاقة $ر = \left(\frac{ح}{أ}\right)^{\frac{1}{ن}} - 1$

حيث $ح$ جملة المبلغ بعد $ن$ سنة. فإذا أودع جمال مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه وبعد ٣ سنوات أصبحت جملة المبلغ ١٢٥٩٧ جنيهًا أوجد النسبة المئوية السنوية للفائدة. «٨٪»

---

٢ 📖 **الربط بالتجارة :**

بدأ محمد مشروع تربية الأرانب ، فإذا كان عدد الأرانب فى بداية المشروع هو ٧٥ أرنبًا وكان عدد الأرانب فى تكاثرها يتبع العلاقة $ع = ٧٥ \, (٤,٢٢)^{\frac{ن}{٦}}$ حيث $ن$ عدد الأشهر.

أوجد العدد المتوقع للأرانب بعد مرور ٥ أشهر. «٢٤٩ أرنبًا»

---

٣ 📖 **الربط بالحجوم :**

إذا كان طول حرف المكعب ل يتحدد بالعلاقة $ل = \sqrt[3]{ح}$ حيث $ح$ حجم المكعب بالوحدات المكعبة. أوجد طول حرف مكعب حجمه ١٣٣١ سم^3 «١١ سم»

---

٤ **الربط بالهندسة :**

إذا كان طول نصف قطر كرة نق يعطى بدلالة الحجم $ح$ من العلاقة $نق = \left(\frac{٣ ح}{٤ \pi}\right)^{\frac{1}{3}}$

أوجد الزيادة فى طول نصف القطر عندما يتغير الحجم من $\frac{٣٢}{٣} \pi$ إلى ٣٦π وحدة مكعبة.

«١ وحدة طولية»

---

٥ 📖 تتناقص أعداد الكائنات البحرية تبعًا لدالة التضاؤل الأسى $ص = ٨١٩٢ \left(\frac{1}{2}\right)^{ن - 1}$ حيث $ن$ عدد الأسابيع بدءًا من الآن.

أوجد : (١) عدد هذه الكائنات بعد مرور ٤ أسابيع من الآن. «١٠٢٤ كائنًا»

(٢) بعد كم أسبوع من الآن يصبح عدد هذه الكائنات ٢٥٦ «٦ أسابيع»

---

٦ 📖 **الربط بالأحياء :** يتكاثر أحد الكائنات الدقيقة بطريقة الانقسام الثنائى بحيث يتضاعف عدد هذه الكائنات كل ساعة نتيجة انقسام كل خلية إلى خليتين ، فإذا كان عدد الخلايا عند بداية القياس ٢٠ ألف خلية **أوجد :**

(١) عدد الخلايا بعد مرور ٥ ساعات. «٦٤٠٠٠٠ خلية»

(٢) بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا ٢ مليون و٥٦٠ ألف خلية. «٧ ساعات»

٧ إذا كانت العلاقة بين درجات تذكر أحد الطلاب بالمعلومات التى درسها فى الصف الأول الثانوى وعدد الأشهر ($ن$) التى تبدأ من نهاية تدريس الصف هى :

د ($ن$) = ٧٠ − ٤ لو$_{٢}$ ($ن$ + ١) فأوجد درجات هذا الطالب :

(١) فى نهاية تدريس الصف الأول الثانوى ($ن$ = ٠) «٧٠ درجة»

(٢) بعد مرور ٧ أشهر من تدريس الصف الأول الثانوى. «٥٨ درجة»

---

٨ تطبق إحدى الدول نظامًا ضريبيًا بحيث يدفع الممول الضريبة المستحقة سنويًا وفقًا للدالة :

د : د (س) = { ١٠٪ س عندما س ≤ ٥٠٠٠ ، ١٠٪ س + ١٠٠ لو (س − ٤٩٩٩) عندما س > ٥٠٠٠ }

حيث س هى صافى الربح السنوى. أوجد :

(١) الضريبة المستحقة على أحد المولين الذين يبلغ صافى ربحهم السنوى ٣٦٠٠ جنيه.

(٢) الضريبة المستحقة على أحد المولين الذين يبلغ صافى ربحهم السنوى ٨٠٠٠ جنيه.

«٣٦٠ جنيهًا ، ١١٤٧,٧٢٦٦ جنيهًا»

---

٩ **الربط بالسكان :** إذا كان عدد سكان إحدى المدن يتزايد بمعدل سنوى قدره ٧ ٪

(١) أوجد العلاقة التى توضح عدد السكان بعد عام.

(٢) بعد كم سنة يتضاعف عدد السكان إذا استمرت الزيادة بهذا المعدل ؟ «١٠ سنوات»

---

١٠ إذا كان عدد سكان إحدى المدن ابتداءً من عام ٢٠١٠ يُعطى بالعلاقة

ع = ١٠^{٥} (١,٣)$^{ن - ٢٠١٠}$ ، حيث ع عدد السكان ، $ن$ السنة.

(١) احسب عدد سكان هذه المدينة عام ٢٠١٥

(٢) فى أى سنة يصبح عدد سكان هذه المدينة ١,٤ مليون نسمة ؟ «٣٧١٢٩٣ نسمة ، ٢٠٢٠»

---

١١ **الربط بالصناعة :** إذا كانت كفاءة عمل إحدى الآلات تتناقص سنويًا طبقًا للعلاقة ك = ك. (٠,٩)^{ن}

حيث ك كفاءة الآلة، ك. الكفاءة الابتدائية للآلة ، $ن$ عدد سنوات عمل الآلة.

فإذا عُلِمَ أنَّ الآلة تتوقف عن العمل إذا بلغت كفاءتها ٤٠٪ من كفاءتها الابتدائية فما عدد السنوات التى تعملها هذه الآلة قبل أنْ تتوقف عن العمل ؟ «٩ سنوات»



ثانيًا

التفاضل وحساب المثلثات

الوحدة 3 النهايات

الوحدة 4 حساب المثلثات

الوحدة الثالثة

النهايات



الدرس 1 مقدمة فى النهايات «إيجاد النهاية عدديًا وبيانيًا».

الدرس 2 إيجاد نهاية الدالة جبريًا.

الدرس 3 نظرية (٤) «القانون».

الدرس 4 نهاية الدالة عند اللا نهاية.

الدرس

1

مقدمة فى النهايات «إيجاد النهاية عدديًا وبيانيًا»

الكميات المعينة وغير المعينة وغير المعرفة

عند إجراء العمليات الحسابية على ح نتعرض إلى واحدة من ثلاثة أنواع من الكميات وهى :

١ الكمية المعينة : هى الكمية التى لها ناتج محدد :

فمثلًا : $\frac{٨}{٥}$ كمية معينة أى لها ناتج محدد هو ١,٦

لأن : العدد الحقيقى الذى إذا ضرب فى ٥ كان الناتج ٨ هو ١,٦

ومن أمثلة الكميات المعينة : $\frac{٠}{٣}$ ، ٥ × ٠ ، ٧ × ٣ ، .....

٢ الكمية غير المعينة : هى الكمية التى ليس لها جواب محدد :

فمثلًا : $\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة أى لها عدد لا نهائى فى ح من الإجابات الصحيحة

لأن : حاصل ضرب أى عدد حقيقى × صفر = صفر

مع ملاحظة أنه توجد كميات أخرى غير معينة سنتعرض لها فى دراستنا لاحقًا.

٣ الكمية غير المعرفة : هى الكمية التى ليس لها معنى :

فمثلًا : $\frac{٥}{صفر}$ كمية غير معرفة أى ليس لها معنى.

لأنه : لا يوجد عدد حقيقى إذا ضرب × صفر كان الناتج = ٥

وبصفة عامة : $\frac{أ}{صفر}$ حيث أ ∈ ح - {٠} كمية غير معرفة.

الرمزان ∞ ، - ∞

* الرمز ∞ (لا نهاية) ليس عددًا حقيقيًا ولكنه يعبر عن كمية أكبر من أى عدد حقيقى موجب يمكن إدراكه.

* الرمز - ∞ (سالب لا نهاية) ليس عددًا حقيقيًا ولكنه يعبر عن كمية أصغر من أى عدد حقيقى سالب يمكن إدراكه.

* والتعامل بالرمزين ∞ ، − ∞ عند إجراء العمليات الحسابية يخضع للخواص الآتية :

بفرض أن أ عدد حقيقى فإن :

١ ∞ ± أ = ∞ ، − ∞ ± أ = − ∞

٢ ∞ × أ = ∞ عندما أ > ٠ ، − ∞ عندما أ < ٠ ، كمية غير معينة عندما أ = ٠

، − ∞ × أ = − ∞ عندما أ > ٠ ، ∞ عندما أ < ٠ ، كمية غير معينة عندما أ = ٠

معلومة إثرائية

الصور غير المعينة سبع هى :

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، ∞ − ∞ ، ∞ × صفر

، $(\text{صفر})^{\text{صفر}}$ ، $(\infty)^{\text{صفر}}$ ، $(1)^{\infty}$

فمثلًا : ∞ ± ٧ = ∞ ، − ∞ ± ٢ = − ∞ ، ∞ × ١٥ = ∞

، − ∞ × ٧ = − ∞ ، ∞ + ∞ = ∞ ، − ∞ × −٢ = ∞

مفهوم نهاية الدالة عند نقطة

مثال توضيحى

إذا أردنا إيجاد قيمة الدالة د : د (س) = $\frac{س^2 - 1}{س - 1}$ عند س = ١ فإننا نجد أن : د (١) = $\frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

وهى كمية غير معينة أى أننا لم نستطع تعيين قيمة للدالة عند س = ١ ولذلك نلجأ إلى دراسة اقتراب د (س) من قيمة معينة كلما اقتربت س من العدد ١ وذلك بإحدى الطريقتين التاليتين :

١ إيجاد النهاية عدديًا

أعطِ قيمًا للمتغير س تقترب شيئًا فشيئًا من العدد ١ من خلال قيم أكبر من ١ وقيم أصغر من ١ دون أن تأخذ س القيمة ١ وملاحظة ما يحدث لقيم د (س) المناظرة كما بالجدول التالى :

س تقترب من ١ (من اليمين) ←   → س تقترب من ١ (من اليسار)

س	١,٥	١,٤	١,٣	١,٢	١,١		٠,٩	٠,٨	٠,٧	٠,٦	٠,٥
د (س)	٢,٥	٢,٤	٢,٣	٢,٢	٢,١		١,٩	١,٨	١,٧	١,٦	١,٥

د (س) تقترب من ٢ ←   → د (س) تقترب من ٢

نجد أنه :

كلما اقتربت س من العدد ١ (من اليمين واليسار) وتكتب رياضيًا (س ← ١) وتقرأ «س تقترب من أو تؤول إلى ١» فإن : د (س) تقترب من العدد ٢ أى : د (س) ← ٢

والأسلوب السابق الذى اتبعناه فى دراسة اقتراب د (س) من العدد ٢ كلما اقتربت س من العدد ١ يعرف بأسم إيجاد نهاية الدالة عند نقطة ونعبر عن ذلك رمزيًا بأن نكتب : $\lim_{س \to 1}$ د (س) = ٢

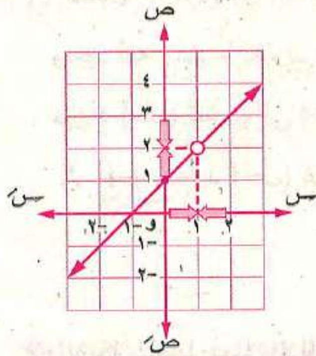
إلا أن هذا الأسلوب المستخدم فى حساب نهاية الدالة عند نقطة يحتاج إلى الكثير من الوقت والجهد.

تعريف

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل عندما تقترب س من أ من جهتي اليمين واليسار فإن نهاية د (س) تساوى ل وتكتب رمزيًا $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}\ د(س) = ل$

وتقرأ : نهاية د (س) عندما تقترب س من أ تساوى ل

٢ إيجاد النهاية بيانيًا



∵ $د(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ دالة غير معرفة عند س = ١

∴ $د(س) = \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)} = س + ١$

أى أنها تمثل بخط مستقيم به ثقب عند النقطة التى إحداثيها السينى = ١ كما بالشكل المقابل

ومن الرسم نلاحظ أنه : عند س $\xleftarrow{\text{تؤول إلى}}$ ١ (من اليمين واليسار)

فإن : د (س) $\xleftarrow{\text{تؤول إلى}}$ ٢ أى أن : $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ د(س) = ٢$

ملاحظة

عند إيجاد $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}\ د(س)$ ليس من الضرورى أن تكون الدالة معرفة عند س = أ والعكس إذا كانت الدالة معرفة عند س = أ فهذا لا يعنى وجود نهاية للدالة عند س = أ

ملاحظات هامة عند إيجاد نهاية الدالة بيانيًا :

١ فى الشكل المقابل نجد أن :

أولًا : عند س = ١ : د (١) = ١

، $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ د(س)$ غير موجودة «توجد قفزة عند س = ١»

لاحظ أنه : بالرغم من أن د معرفة عند س = ١ إلا أن النهاية غير موجودة

ثانيًا : عند س = ٢ : د (٢) = ٢ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\ د(س) = ١$

[لاحظ أنه ليس من الضرورى أن قيمة الدالة تساوى قيمة النهاية]

ثالثًا : عند س = ٣ : د (٣) = ٢ ، $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}}\ د(س) = ٢$

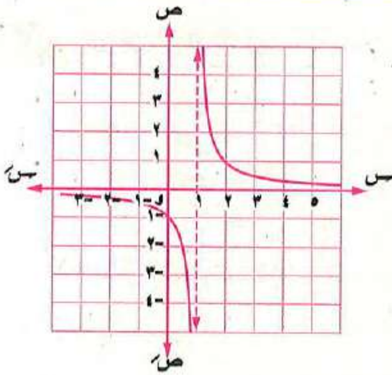
رابعًا : عند س = ٤ : د (٤) غير معرفة ، $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهــا}}\ د(س) = ١$ «توجد فجوة عند س = ٤»

[لاحظ أن النهاية موجودة على الرغم من أن الدالة غير معرفة]

ملاحظـــة

من الرسم البيانى للدالة فى الشكل السابق نجد أن :

* النقطة التى تمثل بفجوة لا تؤثر فى وجود نهاية عندها.
* النقطة التى عندها قفزة تؤدى إلى عدم وجود نهاية.

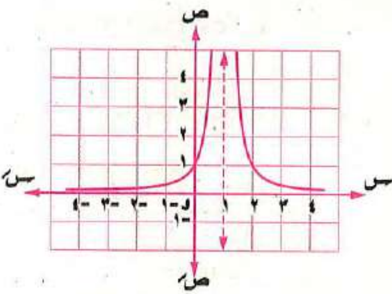


٢ الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س - ١}$

ونجد أنه : عندما تقترب س إلى ١ من اليمين واليسار

فإن د (س) تقترب إلى ∞ ، − ∞ على الترتيب

∴ $\lim_{س \to ١}$ د (س) غير موجودة.



٣ الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) = $\frac{١}{(س - ١)^٢}$

ونجد أنه : عندما تقترب س إلى ١ من اليمين واليسار

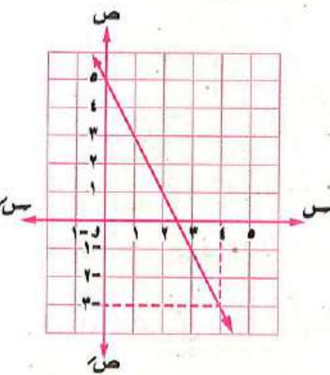
فإن د (س) تقترب من ∞

∴ $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ∞

مثال ١

أوجد : $\lim_{س \to ٤}$ (٥ − ٢ س) بيانيًا وعدديًا.

الحــل



* بيانيًا : نمثل الدالة الخطية د : د (س) = ٥ − ٢ س

كما بالشكل المقابل :

نلاحظ أنه عندما س ⟵ ٤ فإن : د (س) ⟵ −٣

أى أن : $\lim_{س \to ٤}$ (٥ − ٢ س) = −٣

* عدديًا : نكون جدولًا لقيم د (س) وذلك باختيار قيم س تقترب من العدد ٤ من اليمين واليسار كما يلى :

س	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١	....	٤	....	٣,٩٩٩	٣,٩٩	٣,٩
د (س)	−٣,٢	−٣,٠٢	−٣,٠٠٢	....	−٣	....	−٢,٩٩٨	−٢,٩٨	−٢,٨

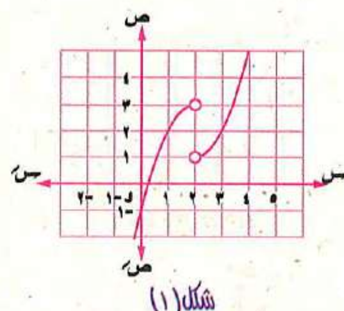
نلاحظ من الجدول أنه كلما تقترب س من العدد ٤ من اليمين أو اليسار

فإن : قيم د (س) تقترب من العدد −٣ ∴ $\lim_{س \to ٤}$ (٥ − ٢ س) = −٣

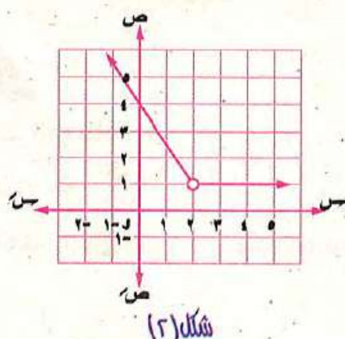
مثال ٢

ادرس كلًا من الأشكال الآتية ثم أوجد قيمة :

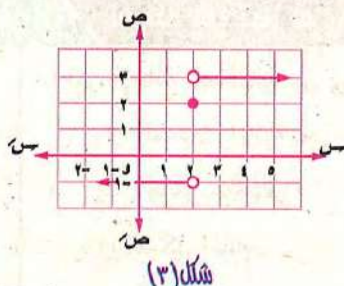
١ د (٢) ٢ نهــا (س ← ٢) د (س)



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحــل

فى شكل (١) : د (٢) غير معرفة ، نهــا (س ← ٢) د (س) غير موجودة.

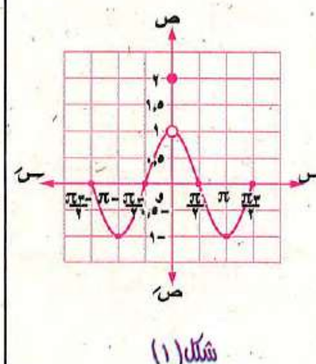
فى شكل (٢) : د (٢) غير معرفة ، نهــا (س ← ٢) د (س) = ١

فى شكل (٣) : د (٢) = ٢ ، نهــا (س ← ٢) د (س) غير موجودة.

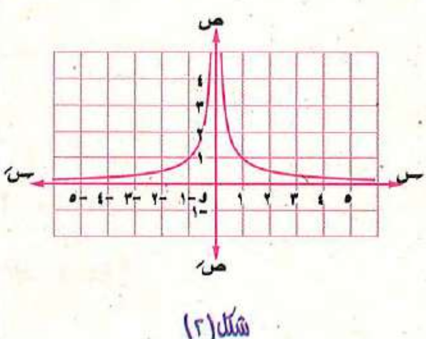
مثال ٣

ادرس كلًا من الأشكال الآتية ثم أوجد فى كل شكل قيمة :

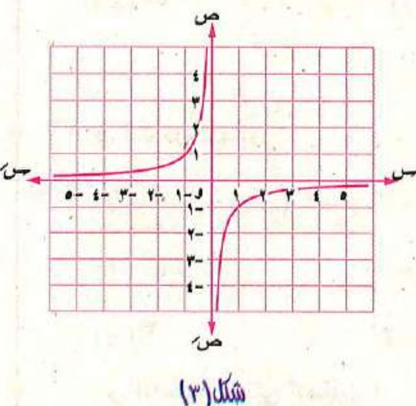
١ د (٠) ٢ نهــا (س ← ٠) د (س)



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحــل

فى شكل (١) : د (٠) = ٢ ، نهــا (س ← ٠) د (س) = ١

فى شكل (٢) : د (٠) غير معرفة ، نهــا (س ← ٠) د (س) = ∞

فى شكل (٣) : د (٠) غير معرفة ، نهــا (س ← ٠) د (س) غير موجودة.

تمـارين 11

على مقدمة فى النهايات
« إيجاد النهاية عدديًا وبيانيًا »

من أسئلة الكتاب المدرسى ● فهـم ○ تطبيق ⁂ مستويات عليا

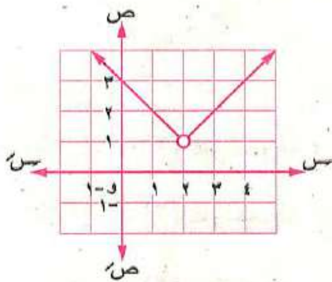
أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) كل الكميات الآتية غير معينة ماعدا ....

(أ) صفر ÷ صفر (ب) ∞ − ∞ (جـ) ∞ + ∞ (د) ∞ ÷ ∞

(٢) فى الشكل المقابل :

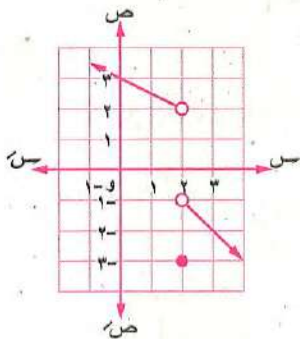


نهـــــا د (س) = ...
س ← ٢

(أ) ١ (ب) −١

(جـ) غير موجودة. (د) ٢

(٣) فى الشكل المقابل :

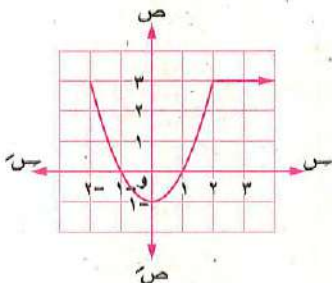


نهـــــا د (س) = ...
س ← ٢

(أ) −٣ (ب) ٢

(جـ) −١ (د) غير موجودة.

(٤) فى الشكل المقابل :

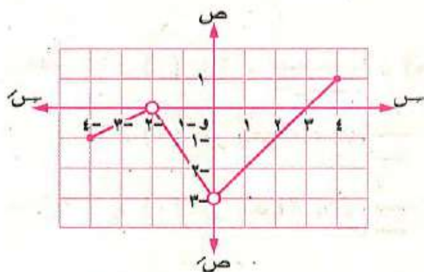


نهـــــا د (س) = ...
س ← ٢

(أ) صفر (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) غير موجودة.

(٥) من الشكل البيانى المقابل :



أولًا : نهـــــا د (س) = ...
س ← −٢

(أ) صفر (ب) −٣

(جـ) −٢ (د) غير موجودة.

ثانيًا : $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) −٣ (د) غير موجودة.

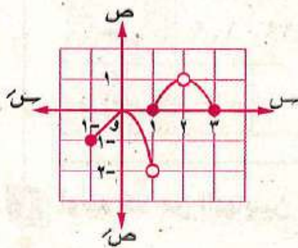
ثالثًا : $\lim_{س \to -٤}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −٤ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

رابعًا : $\lim_{س \to ٤}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

⑥ بالاستعانة بالشكل المقابل :



أولًا : $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −٢

(جـ) ١ (د) غير موجودة.

ثانيًا : $\lim_{س \to -١}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) −٢ (د) غير موجودة.

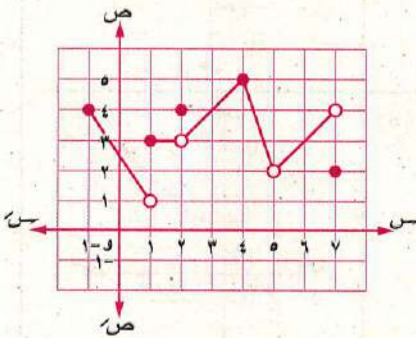
ثالثًا : $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) غير موجودة.

رابعًا : $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

⑦ بالاستعانة بالشكل المقابل :



أولًا : $\lim_{س \to -١}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −١

(جـ) ٤ (د) غير موجودة.

ثانيًا : د (٢) = ...

(أ) صفر (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) غير معرفة.

ثالثًا : د (٥) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) غير معرفة.

رابعًا : $\lim_{س \to ٥}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) غير موجودة.

خامسًا : $\lim_{س \to ٧}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أكمل الجدول الآتى واستنتج : $\lim_{س \to ٢}$ د (س) حيث د (س) = ٥ س + ٤

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د (س)	....	....	....	←	؟	→	....	....	....

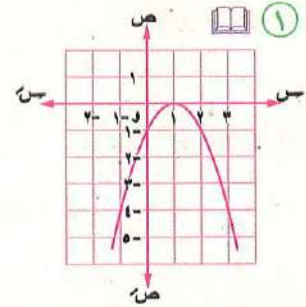
٢ أكمل الجدول الآتى واستنتج : $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س^٢ - ٤}$

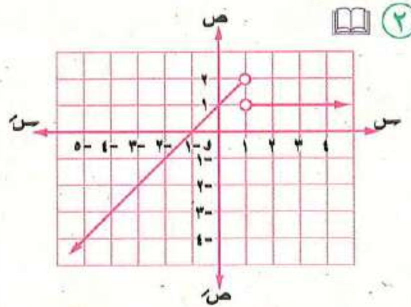
س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د (س)	....	....	....	←	؟	→	....	....	....

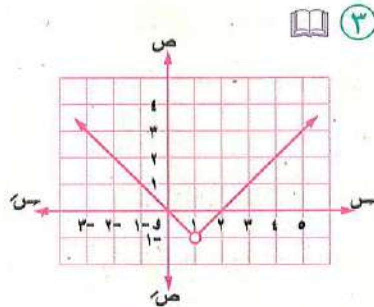
٣ أوجد كلًا من النهايتين الآتيتين بيانيًا وعدديًا :

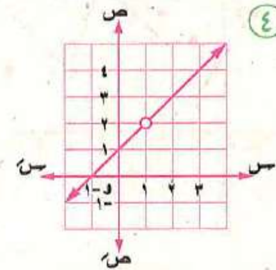
(١) $\lim_{س \to ٤}$ (٢ س − ٥) (٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$

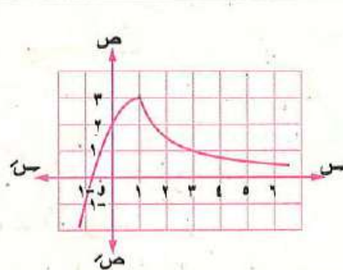
٤ فى كل من الأشكال الآتية ، أوجد $\lim_{س \to ١}$ د (س) :

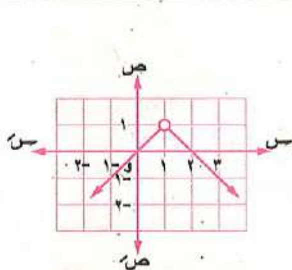
(١)


(٢)


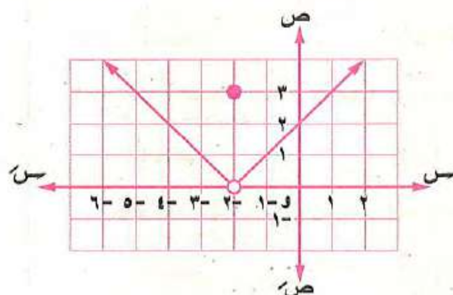
(٣)


(٤)


(٥)


(٦)


٥ من الرسم البيانى المقابل أوجد :



(١) $\lim_{س \to -٢}$ د (س)

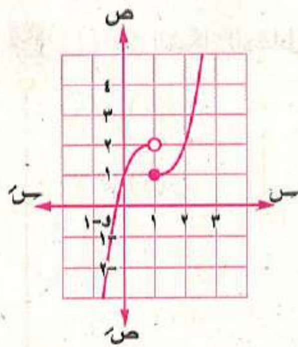
(٢) د (−٢)

(٣) $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

(٤) د (٠)



٦ ادرس الشكل المقابل ثم أوجد :

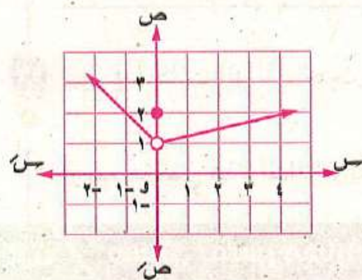


① د (١)

② نهـــا د (س)
س ← ١

---

٧ ادرس الشكل المقابل ثم أوجد :



① د (٠)

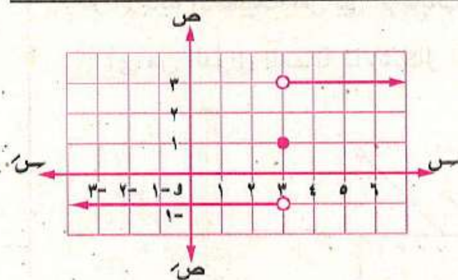
② نهـــا د (س)
س ← ٠

③ د (٢)

④ نهـــا د (س)
س ← ٢

---

٨ من الشكل المقابل أوجد (إن أمكن) ما يأتى :

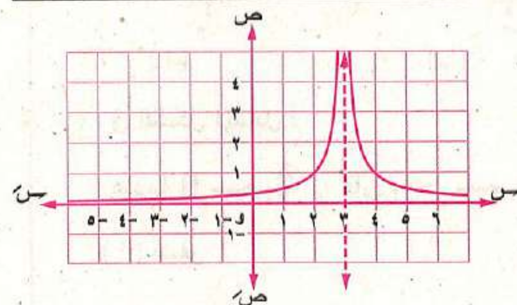


① د (٣)

② نهـــا د (س)
س ← ٣

---

٩ من الشكل المقابل أوجد إن أمكن ما يلى :

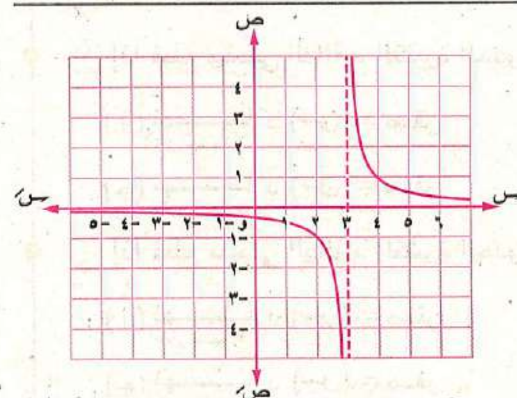


① د (٣)

② نهـــا د (س)
س ← ٣

---

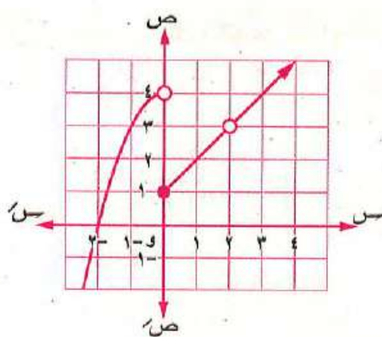
١٠ من الشكل المقابل أوجد إن أمكن ما يلى :



① د (٣)

② نهـــا د (س)
س ← ٣

١١ من الشكل المقابل أوجد :



① د (٠) | ② $\lim_{س \to ٠}$ د (س)
③ د (٢) | ④ $\lim_{س \to ٢}$ د (س)

---

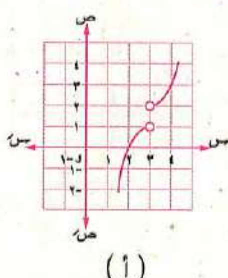
١٢ إذا كانت الدالة د حيث د (س) = { س ، عندما س < ٢ ؛ س + ٢ ، عندما س ≥ ٢ }

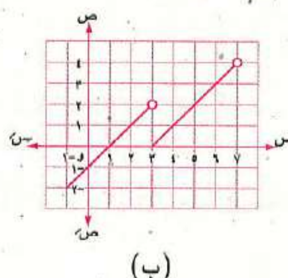
ارسم منحنى هذه الدالة ، ثم ابحث بيانيًا وجود $\lim_{س \to ٢}$ د (س)

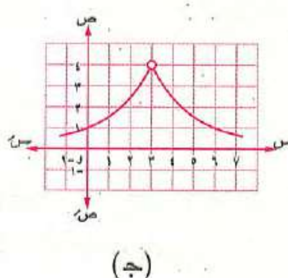
ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

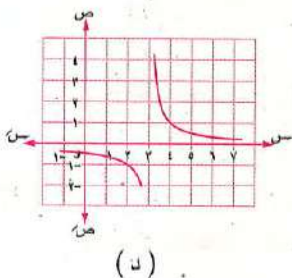
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟

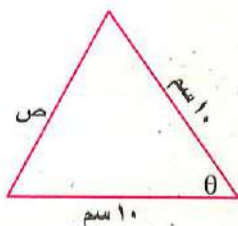

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

② فى الشكل المقابل :



عندما θ ⟵ $\frac{\pi}{٢}$ فإن : ص ⟵ .... سم

(أ) صفر | (ب) ٥
(جـ) ١٠ | (د) ١٠ $\sqrt{٢}$

③ إذا قطع منحنى الدالة د الكثيرة الحدود محور السينات عند س = ٣ فإن : ....

(أ) $\lim_{س \to ٣}$ د (س) = صفر | (ب) $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = ٣
(جـ) $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = صفر | (د) $\lim_{س \to ٣}$ د (س) = ٣

④ إذا قطع منحنى الدالة د الكثيرة الحدود محور الصادات عند ص = ٣ فإن : ....

(أ) $\lim_{س \to ٣}$ د (س) = صفر | (ب) $\lim_{س \to ٣}$ د (س) = ٣
(جـ) $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = صفر | (د) $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = ٣

الدرس 2

إيجاد نهاية الدالة جبريًا

سنعرض الآن بعض النظريات والنتائج التي تساعد في إيجاد نهاية دالة دون اللجوء إلى الرسم البياني أو دراسة قيم الدالة.

نظرية ١ نهاية الدالة كثيرة الحدود

إذا كانت : د (س) كثيرة حدود في المتغير س فإن : $\underset{س \to أ}{\text{نها}}$ د (س) = د (أ)

فمثلًا : $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} (٢س + ٥) = د(٢) = ٢ \times ٢ + ٥ = ٩$

، $\underset{س \to ١}{\text{نها}} (س^{٢} - ٣س + ٢) = د(١) = ١ - ٣ + ٢ = ٠$

نتيجة

نهاية الدالة الثابتة

إذا كانت : د (س) = ك حيث ك ثابت فإن : $\underset{س \to أ}{\text{نها}}$ د (س) = $\underset{س \to أ}{\text{نها}}$ ك = ك

فمثلًا : $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} ٤ = ٤$ ، $\underset{س \to -١}{\text{نها}} -٥ = -٥$

نظرية ٢

إذا كانت د ، ر دالتين في المتغير س وكانت : $\underset{س \to أ}{\text{نها}}$ د (س) = ل

، $\underset{س \to أ}{\text{نها}}$ ر (س) = م **حيث ل ، م ∈ ح فإن :**

١ $\underset{س \to أ}{\text{نها}}$ [د (س) ± ر (س)] = $\underset{س \to أ}{\text{نها}}$ د (س) ± $\underset{س \to أ}{\text{نها}}$ ر (س) = ل ± م

أي أن نهاية المجموع الجبري لدالتين = المجموع الجبري لنهايتيهما

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة للمجموع الجبري لعدد منته من الدوال.

٢ $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} [د(س) \times ر(س)] = \underset{س \to أ}{\text{نهـا}} د(س) \times \underset{س \to أ}{\text{نهـا}} ر(س) = ل \times م$

أى أن نهاية حاصل ضرب دالتين = حاصل ضرب نهايتيهما

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لحاصل ضرب عدد منته من الدوال.

٣ $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} ك \times د(س) = ك \times \underset{س \to أ}{\text{نهـا}} د(س) = ك \times ل$ حيث ك مقدار ثابت.

أى أن نهاية حاصل ضرب ثابت × دالة = الثابت × نهاية هذه الدالة.

٤ $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \frac{د(س)}{ر(س)} = \frac{ل}{م}$ بشرط أن $م \neq ٠$.

أى أن

نهاية خارج قسمة دالتين = خارج قسمة نهايتيهما بشرط ألا تكون نهاية المقسوم عليه = ٠ .

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لحاصل ضرب عدد منته من الدوال مقسومًا على حاصل ضرب عدد منته من الدوال بشرط أن أيًا من نهايات المقسوم عليه لا يساوى الصفر.

٥ $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} [د(س)]^{ن} = [\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} د(س)]^{ن} = ل^{ن}$ ، $ن \in ص^{+}$

مثال ١

أوجد كلاً من النهايات الآتية :

١ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} (س^{٢} + ٣س - ٢)$

٢ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س + ١}{٣س - ١}$

الحـل

١ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} (س^{٢} + ٣س - ٢) = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} س^{٢} + \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} ٣س - \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} ٢ = ٠ + ٠ - ٢ = -٢$

٢ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س + ١}{٣س - ١} = \frac{\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} (س + ١)}{\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} (٣س - ١)} = \frac{٢}{٢} = ١$

يمكنك حل المثال السابق مباشرة باستخدام التعويض المباشر دون تقسيم النهايات.

ملاحظة

يمكن استخدام التعويض المباشر وتكون $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} د(س) = د(أ)$

إذا كانت الدالة د كثيرة حدود أو دالة كسرية مقامها $\neq ٠$.

نظرية ٣

إذا كانت : د ، ى دالتين فى المتغير س وكانت :

د (س) = ى (س) لجميع قيم س ∈ ح - {أ}

وكانت : $\lim_{س \to أ}$ ى (س) = ل فإن : $\lim_{س \to أ}$ د (س) = ل

استخدام النظرية السابقة :

تستخدم هذه النظرية لإيجاد نهاية دالة كسرية جبرية (أى نهاية كسر كل من بسطه ومقامه عبارة عن دالة كثيرة حدود) ولتكن د (س) عندما س ⟵ أ وذلك عندما يكون كل من البسط والمقام يساوى صفر عند س = صفر وهذا معناه أن (س - أ) يكون عاملاً مشتركًا بين البسط والمقام ولإيجاد $\lim_{س \to أ}$ د (س) فى هذه الحالة فإننا نختصر العامل (س - أ) وذلك عن طريق التحليل أو القسمة المطولة فنحصل على دالة جديدة ولتكن ى (س) تكون مساوية للدالة د (س) عندما س ≠ أ فتكون

$\lim_{س \to أ}$ د (س) = $\lim_{س \to أ}$ ى (س) والمثال التالى يوضح ذلك.

لاحظ أن

س ⟵ أ تعنى أن

(س - أ) ⟵ صفر

أى أن (س - أ) ≠ صفر

ولهذا السبب تم الاختصار

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$ ٢ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ ٣ $\lim_{س \to -١} \frac{(٢ س + ٣)^٢ - ١}{س^٢ + س}$

الحل

١ بفرض د (س) = $\frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$ ∴ د (٤) = $\frac{٤^٢ - ١٦}{٤ - ٤}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

∴ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$ = $\lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{س - ٤}$ = $\lim_{س \to ٤}$ (س + ٤) = ٤ + ٤ = ٨

٢ بفرض د (س) = $\frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ ∴ د (٢) = $\frac{٢^٣ - ٨}{٢^٢ - ٥ (٢) + ٦}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

∴ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ = $\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢ س + ٤)}{(س - ٢)(س - ٣)}$

= $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢ س + ٤}{س - ٣}$ = $\frac{٢^٢ + ٢ (٢) + ٤}{٢ - ٣}$ = -١٢

٣ بفرض $\text{د}(\text{س}) = \frac{(٢\text{س}+٣)^{٢}-١}{\text{س}^{٢}+\text{س}}$ ∴ $\text{د}(-١) = \frac{(-٢+٣)^{٢}-١}{(-١)^{٢}-١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

∴ $\lim\limits_{\text{س}\to -١} \frac{(٢\text{س}+٣)^{٢}-١}{\text{س}^{٢}+\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to -١} \frac{(٢\text{س}+٣-١)(٢\text{س}+٣+١)}{\text{س}(\text{س}+١)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to -١} \frac{(٢\text{س}+٢)(٢\text{س}+٤)}{\text{س}(\text{س}+١)} = \lim\limits_{\text{س}\to -١} \frac{٢(\text{س}+١)\times ٢(\text{س}+٢)}{\text{س}(\text{س}+١)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to -١} \frac{٤(\text{س}+٢)}{\text{س}} = \frac{٤(-١+٢)}{-١} = -٤$

مثال ٣

أوجد : $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^{٣}-٧\text{س}+٦}{٣\text{س}^{٢}-٨\text{س}+٤}$

الحل

بفرض $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣}-٧\text{س}+٦}{٣\text{س}^{٢}-٨\text{س}+٤}$

∴ $\text{د}(٢) = \frac{(٢)^{٣}-٧(٢)+٦}{٣(٢)^{٢}-٨(٢)+٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

∴ $(\text{س}-٢)$ عامل مشترك بين البسط والمقام

وبإجراء قسمة مطولة للبسط على $(\text{س}-٢)$

تذكر أنه

فى عملية القسمة المطولة :
(١) نرتب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه بحسب قوى س ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا بنفس الطريقة مع ترك مكان فارغ للقوى غير الموجودة.
(٢) نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ونكتب ناتج القسمة.
(٣) نضرب ناتج القسمة فى المقسوم عليه ونطرح الناتج من المقسوم للحصول على الباقى.
(٤) نستمر بنفس الطريقة حتى الانتهاء من عملية القسمة.

∴ $\text{س}^{٣} \quad -٧\text{س}+٦$	$\text{س}-٢$
$\ominus\text{س}^{٣} \oplus ٢\text{س}^{٢}$	$\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٣$
$٢\text{س}^{٢}-٧\text{س}+٦$	
$\ominus ٢\text{س}^{٢} \oplus ٤\text{س}$	
$-٣\text{س}+٦$	
$\oplus ٣\text{س} \ominus ٦$	
.. ..	

∴ البسط $= (\text{س}-٢)(\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٣)$

∴ $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^{٣}-٧\text{س}+٦}{٣\text{س}^{٢}-٨\text{س}+٤} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٣)}{(\text{س}-٢)(٣\text{س}-٢)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٣}{٣\text{س}-٢} = \frac{٤+٤-٣}{٦-٢} = \frac{٥}{٤}$

معلومة إثرائية

يمكن فى حالة القسمة على مقدار من الدرجة الأولى ومعامل س = ١ أى على الصورة (س − ⓐ) استخدام طريقة القسمة التركيبية كتسهيل لطريقة القسمة المطولة ويمكن استخدامها فى المثال السابق كما يلى لقسمة ($س^٣ − ٧س + ٦$) على (س − ②)

١ نرتب المعاملات حسب قوى س التصاعدية أو التنازلية مع وضع (٠) كمعامل للقوى غير الموجودة مع وضع الـ ② (وهى صفر المقسوم عليه) فى خانة المقسوم عليه.

②	٦	−٧	٠	١
	☐	☐	☐	
	☐	☐	☐	☐

٢ يترك معامل أكبر قوى لينزل للصف الثالث مباشرة ثم يضرب فى الـ ٢ ونضع ناتج الضرب فى خانة الصف الثانى بالعمود المجاور مباشرة.

٢	٦	−٧	٠	١
	☐	☐	٢	(×٢)
	☐	☐	☐	١

٣ اجمع معامل القوة التالية مع ناتج الضرب الذى حصلت عليه توًا.

٢	٦	−٧	٠	١
			(+)	
	☐	☐	٢	
	☐	☐	٢	١

٤ كرر الضرب والجمع لتحصل على معاملات خارج القسمة وهى ١ ، ٢ ، −٣

∴ خارج القسمة هو $س^٢ + ٢س − ٣$

٢	٦	−٧	٠	١
	(+)	(+)	(+)	
	−٦	٤	٢	
	(×٢)	(×٢)	(×٢)	
	٠	−٣	٢	١

ملاحظة هامة

فى حالة وجود فرق بين جذرين تربيعيين لمقدارين جبريين (فى البسط أ، فى المقام أ، فى كليهما) فإننا نضرب كلاً من البسط والمقام فى مرافق (البسط أ، المقام أ، كليهما) وذلك عندما تكون نتيجة التعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال ④

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س^٢ + ٢س}{\sqrt{س + ٩} - ٣}$

٢ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٤ + س} - ٢}{\sqrt{٩ + س} - \sqrt{٩ - س}}$

الحل

بالتعويض عن س = ٠ فى كل من الدالتين السابقتين سنجد أن قيمة كل منهما = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

١ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س^٢ + ٢س}{\sqrt{س + ٩} - ٣} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س^٢ + ٢س}{\sqrt{س + ٩} - ٣} \times \frac{\sqrt{س + ٩} + ٣}{\sqrt{س + ٩} + ٣}$

(وذلك بالضرب بسطًا ومقامًا فى مرافق المقام) $= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}(\text{س} + ٢)\left(\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣\right)}{(\text{س} + ٩) - ٩}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} (\text{س} + ٢)\left(\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣\right)$

$= (٠ + ٢)\left(\sqrt{٠ + ٩} + ٣\right) = ١٢$

٢ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{٤ + \text{س}} - ٢}{\sqrt{٩ + \text{س}} - \sqrt{٩ - \text{س}}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\left(\sqrt{٤ + \text{س}} - ٢\right)\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)\left(\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}\right)}{\left(\sqrt{٩ + \text{س}} - \sqrt{٩ - \text{س}}\right)\left(\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}\right)\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)}$

(وذلك بالضرب بسطًا ومقامًا فى مرافق البسط ومرافق المقام)

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{(٤ + \text{س} - ٤)\left(\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}\right)}{(٩ + \text{س} - ٩ + \text{س})\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}\left(\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}\right)}{٢\text{س}\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}}{٢\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)} = \dfrac{\sqrt{٩ + ٠} + \sqrt{٩ - ٠}}{٢\left(\sqrt{٤ + ٠} + ٢\right)} = \dfrac{٣}{٤}$

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ + ١}$ **٢** $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س} - ٢} - \dfrac{٢}{\text{س} - ٢}\right)$ **٣** $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهــا}} \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س} + ١}$

الحــل

١ $\because \text{د}(-٢) = \dfrac{-٢ - ٣}{(-٢)^٢ + ١} = -١$ $\therefore \underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ + ١} = -١$

٢ بفرض $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س} - ٢} - \dfrac{٢}{\text{س} - ٢} = \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}{\text{س} - ٢}$ $\therefore \text{د}(٢) = \dfrac{٤ - ٢ - ٢}{٢ - ٢} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\therefore \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س} - ٢} - \dfrac{٢}{\text{س} - ٢}\right) = \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)}{\text{س} - ٢}$

$= \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــا}} (\text{س} + ١) = ٢ + ١ = ٣$

٣ $\because \text{د}(-١) = \dfrac{-٣ + ٤}{-١ + ١} = \dfrac{١}{\text{صفر}}$ «كمية غير معرفة» $\therefore \underset{\text{س} \to -١}{\text{نهــا}} \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س} + ١}$ ليس لها وجود

مثال ٦

إذا كانت : $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{د}(\text{س}) - ٧}{\text{س} - ٣} = ٤$ **فأوجد :** $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}} \text{د}(\text{س})$

الحــل

$\because \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{د}(\text{س}) - ٧}{\text{س} - ٣}$ موجودة وتساوى ٤ ، $\because \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}} (\text{س} - ٣) = \text{صفر}$

$\therefore \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}} \left(\text{د}(\text{س}) - ٧\right) = \text{صفر}$ $\therefore \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}} \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}} (٧) = ٧$

تمارين 12 على إيجاد نهاية الدالة جبريًا



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim\limits_{س \to \frac{1}{2}} (10) = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ٥ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ (د) $10\frac{1}{2}$

② $\lim\limits_{س \to 4} \left(3س - \sqrt{س}\right) = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ١٦

③ $\lim\limits_{س \to -2} \frac{1}{|س|} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ١ (ب) ١- (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $-\frac{1}{2}$

④ $\lim\limits_{س \to -2} \frac{3س^2 - 12}{س + 2} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ١٨ (ب) ٣- (جـ) ١٢ (د) ١٢-

⑤ $\lim\limits_{س \to 2} \sqrt{\frac{2س + 3}{4س - 1}} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ٣- (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $-\frac{1}{2}$

⑥ $\lim\limits_{س \to 3} \frac{2س - 6}{7س - 21} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{2}{7}$ (جـ) $\frac{3}{7}$ (د) ٣

⑦ $\lim\limits_{س \to 0} \frac{س^2 - س}{س} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١- (جـ) غير موجودة. (د) ١

⑧ $\lim\limits_{س \to 3} \frac{س^2 - 7س + 12}{س - 3} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ١ (ب) ١- (جـ) ٧ (د) ٢-

⑨ $\lim\limits_{س \to -1} \frac{س^2 + س}{س^3 + 1} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) $-\frac{1}{3}$ (جـ) ١- (د) ليس لها وجود.

⑩ $\lim\limits_{س \to 3} \frac{س^2 - س - 6}{س^2 + س - 12} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{5}{7}$ (ب) $\frac{1}{7}$ (جـ) ١- (د) ٥-

(١١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}+\text{س}-٦}{\text{س}^{٢}-٤}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{-٢}{٥}$

(١٢) $\underset{\text{س}\to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٤}-\text{س}^{٢}-٢٠}{\text{س}-\sqrt{٥}}$ = ...

(أ) ٩ (ب) $٢\sqrt{٥}$ (جـ) $٩\sqrt{٥}$ (د) $١٨\sqrt{٥}$

(١٣) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-٣)^{٢}-١}{\text{س}-٤}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٤) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}+١}-١}{\text{س}}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

(١٥) $\underset{\text{س}\to ٩}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢}-\sqrt{\text{س}-٧}}{\text{س}-٩}$ = ...

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ (جـ) $\frac{-\sqrt{٢}}{٤}$ (د) $-٢\sqrt{٢}$

(١٦) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-٣)^{٢}-١}{\sqrt{\text{س}+٢}-٢}$ = ...

(أ) −٦ (ب) −٨ (جـ) −٢ (د) غير موجودة.

(١٧) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢\text{س}-١}-١}{\sqrt{٣\text{س}+١}-٢}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٨) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}-١}-\frac{١}{\text{س}-١}\right)$ = ...

(أ) صفر (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) غير موجودة.

(١٩) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣}-٧\text{س}+٦}{٣\text{س}^{٢}-٨\text{س}+٤}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{١}{٣}$

(٢٠) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٧+٢\text{س}}{\text{جتا س}}$ = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١

(٢١) $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا س}}{\text{س}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{٤}{\pi}$ (د) ليس لها وجود.

(٢٢) $\underset{\text{س} \to \pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا } ٢ \text{ س}}{\text{س}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) ٢   (ب) ١   (جـ) $\dfrac{١}{\pi}$ (د) صفر

(٢٣) $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) ١   (ب) $\dfrac{\pi}{٢}$ (جـ) $\dfrac{٢}{\pi}$ (د) ليس لها وجود.

(٢٤) إذا كانت : $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{أ}}{\text{س} + ١} = ٤$ فإن : أ = ...

(أ) ٣   (ب) ٤   (جـ) $\dfrac{٢}{٣}$ (د) ١٢

(٢٥) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - ٣}{\text{س} - ٢} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) -١ (ب) $\dfrac{-٣}{٢}$ (جـ) $\dfrac{٣}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

(٢٦) إذا كانت : $\underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س}^{٢} - \text{س} - ٣}{٤\text{س}^{٢} - ٩} = \dfrac{٥}{١٢}$ فإن : م = ...

(أ) $\dfrac{٣}{٢}$ (ب) $\dfrac{-٣}{٢}$ (جـ) $\dfrac{٢}{٣}$ (د) $\dfrac{-٢}{٣}$

(٢٧) إذا كانت : $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤}{\text{س} + \text{أ}} = ٥$ فإن : أ = ...

(أ) -١ (ب) ١   (جـ) صفر   (د) ٤

(٢٨) إذا كانت : $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤\text{أ}}{\text{س} - ٢}$ لها وجود فإن : أ = ...

(أ) -١ (ب) ١   (جـ) ٢   (د) ٤

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢٥}{\text{س} - ٥}$ «١٠»

(٢) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٥}{\text{س} - ٣}$ «-٢»

(٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}}{٣\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢}}$ «$\frac{-١}{٢}$»

(٤) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٥\text{س} - ١٠}{٤\text{س} - ٨}$ «$\frac{٥}{٤}$»

(٥) $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{٤\text{س}^{٢} - ٦٤}{\text{س} - ٤}$ «٣٢»

(٦) $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س} - ٨}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ١٢}$ «$\frac{٢}{٧}$»

(٧) $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢} + \text{س}}$ «٢»

(٨) $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٢٥\text{س}}{\text{س} - ٥}$ «٥٠»

(٩) $\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٩}$ «$\frac{١}{٣}$»

(١٠) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}$ «$\frac{٢}{٣}$»

(١١) $\lim\limits_{س \to -١} \dfrac{س^٢ - ٣س - ٤}{س^٢ - س - ٢}$ «$\frac{٥}{٣}$»

(١٢) $\lim\limits_{س \to \frac{١}{٢}} \dfrac{٢س^٢ - ٥س + ٢}{٢س - ١}$ «$\frac{-٣}{٢}$»

(١٣) $\lim\limits_{س \to \frac{٣}{٢}} \dfrac{٢س^٢ - س - ٣}{٤س^٢ - ٩}$ «$\frac{٥}{١٢}$»

(١٤) $\lim\limits_{س \to -٣} \dfrac{٢س^٢ + ٥س - ٣}{س^٢ + س - ٦}$ «$\frac{٧}{٥}$»

(١٥) $\lim\limits_{س \to ٩} \dfrac{٩ - س}{س^٢ - ٨١}$ «$-\frac{١}{١٨}$»

٢ أوجد كلاً مما يأتي :

(١) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{(س + ٢)^٢ - ٤}{س^٢ + س}$ «٤»

(٢) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{(٢س - ١)^٢ - ١}{٥س}$ «$\frac{-٤}{٥}$»

(٣) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{(س - ٣)^٢ - ١}{٢س^٢ - ٣س - ٢}$ «$\frac{-٢}{٥}$»

(٤) $\lim\limits_{س \to -٢} \dfrac{(س + ٥)^٢ - ٩}{س^٢ - ٤}$ «$\frac{-٣}{٢}$»

(٥) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س^٤ + س^٢ - ٢٠}{س - ٢}$ «٣٦»

(٦) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{(س^٢ - ٤)^٢}{س - ٢}$ «صفر»

(٧) $\lim\limits_{س \to -٢} \dfrac{س + ٢}{س^٤ - ١٦}$ «$-\frac{١}{٣٢}$»

(٨) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^{\frac{٧}{٢}} - س^{\frac{١}{٢}}}{س^٢ - س}$ «٣»

(٩) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^٣ - س^٢ + ٢س - ٢}{س - ١}$ «٣»

(١٠) $\lim\limits_{س \to -١} \dfrac{٢س^٣ - س^٢ - ٢س + ١}{س^٣ + ١}$ «٢»

(١١) $\lim\limits_{س \to ٣} \left(\dfrac{٥}{س} + \dfrac{س^٢ - ٣س}{س - ٣}\right)$ «$\frac{١٤}{٣}$»

(١٢) $\lim\limits_{س \to -١} \left(\dfrac{س^٢}{س^٢ - ١} - \dfrac{٣س + ٤}{س^٢ - ١}\right)$ «$\frac{٥}{٢}$»

(١٣) $\lim\limits_{س \to ١} \left(\dfrac{١}{س - ١} - \dfrac{٣}{س^٣ - ١}\right)$ «١»

٣ أوجد كلاً مما يأتي :

(١) $\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{س^٣ - ١٥س - ٤}{س - ٤}$ «٣٣»

(٢) $\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{س^٤ - ٢١س^٢ + ٢٠س}{س - ٤}$ «١٠٨»

(٣) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س^٣ - س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢}$ «٣»

(٤) $\lim\limits_{س \to -٣} \dfrac{س^٣ - ١٠س - ٣}{س^٢ + ٢س - ٣}$ «$\frac{-١٧}{٤}$»

(٥) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{٢س^{٣} + ٣س^{٢} + ٤}{س^{٣} + ٨}$ «١»

(٦) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ٤س + ٤}{س^{٣} + س^{٢} - ٨س - ١٢}$ «$-\frac{١}{٥}$»

---

٤ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩}$ «$\frac{١}{٦}$»

(٢) 📖 $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$ «$\frac{١}{٤}$»

(٣) 📖 $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س + ١}{\sqrt{س + ٥} - ٢}$ «٤»

(٤) $\underset{س \to ٦}{\text{نهـا}} \frac{س - ٦}{\sqrt{س - ٢} - ٢}$ «٤»

(٥) 📖 $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س - ١}$ «$\frac{١}{٤}$»

(٦) 📖 $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٤س - ٣} - ٣}{س - ٣}$ «$\frac{٢}{٣}$»

(٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢س + ٩} - ٣}{س^{٢} + س}$ «$\frac{١}{٣}$»

(٨) 📖 $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣}$ «٣٠»

(٩) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س} - ١}{س^{٢} + ٢س - ٣}$ «$\frac{١}{٨}$»

(١٠) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - س - ٦}{\sqrt{٥س - ٦} - ٣}$ «٦»

(١١) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}}{٢س}$ «$\frac{١}{٢}$»

(١٢) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{\sqrt{س - ٢} - ١}$ «$\frac{١}{٢}$»

---

٥ إذا كانت : $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$ **فأوجد :** $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} د(س)$ «٥»

---

٦ إذا كانت : $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - (أ - ١)س - أ}{س + ١} = ٤$ **أوجد : قيمة أ** «-٥»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د دالة تحقق أن : $س \left(د(س) + ١\right) = د(س) + س^{٢}$ فإن : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} د(س) =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(٢) إذا كانت : $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + أس + ب}{س - ١} = ٥$ فإن : أ − ب = ...

(أ) −١ (ب) −٤ (جـ) ٣ (د) ٧

(٣) إذا كانت : $\underset{س \to م}{\text{نهـا}} \left(٢د(س) - ٥هـ(س)\right) = ١٠$

، $\underset{س \to م}{\text{نهـا}} \left(د(س) + هـ(س)\right) = ٦$ فإن : $\underset{س \to م}{\text{نهـا}} \frac{د(س)}{هـ(س)} =$ ....

(أ) $\frac{٤٠}{٧}$ (ب) $\frac{٢}{٧}$ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

الدرس

3

نظرية (٤)
«القانون»

نظرية ٤

$$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن}-١} \quad \text{لكل ن} \in \text{ح} - \{٠\}$$

ولاستخدام هذه النظرية يراعى الآتى :

١ أن تكون الدالة على الصورة (أو يمكن وضعها على الصورة) $\frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}}$

٢ أن يكون المطلوب إيجاد النهاية عندما $\text{س} \to \text{أ}$

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٤ - ٨١}{\text{س} - ٣}$ ٢ $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٥ + ٣٢}{\text{س} + ٢}$ ٣ $\underset{\text{س} \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـــا}} \frac{٣٢\text{س}^٥ - ١}{٢\text{س} - ١}$

الحــل

١ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٤ - ٨١}{\text{س} - ٣} = \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٤ - ٣^٤}{\text{س} - ٣} = ٤ \times ٣^٣ = ١٠٨$

لاحظ أن : التعويض المباشر يعطى $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

٢ $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٥ + ٣٢}{\text{س} + ٢} = \underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٥ - (-٣٢)}{\text{س} - (-٢)} = \underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٥ - (-٢)^٥}{\text{س} - (-٢)} = ٥ \times (-٢)^٤ = ٨٠$

٣ $\underset{\text{س} \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـــا}} \frac{٣٢\text{س}^٥ - ١}{٢\text{س} - ١} = \underset{\text{س} \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـــا}} \frac{٣٢\left[\text{س}^٥ - \frac{١}{٣٢}\right]}{٢\left[\text{س} - \frac{١}{٢}\right]} = ١٦ \times \underset{\text{س} \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٥ - \left(\frac{١}{٢}\right)^٥}{\text{س} - \frac{١}{٢}}$

$= ١٦ \underset{\text{س} \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٥ - \left(\frac{١}{٢}\right)^٥}{\text{س} - \frac{١}{٢}} = ١٦ \times ٥ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^٤ = ٥$

حل آخر: عندما $س \leftarrow \frac{1}{2}$ فإن : $2س \leftarrow 1$

$$\therefore \lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{32س^5 - 1}{2س - 1} = \lim_{2س \to 1} \frac{(2س)^5 - (1)^5}{2س - 1} = 5 \times 1^4 = 5$$

نتيجتان

1 $\lim_{س \to 0} \frac{(س + أ)^ن - أ^ن}{س} = ن أ^{ن-1}$

2 $\lim_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م} أ^{ن-م}$ حيث $ن \in ح - \{0\}$ ، $م \in ح - \{0\}$

مثال 2

أوجد كلاً مما يأتي :

1 $\lim_{س \to 1} \frac{س^5 - 1}{س^3 - 1}$

2 $\lim_{س \to -3} \frac{س^5 + 243}{س^4 - 81}$

3 $\lim_{س \to 3} \frac{س^4 - 27س}{3س^4 - 243}$

4 $\lim_{س \to 1} \frac{(س + 1)^6 - 64}{(س + 1)^3 - 8}$

الحل

1 $\lim_{س \to 1} \frac{س^5 - 1}{س^3 - 1} = \lim_{س \to 1} \frac{س^5 - 1^5}{س^3 - 1^3} = \frac{5}{3} \times 1^{5-3} = \frac{5}{3}$

2 $\lim_{س \to -3} \frac{س^5 + 243}{س^4 - 81} = \lim_{س \to -3} \frac{س^5 - (-3)^5}{س^4 - (-3)^4} = \frac{5}{4} \times (-3)^{5-4} = -\frac{15}{4}$

3 $\lim_{س \to 3} \frac{س^4 - 27س}{3س^4 - 243} = \lim_{س \to 3} \frac{س(س^3 - 27)}{3(س^4 - 81)}$

$= \lim_{س \to 3} \frac{س}{3} \times \lim_{س \to 3} \frac{س^3 - 3^3}{س^4 - 3^4}$

$= \frac{3}{3} \times \frac{3}{4} \times 3^{3-4} = \frac{1}{4}$

4 $\because س \leftarrow 1 \qquad \therefore س + 1 \leftarrow 2$

$$\therefore \lim_{س \to 1} \frac{(س + 1)^6 - 64}{(س + 1)^3 - 8} = \lim_{س+1 \to 2} \frac{(س + 1)^6 - 2^6}{(س + 1)^3 - 2^3} = \frac{6}{3} \times 2^{6-3} = 16$$

حل آخر: بتحليل البسط كفرق بين مربعين :

$$\therefore \lim_{س \to 1} \frac{(س + 1)^6 - 64}{(س + 1)^3 - 8} = \lim_{س \to 1} \frac{[(س + 1)^3 - 8][(س + 1)^3 + 8]}{(س + 1)^3 - 8}$$

$$= \lim_{س \to 1} \left((س + 1)^3 + 8\right) = (1 + 1)^3 + 8 = 16$$

مثال ٣

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{س}$ ٢ $\underset{س \to ٦}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ٥)^{٧} - ١}{س - ٦}$ ٣ $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(أ + ٢هـ)^{٦} - أ^{٦}}{٥هـ}$

الحـــل

١ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ٥)^{٤} - ٥^{٤}}{س} = ٤ \times ٥^{٣} = ٥٠٠$

٢ $\underset{س \to ٦}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ٥)^{٧} - ١}{س - ٦} = \underset{س - ٥ \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ٥)^{٧} - ١^{٧}}{(س - ٥) - ١} = ٧ \times ١^{٦} = ٧$

٣ $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(أ + ٢هـ)^{٦} - أ^{٦}}{٥هـ} = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{٢}{٥}\left[(أ + ٢هـ)^{٦} - أ^{٦}\right]}{\frac{٢}{٥} \times ٥هـ} = \underset{٢هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{٢}{٥}\left[(أ + ٢هـ)^{٦} - أ^{٦}\right]}{٢هـ}$

$= \frac{٢}{٥} \times ٦ \times أ^{٥} = \frac{١٢}{٥} أ^{٥}$

ملاحظـــة

$\sqrt[ن]{أ} = أ^{\frac{١}{ن}}$ حيث $ن \in ص^{+} - \{١\}$ ، $أ \in ح^{+}$ **فمثلاً :** $\sqrt{س} = س^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt[٣]{٨} = ٨^{\frac{١}{٣}} = ٢$

مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩}$ ٢ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٥]{س} - ١}{\sqrt[٣]{س} - ١}$ ٣ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٤]{س + ١} - ١}{س}$

الحـــل

١ $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} = \underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س} - \sqrt{٩}}{س - ٩} = \underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{\frac{١}{٢}} - ٩^{\frac{١}{٢}}}{س - ٩} = \frac{١}{٢} \times ٩^{\frac{١}{٢} - ١}$

$= \frac{١}{٢} \times ٩^{-\frac{١}{٢}} = \dfrac{١}{٢\sqrt{٩}} = \frac{١}{٦}$

حل آخر : بتحليل المقام كفرق بين مربعين :

$\therefore \underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} = \underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)} = \underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{(\sqrt{س} + ٣)} = \dfrac{١}{\sqrt{٩} + ٣} = \frac{١}{٦}$

٢ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٥]{س} - ١}{\sqrt[٣]{س} - ١} = \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{\frac{١}{٥}} - ١^{\frac{١}{٥}}}{س^{\frac{١}{٣}} - ١^{\frac{١}{٣}}} = \dfrac{\frac{١}{٥}}{\frac{١}{٣}} \times ١^{\frac{١}{٥} - \frac{١}{٣}} = \frac{٣}{٥}$

٣ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٤]{س + ١} - ١}{س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ١)^{\frac{١}{٤}} - ١^{\frac{١}{٤}}}{س} = \frac{١}{٤} \times ١^{\frac{١}{٤} - ١} = \frac{١}{٤}$

تمارين 13 على نظرية (٤) «القانون»



من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = ...$

(أ) $\frac{م}{ن}$ (ب) $\frac{م}{ن} (أ)^{م-ن}$ (جـ) $\frac{ن}{م} (أ)^{م-ن}$ (د) $\frac{ن}{م} (أ)^{ن-م}$

② $\lim_{ص \to ٢} \frac{ص^٥ - ٣٢}{ص - ٢} = ...$

(أ) ٣١ $ص^٤$ (ب) ٣٢×٢^٤ (جـ) ٦٤ (د) ٥×٢^٤

③ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{-١} - ٢^{-١}}{س^{-٤} - ٢^{-٤}} = ...$

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣٢}$ (د) ٨

④ $\lim_{س \to -١} \frac{س^٥ + ١}{س + ١} = ...$

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) −٥ (د) −٤

⑤ 📖 $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢}{س^٣ - ٨} = ...$

(أ) ٤ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) صفر (د) $٦\frac{٢}{٣}$

⑥ $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٤ س^٢ - ١}{٣٢ س^٥ - ١} = ...$

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٩}$ (د) $\frac{١}{٨}$

⑦ $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٧ + ١٢٨}{س^٤ - ١٦} = ...$

(أ) ٩ (ب) −٩ (جـ) −١٤ (د) ١٤

⑧ 📖 $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^٩ - ١}{س} = ...$

(أ) ٩ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ١٠

⑨ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(س + هـ)^٧ - س^٧}{هـ} = ...$

(أ) $س^٧$ (ب) ٧ $س^٦$ (جـ) صفر (د) ١

(١٠) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{س} + 2)^5 - 32}{\text{س}} = \dots\dots\dots$

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (ج) ٨٠ (د) ١٠٠

(١١) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\sqrt[3]{\text{س} + 1} - 1}{\text{س}} = \dots\dots\dots$

(أ) ١ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) صفر (د) $\frac{-2}{3}$

(١٢) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^6 - 64}{\text{س} - 2} = \dots\dots\dots$

(أ) $6(2)^5$ (ب) ١٢٨ (ج) $64(2)^5$ (د) ٦٣

(١٣) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^{\frac{13}{2}} - \text{س}^{\frac{1}{2}}}{\text{س}^{\frac{7}{2}} - \text{س}^{\frac{1}{2}}} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{13}{7}$ (ب) ١ (ج) ٢ (د) س

(١٤) $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \frac{(2 - 3\,\text{هـ})^7 - 128}{4\,\text{هـ}} = \dots\dots\dots$

(أ) ٣٣٦ (ب) −٣٣٦ (ج) ٤٤٨ (د) −٤٤٨

(١٥) $\lim\limits_{\text{س} \to 5} \frac{(\text{س} - 3)^7 - 128}{\text{س} - 5} = \dots\dots\dots$

(أ) ٧ (ب) ٢٨ (ج) ٦٤ (د) ٤٤٨

(١٦) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \frac{1 - \sqrt[\text{ن}]{\text{س}}}{1 - \sqrt[\text{م}]{\text{س}}} = \dots\dots\dots$

(أ) ١ (ب) $\frac{\text{ن}}{\text{م}}$ (ج) −١ (د) $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$

(١٧) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^5 - 32}{\text{س}^2 + 3\,\text{س} - 10} = \dots\dots\dots$

(أ) ٨٠ (ب) $\frac{80}{7}$ (ج) $\frac{7}{80}$ (د) $\frac{1}{80}$

(١٨) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \frac{\sqrt[5]{\text{س}} + 2\sqrt{\text{س}} - 3}{\text{س} - 1} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{6}{5}$ (ب) ٢ (ج) ٥ (د) ٣

(١٩) إذا كان : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^5$ ، $\text{ر}(\text{س}) = \text{س}^2 - 4$ فإن : $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \frac{\text{د}(\text{س}) - 32}{\text{ر}(\text{س})} = \dots\dots\dots$

(أ) −٢٠ (ب) ٢٠ (ج) ± ٢٠ (د) ٣٢

(٢٠) إذا كان : $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}$ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ن (ج) م (د) $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$

(٢١) إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \frac{(\text{س})^{\text{ن}} - (2)^{\text{ن}}}{\text{س} - 2} = 32$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٩ (د) ١٢

(٢٢) إذا كانت : $\lim_{س \to ل} \frac{س^{٥} - ل^{٥}}{س - ل} = ٨٠$ فإن : ل = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ±٢ (د) ١٦

(٢٣) إذا كانت : $\lim_{س \to أ} \frac{س^{٨} - أ^{٨}}{س^{٦} - أ^{٦}} = ٤٨$ فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ±٤ (د) ±٦

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}$ «١٢»

(٢) $\lim_{س \to -٥} \frac{س^{٤} - ٦٢٥}{س + ٥}$ «−٥٠٠»

(٣) $\lim_{س \to أ} \frac{س^{٥} - أ^{٥}}{س - أ}$ «٥أ^{٤}»

(٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٢} - ٤}$ «٢٠»

(٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٣} - ٨}$ «$\frac{١١٢}{٣}$»

(٦) $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣} - \frac{١}{٨}}{س^{٢} - \frac{١}{٤}}$ «$\frac{٣}{٤}$»

(٧) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٥} + ٢٤٣}{س + ٣}$ «٤٠٥»

(٨) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٤} - ٨١}{س^{٥} + ٢٤٣}$ «$-\frac{٤}{١٥}$»

(٩) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٥} + ٣٢}{س^{٣} + ٨}$ «$\frac{٢٠}{٣}$»

(١٠) $\lim_{س \to ٤} \frac{٢س^{٣} - ١٢٨}{س^{٢} - ١٦}$ «١٢»

(١١) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٦} - ٦٤}{٣س + ٦}$ «−٦٤»

(١٢) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{١٠} + س}{س^{٧} - س}$ «$\frac{-٣}{٢}$»

(١٣) $\lim_{س \to ١} \frac{١ - س^{٩}}{س^{٧} - ١}$ «$\frac{-٩}{٧}$»

(١٤) $\lim_{٢س \to ١} \frac{١٢٨س^{٧} - ١}{٣٢س^{٥} - ١}$ «$\frac{٧}{٥}$»

(١٥) $\lim_{س \to -\frac{١}{٢}} \frac{٣٢س^{٥} + ١}{٦٤س^{٦} - ١}$ «$\frac{-٥}{٦}$»

(١٦) $\lim_{س \to -\frac{٢}{٣}} \frac{٢٤٣س^{٥} + ٣٢}{٢٧س^{٣} + ٨}$ «$\frac{٢٠}{٣}$»

---

٢ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{-٧} - (٢)^{-٧}}{س - ٢}$ «$\frac{-٧}{٢٥٦}$»

(٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{-٤} - ١}{س^{-١٨} - ١}$ «$\frac{٢}{٩}$»

(٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{-٥} - \frac{١}{٣٢}}{س^{-٧} - \frac{١}{١٢٨}}$ «$\frac{٢٠}{٧}$»

(٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{-٨} - (١٦)^{-٢}}{س - ٢}$ «$\frac{-١}{٦٤}$»

(٥) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٧]{س} - ١}{س - ١}$ «$\frac{١}{٧}$»

(٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س} - \sqrt[٣]{٢}}{س - ٢}$ «$\frac{١}{٣\sqrt[٣]{٤}}$»

(٧) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{\frac{٢١}{٢}} - س^{\frac{١}{٢}}}{س^{\frac{١٤}{٣}} - س^{\frac{٢}{٣}}}$ «$\frac{٥}{٢}$»

(٨) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{١٧} - ١}{٣س^{٢} + ٢س - ٥}$ «$\frac{١٧}{٨}$»

٣ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\lim\limits_{س \to 0} \frac{(1+س)^{10} - 1}{(1+س)^{7} - 1}$ «$\frac{10}{7}$»

② $\lim\limits_{س \to 6} \frac{(س-5)^{7} - 1}{س - 6}$ «٧»

③ $\lim\limits_{س \to 0} \frac{(س+2)^{5} - 32}{س}$ «٨٠»

④ $\lim\limits_{ه \to 0} \frac{(3+ه)^{4} - 81}{6ه}$ «١٨»

⑤ $\lim\limits_{ه \to 0} \frac{(1+4ه)^{8} - 1}{ه}$ «٣٢»

⑥ $\lim\limits_{س \to 1} \frac{(س+2)^{4} - 81}{س - 1}$ «١٠٨»

⑦ $\lim\limits_{س \to 0} \frac{(1-2س)^{5} - 1}{5س}$ «-٢»

⑧ $\lim\limits_{ه \to 0} \frac{(س+3ه)^{5} - س^{5}}{ه}$ «$15س^{4}$»

⑨ $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3س} - 1}{2س}$ «$\frac{1}{2}$»

⑩ $\lim\limits_{س \to 2} \frac{(س-4)^{5} + 32}{س - 2}$ «٨٠»

⑪ $\lim\limits_{س \to 5} \frac{\sqrt[3]{س+3} - 2}{س - 5}$ «$\frac{1}{12}$»

⑫ $\lim\limits_{س+1 \to 0} \frac{(3س+2)^{9} + 1}{س + 1}$ «٢٧»

⑬ $\lim\limits_{س \to 1} \frac{س^{19} + س^{8} - 2}{س - 1}$ «٢٧»

⑭ $\lim\limits_{س \to -1} \frac{س^{7} + س^{9} + 2}{س + 1}$ «١٦»

٤ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\lim\limits_{س \to 2} \left(\frac{س^{3} - 8}{س^{5} - 32} + \frac{س^{4} - 16}{س^{7} - 128} \right)$ «$\frac{31}{140}$»

② $\lim\limits_{س \to 3} \left(\frac{س^{5} - 243}{س^{2} - 4} \times \frac{س - 2}{س - 3} \right)$ «٨١»

③ $\lim\limits_{س \to -3} \left(\frac{س^{4} - 81}{س^{3} + 27} \right)^{3}$ «-٦٤»

٥ أوجد قيمة أ إذا كانت : $\lim\limits_{س \to أ} \frac{س^{12} - أ^{12}}{س^{10} - أ^{10}} = 30$ «± ٥»

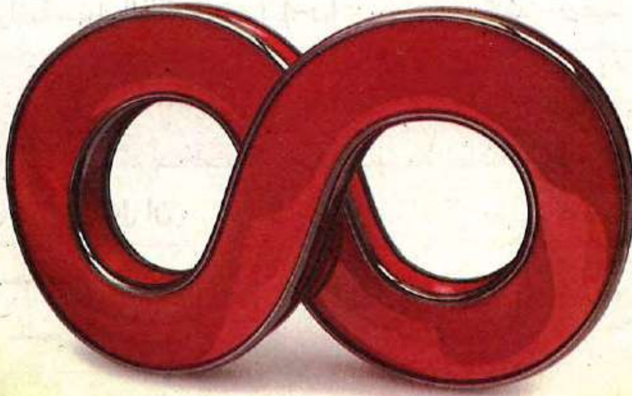
٦ أوجد قيمة ك إذا كانت : $\lim\limits_{س \to -1} \frac{س^{15} + 1}{س + 1} = \lim\limits_{س \to ك} \frac{س^{5} - ك^{5}}{س^{3} - ك^{3}}$ «± ٣»

٧ إذا كانت : $\lim\limits_{س \to 2} \frac{س^{ن} - 64}{س - 2} = ل$ أوجد قيمتي : ن ، ل «٦ ، ١٩٢»

الدرس

4

نهاية الدالة عند اللا نهاية



المقصود ببحث نهاية الدالة عند اللانهاية هو التعرف على سلوك هذه الدالة عندما تكبر س (المتغير المستقل) كبرًا بلا حد ، فإذا كانت د (س) تقترب من عدد حقيقى معين (ل مثلاً) كلما كبرت س فإننا نقول إن الدالة د لها نهاية ل عندما تقترب س من اللانهاية ونكتب $\lim_{س \to \infty}$ د (س) = ل

مثال توضيحى ١

إذا كانت د : د (س) = $\frac{٢س + ١}{س}$ وأردنا دراسة سلوك الدالة د عندما تكبر س بدون حد أى عندما تقترب س من اللانهاية فإننا نفرض أن س تأخذ القيم ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ... إلخ فنحصل على الجدول الآتى :

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	....
د (س) = $\frac{٢س + ١}{س}$	٣	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	....

ومن هذا الجدول نلاحظ أنه عندما تأخذ س قيمًا متدرجة فى الكبر فإن د (س) تقترب أكثر وأكثر من القيمة ٢ وبلغة النهايات فإننا نقول إن د (س) ← ٢ عندما س ← ∞ ونكتب $\lim_{س \to \infty}$ د (س) = ٢

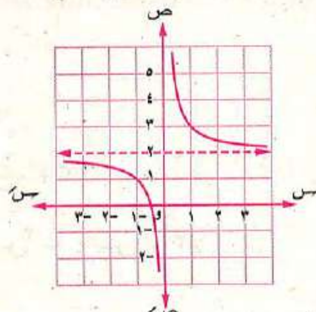
ونلاحظ فى هذا المثال :

أننا لا نستطيع الحصول على نفس النتيجة عن طريق التعويض المباشر عن س = ∞

حيث سنحصل على $\frac{\infty}{\infty}$ (كمية غير معينة)

الحل البيانى

عند رسم الدالة د : د (س) = $\frac{٢س + ١}{س}$ = ٢ + $\frac{١}{س}$



نلاحظ من الرسم أنه عندما س ← ∞ فإن د (س) ← ٢

مثال توضيحى (٢)

إذا أردنا دراسة سلوك الدالة د حيث د $(س) = \frac{1}{س}$ عندما تأخذ س قيمًا متدرجة فى الكبر فإننا نكون الجدول التالى :

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	....
د $(س) = \frac{1}{س}$	١	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	....

ونلاحظ من هذا الجدول أن :

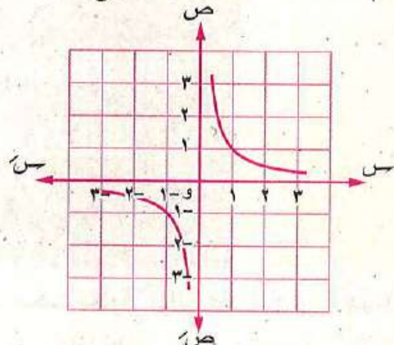
د (س) ← صفر

عندما س ← ∞

أى أن $\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س} =$ صفر

الحل البيانى

عند رسم الدالة د : د $(س) = \frac{1}{س}$



نلاحظ من الرسم أنه عندما س ← ∞

فإن د (س) ← صفر

وهذا المثال التوضيحى يقودنا للنظرية الآتية :

نظرية ٥

$\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س} =$ صفر

نتيجتان

إذا كانت : $أ \in ح$ فإن : [١] $\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س} =$ صفر [٢] $\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س^{ن}} =$ صفر ، $ن \in ح_+$

قواعد أساسية

* $\lim_{س \to \infty} ح = ح$ حيث ح ثابت
* $\lim_{س \to \infty} س^{ن} = \infty$ حيث ن عدد موجب
* نظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضرب أو قسمة دالتين عند س = أ السابق دراستها صحيحة عندما نضع س ← ∞ بدلًا من س ← أ

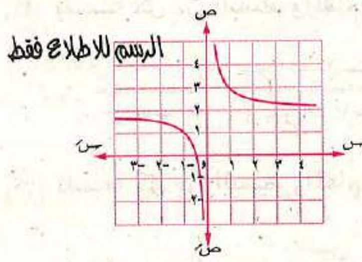
مثال (١)

أوجد كلًا مما يأتى :

[١] $\lim_{س \to \infty} (\frac{1}{س} + ٢)$ [٢] $\lim_{س \to \infty} (٣ - \frac{1}{س^{٢}})$

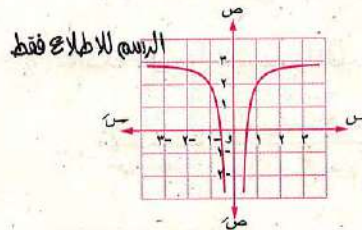
[٣] $\lim_{س \to \infty} (س^{٣} - ٥ س + ٣)$

الحل



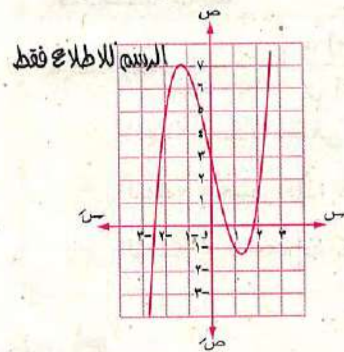
١ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(\frac{١}{س} + ٢\right)$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{١}{س} + \underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} ٢ = ٠ + ٢ = ٢$



٢ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(٣ - \frac{١}{س^{٢}}\right)$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} ٣ - \underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{١}{س^{٢}} = ٣ - \text{صفر} = ٣$



٣ لاحظ أنه عند التعويض المباشر تعطى النهاية $(\infty - \infty)$

وهى كمية غير معينة لذلك نستخدم طريقة

أخذ عامل مشترك بأكبر أس فيكون

$\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} س^{٣} \left(١ - \frac{٥}{س^{٢}} + \frac{٣}{س^{٣}}\right)$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} س^{٣} \times \underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(١ - \frac{٥}{س^{٢}} + \frac{٣}{س^{٣}}\right) = \infty \times ١ = \infty$

إيجاد نهاية دالة كسرية جبرية عند اللانهاية

إذا كان التعويض المباشر عن $س = \infty$ يعطى $\frac{\infty}{\infty}$ فإننا نقسم كلاً من البسط والمقام على المتغير س مرفوعًا لأعلى قوة فى المقام (درجة المقام) ، ثم نستخدم النظرية ونتيجتها لإيجاد النهاية (إن وجدت)

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{٢ س - ٥}{٣ س - ٧}$

٢ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{٥ س^{٢} - ٣ س + ٦}{٢ س - ٧ س^{٢}}$

٣ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{٣ س^{٢} - ٥ س}{٢ س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٤ س - ١}$

٤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٥} - ٢ س^{٢}}{س^{٤} + ٣ س^{٣} - ١}$

الحل

١ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{٢ س - ٥}{٣ س - ٧} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{٢ - \frac{٥}{س}}{٣ - \frac{٧}{س}} = \frac{٢ - ٠}{٣ - ٠} = \frac{٢}{٣}$

[٢] بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٢}$

$$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥س^{٢} - ٣س + ٦}{٢س - ٧س^{٢}} = \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥ - \frac{٣}{س} + \frac{٦}{س^{٢}}}{\frac{٢}{س} - ٧} = -\frac{٥}{٧}$$

[٣] بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٣}$

$$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٣س^{٢} - ٥س}{٢س^{٣} - ٦س^{٢} + ٤س - ١} = \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\frac{٣}{س} - \frac{٥}{س^{٢}}}{٢ - \frac{٦}{س} + \frac{٤}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٣}}} = \frac{٠}{٢} = ٠$$

[٤] بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٤}$

$$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س^{٥} - ٢س^{٢}}{س^{٤} + ٣س^{٣} - ١} = \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س - \frac{٢}{س^{٢}}}{١ + \frac{٣}{س} - \frac{١}{س^{٤}}} = \frac{\infty - ٠}{١ + ٠ - ٠} = \infty$$

ملاحظة هامة

* عند إيجاد $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث كل من د (س) ، ر (س) دالة كثيرة حدود فإن :

[١] النهاية = عدد حقيقى لا يساوى الصفر «إذا كانت درجة البسط = درجة المقام».

[٢] النهاية = صفر «إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام».

[٣] النهاية = $\pm \infty$ «إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام».

مثال ٣

أوجد كلاً مما يأتى :

[١] $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(س - ١)(س^{٢} + ١)}{س^{٢}(٥س - ١)}$

[٢] $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(٣س^{٣} + ٢)^{٢}(س^{٢} - ١)^{٣}}{س^{٥}(س + ١)^{٧}}$

الحل

[١] بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٣}$

$$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(س - ١)(س^{٢} + ١)}{س^{٢}(٥س - ١)} = \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(١ - \frac{١}{س})(١ + \frac{١}{س^{٢}})}{١(٥ - \frac{١}{س})} = \frac{١ \times ١}{٥ \times ١} = \frac{١}{٥}$$

[٢] بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{١٢}$

$$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(٣س^{٣} + ٢)^{٢}(س^{٢} - ١)^{٣}}{س^{٥}(س + ١)^{٧}} = \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(٣ + \frac{٢}{س^{٣}})^{٢}(١ - \frac{١}{س^{٢}})^{٣}}{١(١ + \frac{١}{س})^{٧}} = \frac{٣^{٢} \times ١^{٣}}{١ \times ١^{٧}} = ٩$$

مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتى :

١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^٣ - ٩}{|٣س|^٣ + ٧}$

٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥س - ٦}{\sqrt{٩س^٢ + ٧}}$

٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{٨س^٣ - ٥س + ١}}{٣س - ٢}$

٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^٢ - س + ١} - \sqrt{س^٢ + س + ١}\right)$

الحل

١) $\because$ س $\to \infty$ $\quad \therefore |س| = س \quad \therefore$ النهاية $= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^٣ - ٩}{٢٧س^٣ + ٧}$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$ $\quad \therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^٣ - ٩}{٢٧س^٣ + ٧} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ - \frac{٩}{س^٣}}{٢٧ + \frac{٧}{س^٣}} = \dfrac{٢}{٢٧}$

لاحظ أنه

عندما س $\to \infty$

فإن : $س = |س| = \sqrt{س^٢} = \sqrt[٣]{س^٣} = \sqrt[٤]{س^٤} = ...$

٢) بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^٢}$

$$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥س - ٦}{\sqrt{٩س^٢ + ٧}} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥ - \frac{٦}{س}}{\sqrt{٩ + \frac{٧}{س^٢}}} = \dfrac{٥}{\sqrt{٩}} = \dfrac{٥}{٣}$$

٣) بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt[٣]{س^٣}$

$$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{٨س^٣ - ٥س + ١}}{٣س - ٢} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{٨ - \frac{٥}{س^٢} + \frac{١}{س^٣}}}{٣ - \frac{٢}{س}} = \dfrac{\sqrt[٣]{٨}}{٣} = \dfrac{٢}{٣}$$

٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^٢ - س + ١} - \sqrt{س^٢ + س + ١}\right)$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left[\left(\sqrt{س^٢ - س + ١} - \sqrt{س^٢ + س + ١}\right) \times \dfrac{\sqrt{س^٢ - س + ١} + \sqrt{س^٢ + س + ١}}{\sqrt{س^٢ - س + ١} + \sqrt{س^٢ + س + ١}}\right]$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٢ - س + ١ - (س^٢ + س + ١)}{\sqrt{س^٢ - س + ١} + \sqrt{س^٢ + س + ١}} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{-٢س}{\sqrt{س^٢ - س + ١} + \sqrt{س^٢ + س + ١}}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^٢}$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{-٢}{\sqrt{١ - \frac{١}{س} + \frac{١}{س^٢}} + \sqrt{١ + \frac{١}{س} + \frac{١}{س^٢}}} = \dfrac{-٢}{\sqrt{١} + \sqrt{١}} = -١$$

تمارين 14 على نهاية الدالة عند اللانهاية



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٣}{س^٢} - ٢ \right) = $ ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) −٣ (د) −٢

(٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣ س}{٤ س + ٥} = $ ....

(أ) ∞ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) صفر

(٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ س^٢ + ١}{س^٢ + ١} = $ ....

(أ) صفر (ب) غير موجودة. (جـ) ∞ (د) ٢

(٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٢ + ٥}{٦} = $ ....

(أ) صفر (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) ١ (د) ∞

(٥) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س} = $ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −٢ (د) ∞

(٦) $\lim_{س \to \infty} (٣ س^{-٥} + ٤ س^{-٢} + ٥) = $ ....

(أ) ١٢ (ب) ∞ (جـ) ٥ (د) صفر

(٧) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣ س^{-٣} + ٤ س^{-٢} - ٢}{٧ س^{-٣} - س^{-٢} + ٦} = $ ....

(أ) ∞ (ب) صفر (جـ) $\frac{٣}{٧}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

(٨) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٧ - ٢ س^٣}{٢ س^٤ - ٣ س^٢ - ١} = $ ....

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ∞ (د) $\frac{١}{٢}$

(٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣ س^٢}{س (٢ س - ١)} = $ ....

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) صفر (د) ٣

(١٠) $\lim_{س \to \infty} \sqrt{\frac{١ - س}{١ - ٤ س}} = $ ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) ١

(١١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} + ٥}{س(٢س^{٢} + ٣)}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

(١٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س}{\sqrt{٩س^{٢} + ١}}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٩}$ (ب) صفر (ج) $\frac{٢}{٣}$ (د) ∞

(١٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} \sqrt{٨ + ٩س^{٢}}$ = ...

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) ٣ (ج) $-٢\sqrt{٢}$ (د) −٣

(١٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{٦٤س^{٣} + ٧س - ٢}}{٣س + ٢}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (ج) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س^{٢}}}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) −١

(١٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{٨س^{٣} + ١}}{|س|}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٨ (ج) صفر (د) ٤

(١٧) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٩س^{٢} + ٣}}{\sqrt[٣]{١ - ٨س^{٣}}}$ = ...

(أ) $\frac{-٢}{٣}$ (ب) $\frac{-٩}{٨}$ (ج) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{-٣}{٢}$

(١٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤ - ٣س^{٣}}{\sqrt{س^{٦} + ٩}}$ = ...

(أ) −٣ (ب) ١ (ج) صفر (د) ∞

(١٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٣س^{٢} + ٢س + ١}{س^{٢} - ٣س + ٢}\right)^{٤}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (ج) ٢٧ (د) ٨١

(٢٠) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(١٢)^{\frac{١}{س}}}{س + ٧}$ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (ج) $\frac{١٢}{٧}$ (د) ∞

(٢١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{ك^{\frac{١}{س}}}{٣}$ = ... حيث ك ثابت موجب.

(أ) $\frac{ك}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (ج) ٣ (د) ٣ ك

(٢٢) إذا كانت $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{أ^{٢}س + ٧}{٢س - ٥} = ٨$ فإن : أ = ... حيث أ ∈ ع

(أ) ٢ (ب) صفر (ج) ± ٤ (د) ± ٨

(٢٣) إذا كان : م ∋ ح وكان : $\lim_{س \to \infty} \frac{(م + ٢) س^٣ - س + ٤}{٢ م س^٣ - ٢ س + ٥} = ٢$ فإن : م = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ١

(٢٤) $\lim_{س \to \infty} (س^٣ + ٧ س^٢ + ٨) = ...$

(أ) ∞ (ب) صفر (جـ) − ∞ (د) ١

(٢٥) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{س^٢ + س} - س) = ...$

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) ليس لها وجود.

(٢٦) إذا كان : أ > ب فإن : $\lim_{س \to \infty} \frac{س^أ}{س^ب} = ...$

(أ) صفر (ب) ∞ (جـ) ١ (د) أ − ب

(٢٧) إذا كان : أ < ب < صفر فإن : $\lim_{س \to \infty} \frac{س^أ}{س^ب} = ...$

(أ) ∞ (ب) − ∞ (جـ) صفر (د) أ − ب

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً من النهايات الآتية :

(١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ س - ٥}{٣ س + ٨}$ «$\frac{٢}{٣}$»

(٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ س - ٥}{٣ س^٢ + ٨}$ «صفر»

(٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ س^٢ - ٥}{٣ س + ٨}$ «∞»

٢ أوجد كلاً من النهايات الآتية :

(١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ س - ٤}{٣ س - ٢}$ «$\frac{٥}{٣}$»

(٢) 📖 $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ س^٢ + ٥ س + ١}{٣ س^٢ - ٧}$ «$\frac{٢}{٣}$»

(٣) 📖 $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ - ٦ س - ٣ س^٢}{٢ س^٢ + س + ٤}$ «$-\frac{٣}{٢}$»

(٤) 📖 $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٣ - ٢}{|س|^٣ + ١}$ «١»

(٥) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ س^٤ + ٢ س^٢ - ١}{٥ - س^٢ - ٢ س^٤}$ «−١»

(٦) $\lim_{س \to \infty} \frac{٧ س^٢ + ١}{٤ س^٣ - ٨ س + ١}$ «صفر»

(٧) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ س^٥ + ٣ س - ٢}{٣ س^٤ + ٥ س - ١}$ «∞»

(٨) $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ س^٧ + ٢ س - ١}{٦ س^٤ + ١٣}$ «∞»

(٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ - ٧ س^٨ + ٣ س^{١٤}}{٧ - ٦ س^{١٤} + ٢ س^٦}$ «$-\frac{١}{٢}$»

(١٠) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٧}{س^٢} + \frac{٢}{س} - ٣\right)$ «−٣»

(١١) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥ س^{-٣} + ٤ س^{-٢} - ٣}{٧ س^{-٣} - ٢ س^{-٢} + ٨}$ «$\frac{-٣}{٨}$»

(١٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥ س^{٣} - ٤ س^{٢} + ٢}{٧ - س + |٢ س|^{٣}}$ «$\frac{٥}{٨}$»

(١٣) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} (س^{٣} + ٥ س^{٢} + ١)$ «∞»

(١٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} (س^{٢} - س + ٥)$ «∞»

---

٣ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٣ س^{٢} - ٤ س + ٥}{(س + ٢)^{٢}}$ «٣»

(٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(٢ س + ٣)^{٢}}{٥ - ٣ س - س^{٢}}$ «−٤»

(٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٦ س^{٢} - ٥ س}{(٣ - س)(٢ + س)}$ «−٦»

(٤) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(س + ١)(٥ س - ٣)}{س^{٢} + ٣}$ «٥»

(٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٨ س^{٣} - س + ١}{(س + ١)(٢ س^{٢} - ٣)}$ «٤»

(٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س^{٣} - ٤ س + ٥}{(٢ س - ١)^{٣}}$ «$\frac{١}{٨}$»

(٧) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(٢ س + ٣)(٤ س^{٢} - ٥)}{(٣ س^{٢} - ٨)(٥ س - ٣)}$ «$\frac{٨}{١٥}$»

(٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(٢ س + ٣)(٥ س - ١)(س - ٢)}{س (س + ١)(٣ س - ١)}$ «$\frac{١٠}{٣}$»

(٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(٧ + \sqrt{س})(٣ + \sqrt{س})}{٤ س - ٣}$ «$\frac{١}{٤}$»

---

٤ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س + ٢}{\sqrt{٩ س^{٢} + ٢٥}}$ «$\frac{١}{٣}$»

(٢) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٤ - ٣ س^{٢}}{\sqrt{س^{٤} + ٥}}$ «−٣»

(٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{١}{س} \sqrt{٣ + ٤ س^{٢}}$ «٢»

(٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢ س + ١}{\sqrt{٤ س^{٢} + ٣ س - ٤}}$ «١»

(٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢ س - ٣}{\sqrt[٣]{١٢٥ س^{٣} + ٥}}$ «$\frac{٢}{٥}$»

(٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨ س^{٣} + ٥ س - ٢}}{٣ س + ٢}$ «$\frac{٢}{٣}$»

(٧) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٤ - ٣ س^{٣}}{\sqrt{س^{٦} + ٩}}$ «−٣»

(٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٩ س^{٢} - ٣ س + ٨}}{\sqrt[٣]{٣ س^{٢} + ١٢٥ س^{٣} + ٢}}$ «$\frac{٣}{٥}$»

(٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^{٢} + ١}}{\sqrt[٤]{س^{٤} + ٢}}$ «١»

(١٠) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٤ س^{٢} + ٧} + ٣ س}{٢ س + ٩}$ «$\frac{٥}{٢}$»

٥ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢}{س} + \frac{س^{٢} - س}{س^{٢} - ١} \right)$ «١»

② $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left[٧ + \frac{٢ س^{٢}}{(س + ٣)^{٢}} \right]$ «٩»

③ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left[\frac{س}{٢ س + ١} + \frac{٣ س^{٢}}{(س - ٣)^{٢}} \right]$ «$\frac{٧}{٢}$»

④ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢}{٣} - \frac{٣ س}{٢ س + ٧} \right)$ «$\frac{-٥}{٦}$»

⑤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left[\frac{٣}{س} + \frac{٢ س^{٥} + ١}{س^{٢} (س^{٣} + ٢)} \right]$ «٢»

⑥ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢ س^{٣}}{٢ س^{٢} + ١} - س \right)$ «صفر»

⑦ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{س^{٢} - ١}{س + ٢} - \frac{س^{٢} + ١}{س - ٢} \right)$ «-٤»

⑧ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^{٢} - ٢} - \sqrt{س^{٢} + س} \right)$ «$-\frac{١}{٢}$»

⑨ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^{٢} + س - ١} - \sqrt{س^{٢} - س + ١} \right)$ «١»

⑩ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} \left(\sqrt{٤ س^{٢} + ١} - \sqrt{س^{٢} + ١} \right)$ «١»

⑪ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^{٢} + ٥ س} - س \right)$ «$\frac{٥}{٢}$»

⑫ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} س \left(\sqrt{٤ س^{٢} + ١} - ٢ س \right)$ «$\frac{١}{٤}$»

---

٦ أوجد قيمتى أ ، ن إذا كانت : $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤ أ س^{ن} - ٤ س + ٥}{٣ - ٩ س + ٨ س^{٢}} = ٣$ «٦ ، ٢»

---

٧ أوجد قيمة أ إذا كانت : $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{أ س^{٣} + ٣}}{\sqrt{٤ س^{٢} + ٧}} = -١$ «-٨»

الوحدة الرابعة

حساب المثلثات

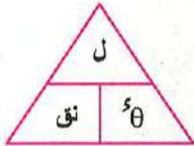


	مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها.
الدرس 1	قانون الجيب «قاعدة الجيب».
الدرس 2	قانون جيب التمام «قاعدة جيب التمام».
الدرس 3	حل المثلث.

فى نهاية الوحــدة : تطبيقات حياتية على دروس الوحدة.

مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها

القياس الدائرى والقياس الستينى لزاوية



- القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة

$$= \frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$$

أى أن $\theta^{ء} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ ومنها $\text{ل} = \theta^{ء}\ \text{نق}$ ، $\text{نق} = \frac{\text{ل}}{\theta^{ء}}$

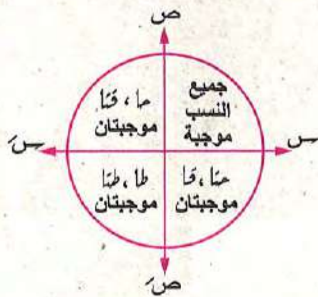
للاحظ أن

π بالتقدير الدائرى تكافئ 180° بالتقدير الستينى.

- **التحويل بين القياس الدائرى والقياس الستينى :**

$\frac{\text{س}^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{\theta^{ء}}{\pi}$ ومنها $\theta^{ء} = \text{س}^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}}$ ، $\text{س}^{\circ} = \theta^{ء} \times \frac{180^{\circ}}{\pi}$

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية



١ $\text{جتا}^2\theta + \text{جا}^2\theta = 1$

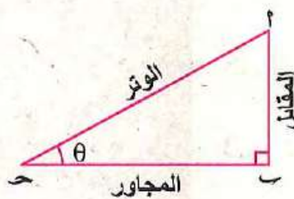
٢ $1 + \text{طا}^2\theta = \text{قا}^2\theta$

٣ $1 + \text{طتا}^2\theta = \text{قتا}^2\theta$

٤ $\text{جا}\theta\ \text{قتا}\theta = 1$ ، $\text{جتا}\theta\ \text{قا}\theta = 1$ ، $\text{طا}\theta\ \text{طتا}\theta = 1$

٥ $\text{طا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ، $\text{طتا}\theta = \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$

- **ينبغى تذكر العلاقات الآتية :**



١ $\text{جا}\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}$

٢ $\text{جتا}\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{بحـ}}{\text{أحـ}}$

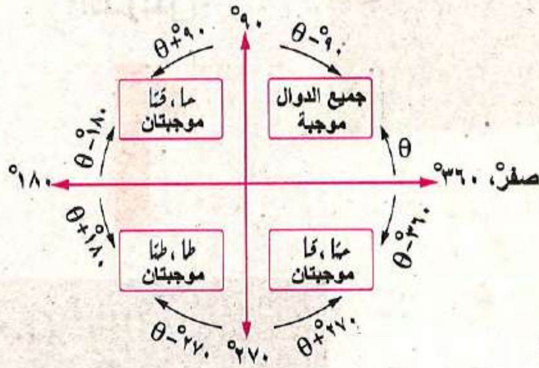
٣ $\text{طا}\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أب}}{\text{بحـ}}$

٤ إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها θ فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (س ، ص) فإن : $\text{س} = \text{جتا}\theta$ ، $\text{ص} = \text{جا}\theta$ ، $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1$

٥ العلاقات بين الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة

هى متطابقات ويمكن أن نتذكرها

من الشكل المقابل



فمثلًا :

حا (°٩٠ + θ) = جتا θ

، طا (°٣٦٠ − θ) = − طا θ

، ..... كل منهما متطابقة مثلثية.

مساحات بعض الأشكال الهندسية

* مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أ ب حا حـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ حا أ = $\frac{1}{2}$ أ حـ حا ب

* مساحة المثلث أ ب حـ = $\sqrt{ع(ع - أ)(ع - ب)(ع - حـ)}$ حيث ع = $\frac{أ + ب + حـ}{2}$

* مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما.

* مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س سم = $\frac{ن}{4}$ س^{2} ظتا $\frac{\pi}{ن}$

* مساحة الدائرة = π نق^{2} ، محيط الدائرة = ٢ π نق

* مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ $\theta^{ء}$ نق^{2} ، محيط القطاع = ٢ نق + ل

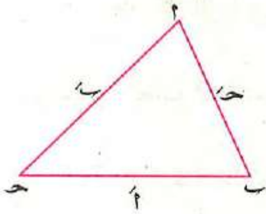
* مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^{2} ($\theta^{ء}$ − حا θ)

الدرس

1

قانون الجيب (قاعدة الجيب)

«فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها»



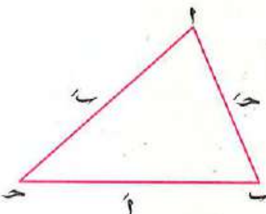
أى أنه فى أى مثلث أ ب ح يكون : $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا ح}}$

حيث إن الرموز أ ، ب ، ح تعبر عن قياسات زوايا Δ أ ب ح

كما أن الرموز أَ ، بَ ، حَ تعبر عن أطوال الأضلاع $\overline{\text{ب ح}}$ ، $\overline{\text{أ ح}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ على الترتيب.

البرهـان

∵ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين فيه × جيب الزاوية المحصورة بينهما.



∴ مساحة Δ أ ب ح = $\frac{1}{2}$ أَ حَ جا ب (١)

= $\frac{1}{2}$ حَ بَ جا أ (٢)

= $\frac{1}{2}$ أَ بَ جا ح (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ حَ بَ جا أ = أَ حَ جا ب = أَ بَ جا ح

وبالقسمة على أَ بَ حَ : ∴ $\frac{\text{جا أ}}{\text{أَ}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جا ح}}{\text{حَ}}$

∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا ح}}$ (وهو المطلوب)

تمرين مشهور

في أي مثلث أ ب حـ يكون : $\frac{أ}{\text{حا أ}} = \frac{ب}{\text{حا ب}} = \frac{حـ}{\text{حا حـ}} = ٢\ \text{نق}$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ

البرهــان

نرسم الدائرة التي تمر برؤوس Δ أ ب حـ ثم نرسم القطر $\overline{ب ء}$ والوتر $\overline{حـ ء}$

١ إذا كان Δ أ ب حـ حاد الزوايا :

فيكون ق (∠ ب حـ ء) = ٩٠° (محيطية مرسومة في نصف دائرة)

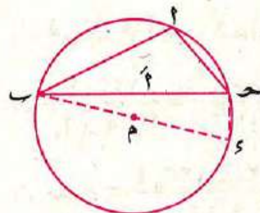
، ق (∠ أ) = ق (∠ ء) (محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{ب حـ}$)

في Δ ء ب حـ : $\text{حا ء} = \frac{أ}{ب ء} = \frac{أ}{٢\ \text{نق}}$ ∴ $\text{حا أ} = \frac{أ}{٢\ \text{نق}}$

∴ $\frac{أ}{\text{حا أ}} = ٢\ \text{نق}$ وبطريقة مماثلة يمكن إثبات أن : $\frac{ب}{\text{حا ب}} = ٢\ \text{نق}$ ، $\frac{حـ}{\text{حا حـ}} = ٢\ \text{نق}$

∴ $\frac{أ}{\text{حا أ}} = \frac{ب}{\text{حا ب}} = \frac{حـ}{\text{حا حـ}} = ٢\ \text{نق}$ (وهو المطلوب)

٢ إذا كان Δ أ ب حـ منفرج الزاوية :



فيكون : ق (∠ ب ء حـ) = ١٨٠° − ق (∠ أ)

∴ $\text{حا}(١٨٠° - أ) = \frac{ب حـ}{ب ء}$ ∴ $\text{حا أ} = \frac{أ}{٢\ \text{نق}}$

∴ $\frac{أ}{\text{حا أ}} = ٢\ \text{نق}$ ∴ $\frac{أ}{\text{حا أ}} = \frac{ب}{\text{حا ب}} = \frac{حـ}{\text{حا حـ}} = ٢\ \text{نق}$ (وهو المطلوب)

مثال ١

في Δ أ ب حـ إذا كان : أ = ١٠ سم ، ق (∠ أ) = ٣٠° ، ق (∠ ب) = ٤٥°

فأوجد مستخدمًا حاسبة الجيب كلاً من :

ب ، حـ لرقم عشري واحد وكذلك مساحة Δ أ ب حـ لأقرب عدد صحيح.

الحـــل

∵ ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٥°) = ١٠٥°

∴ $\frac{أ}{\text{حا أ}} = \frac{ب}{\text{حا ب}} = \frac{حـ}{\text{حا حـ}}$ ∴ $\frac{١٠}{\text{حا}٣٠°} = \frac{ب}{\text{حا}٤٥°} = \frac{حـ}{\text{حا}١٠٥°}$

∴ $ب = \frac{١٠\ \text{حا}٤٥°}{\text{حا}٣٠°} \approx ١٤,١$ سم ، $حـ = \frac{١٠\ \text{حا}١٠٥°}{\text{حا}٣٠°} \approx ١٩,٣$ سم

، مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ حا أ = $\frac{١}{٢}$ × ١٤,١ × ١٩,٣ حا ٣٠° ≈ ٦٨ سم^٢

مثال ٢

أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠ أ) = ٤٢ ٢٥° ، ق(∠ ب) = ٤٨ ١١٨° ، أ ب = ٢٠ سم

أوجد طول كل من : $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{أ حـ}$

الحـــل

∵ ق(∠ حـ) = ١٨٠° − (٤٢ ٢٥° + ٤٨ ١١٨°) = ٣٠ ٣٥°

∴ $\frac{ب حـ}{جا أ} = \frac{أ حـ}{جا ب} = \frac{أ ب}{جا حـ}$ ∴ $\frac{ب حـ}{جا ٤٢ ٢٥°} = \frac{أ حـ}{جا ٤٨ ١١٨°} = \frac{٢٠}{جا ٣٠ ٣٥°}$

∴ ب حـ = $\frac{٢٠ جا ٤٢ ٢٥°}{جا ٣٠ ٣٥°}$ ≈ ١٤,٩ سم ، أ حـ = $\frac{٢٠ جا ٤٨ ١١٨°}{جا ٣٠ ٣٥°}$ ≈ ٣٠,٢ سم

مثال ٣

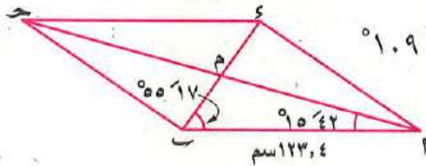
أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ١٢٣,٤ سم ، القطران $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب ء}$.

يصنعان مع الضلع $\overline{أ ب}$ زاويتين قياساهما ٤٢ ١٥° ، ١٧ ٥٥° على الترتيب **أوجد :**

١ طول كل من القطرين $\overline{ب ء}$ ، $\overline{أ حـ}$ ٢ مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء .

الحـــل

نفرض أن : $\overline{أ حـ}$ ∩ $\overline{ب ء}$ = {م}



∴ فى Δ م أ ب : ق(∠ أ م ب) = ١٨٠° − (٤٢ ١٥° + ١٧ ٥٥°) = ١ ١٠٩°

∴ $\frac{١٢٣,٤}{جا ١ ١٠٩°} = \frac{ب م}{جا ٤٢ ١٥°} = \frac{أ م}{جا ١٧ ٥٥°}$

∴ ب م = $\frac{١٢٣,٤ جا ٤٢ ١٥°}{جا ١ ١٠٩°}$ ≈ ٣٥,٣ سم ∴ ب ء = ٢ ب م = ٧٠,٦ سم

، أ م = $\frac{١٢٣,٤ جا ١٧ ٥٥°}{جا ١ ١٠٩°}$ ≈ ١٠٧,٣ سم ∴ أ حـ = ٢ أ م = ٢١٤,٦ سم

، مساحة ▱ أ ب حـ ء = ٤ مساحة Δ م أ ب = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ب م × أ م جا (∠ أ م ب)

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ٣٥,٣ × ١٠٧,٣ جا ١ ١٠٩° ≈ ٧١٦٢ سم^{٢}

مثال ٤

أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{١}{٢}$ جا أ = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٤}$ جا حـ أوجد أطوال أضلاعه إذا علم أن محيطه = ١٨ سم

الحـــل

∵ $\frac{جا أ}{٢} = \frac{جا ب}{٣} = \frac{جا حـ}{٤}$ ∴ $\frac{٢}{جا أ} = \frac{٣}{جا ب} = \frac{٤}{جا حـ}$ ∴ أً : بً : حـً = ٢ : ٣ : ٤

بفرض أن أً = ٢ ك ، بً = ٣ ك ، حـً = ٤ ك

، ∵ محيط المثلث = ١٨ سم ∴ ٢ ك + ٣ ك + ٤ ك = ١٨ ∴ ٩ ك = ١٨

∴ ك = ٢ ∴ أً = ٤ سم ، بً = ٦ سم ، حـً = ٨ سم

مثال ٥

إذا كان محيط Δ أ ب ح يساوى ٢٤ سم ، ق(∠ب) = ٣٠° ، ق(∠ح) = ٤٨° أوجد : ب

◄ **الحـــل**

∵ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٨°) = ١٠٢°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{جا ح}}$ ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ١٠٢°}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٣٠°}} = \frac{\text{ح}}{\text{جا ٤٨°}}$

∵ $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}}$ = إحدى النسب ∴ $\frac{\text{أ + ب + ح}}{\text{جا ١٠٢° + جا ٣٠° + جا ٤٨°}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٣٠°}}$

∴ $\frac{\text{٢٤}}{\text{جا ١٠٢° + جا ٣٠° + جا ٤٨°}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٣٠°}}$ ∴ ب = $\frac{\text{٢٤ جا ٣٠°}}{\text{جا ١٠٢° + جا ٣٠° + جا ٤٨°}}$ ≈ ٥,٤ سم

مثال ٦

فى Δ أ ب ح إذا كان : ب = ٧ سم ، ق(∠ب) = ٣٠° ، ح = ٩ سم

احسب طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب ح واحسب أيضًا ق(∠أ) لأقرب درجة.

◄ **الحـــل**

∵ $\frac{\text{ب}}{\text{جا ب}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{\text{٧}}{\text{جا ٣٠°}}$ = ٢ نق

∴ نق = $\frac{\text{٧}}{\text{٢ جا ٣٠°}}$ = ٧ سم ، ∵ $\frac{\text{ح}}{\text{جا ح}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{٩}}{\text{جا ح}}$ = ١٤ ∴ جا ح = $\frac{\text{٩}}{\text{١٤}}$

∴ ق(∠ح) ≈ ٤٠° ∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٠°) = ١١٠°

أ، ق(∠ح) ≈ ١٤٠° ∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ١٤٠°) = ١٠°

> **لاحـظ أنه**
> يوجد مثلثان يحققان هـذه المعطيات وهـذه الحالة تعـرف بالحالـة المبهمة وسوف ندرسها فى درس حل المثلث.

مثال ٧

الشكل المقابل يمثل ثلاثة مواقع لمدن أ ، ب ، ح تكون مثلثًا.

إذا كانت المسافة بين النقطتين أ ، ب على الرسم تساوى ١٤ سم ، قياس الزاوية عند أ يساوى ٣٥° ، قياس الزاوية عند ح يساوى ٤٢° أوجد لأقرب كيلو متر المسافة بين المدينتين ب ، ح. إذا كان كل ١ سم فى الرسم يمثل ٢٠ كم فى الحقيقة.

شمال
غرب
شرق
جنوب
١٤ سم
٣٥°
٤٢°

◄ **الحـــل**

∵ $\frac{\text{١٤}}{\text{جا ٤٢°}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{جا ٣٥°}}$ ∴ ب ح = $\frac{\text{١٤ جا ٣٥°}}{\text{جا ٤٢°}}$ ≈ ١٢ سم

، ∵ كل ١ سم فى الرسم يمثل ٢٠ كم فى الحقيقة. ∴ ١٢ سم فى الرسم يمثل ٢٠ × ١٢ = ٢٤٠ كم

أى أن المسافة بين المدينتين ب ، ح تساوى ٢٤٠ كم



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا / أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى أى مثلث س ص ع يكون : س ص : ص ع = ...

(أ) جا س : جا ص　　(ب) جا ص : جا ع

(جـ) جا ع : جا س　　(د) جا ع : جا ص

(٢) فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق(∠أ) = ٣٠° ، حـَ = ١٥ $\sqrt{3}$ سم ، ق(∠حـ) = ٦٠°

فإن : أَ = ... سم

(أ) ٣٠　　(ب) ٤٥　　(جـ) ١٥　　(د) ٦٠

(٣) فى المثلث ء هـ و الذى فيه : ق(∠ء) = ٨٠° ، ق(∠هـ) = ٦٠°

إذا كان : وَ = ١٢ سم　فإن : ءَ = ... سم

(أ) $\frac{١٢ \text{ جا } ٨٠°}{\text{جا } ٤٠°}$　　(ب) $\frac{١٢ \text{ جا } ٨٠°}{\text{جا } ٦٠°}$　　(جـ) $\frac{١٢ \text{ جا } ٤٠°}{\text{جا } ٨٠°}$　　(د) $\frac{١٢ \text{ جتا } ٨٠°}{\text{جتا } ٤٠°}$

(٤) فى Δ أ ب حـ : إذا كان : أَ = ٤ سم ، بَ = ٧ سم ، ق(∠حـ) = ١٢٠°

فإن مساحة المثلث = ... سم^{٢}

(أ) ٧ $\sqrt{3}$　　(ب) ١٤ $\sqrt{3}$　　(جـ) ٧　　(د) ١٤

(٥) س ص ع مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ $\sqrt{3}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى .... سم

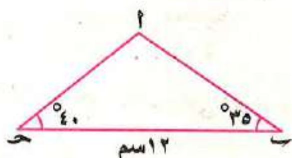
(أ) ٥　　(ب) ١٠　　(جـ) ١٥　　(د) ٢٠

(٦) Δ س ص ع فيه : $\frac{\text{سَ}}{\text{جا س}}$ = ٦ فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... وحدة طول.

(أ) ٦　　(ب) ١٢　　(جـ) ٣　　(د) ٩

(٧) فى الشكل المقابل :

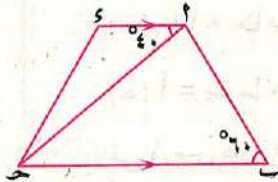
طول $\overline{\text{أ ب}}$ ≃ .... سم



(أ) ٦　　(ب) ٧

(جـ) ٨　　(د) ٩

(٨) فى الشكل المقابل :



أ ء // ب حـ ، أ ب = ٤ سم

، ق (∠ ء أ حـ) = ٤٠° ، ق (∠ ب) = ٦٠°

فإن : طول أ حـ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٤

(٩) فى الشكل المقابل دائرة مركزها م ، إذا كان : ب م = ٦ سم



فإن أ ب = ... سم

(أ) ٦ جا ٥٠° (ب) ١٢ جا ٥٠°

(جـ) ٦ جتا ٥٠° (د) ١٢ جتا ٥٠°

(١٠) دائرة طول قطرها ٢٠ سم ، تمر برؤوس Δ أ ب حـ الحاد الزوايا الذى فيه : ب حـ = ١٠ سم

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٥٠°

(١١) أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٤٥° وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٦ سم

فإن : أَ = ... سم

(أ) ١٣ (ب) ٦ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١٢ (د) $\sqrt{٢}$

(١٢) إذا كان طول ضلع ما فى أى مثلث = ١٢ سم ، وقياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع = ٥٥° فإن محيط الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث ≈ .... سم

(أ) ٣٦ (ب) ٤٢ (جـ) ٤٦ (د) ٥٢

(١٣) إذا كان محيط المثلث أ ب حـ يساوى ١٥ سم ، ق (∠ أ) = ٥٣° ، ق (∠ ب) = ٤٧°

فإن : طول أ ب ≈ .... سم

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٥ (د) ٨

(١٤) أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ٢٧ سم ، ق (∠ ب) = ٨٢° ، ق (∠ حـ) = ٥٦°

فإن مساحة سطحه ≈ .... سم^{٢}

(أ) ٥٤٠ (ب) ٤٤٧ (جـ) ٣٥٠ (د) ٤٠٠

(١٥) مثلث أ ب حـ فيه ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٢ : ٣ : ٤ ، أ ب = ١٢ سم

فإن : طول أ حـ ≈ .... سم

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٦ (د) ١٨

(١٦) في المثلث ا ب ح أي من العبارات التالية صحيحة ؟

(أ) حا ا + حتا ب = اَ + بَ (ب) اَ حا ب = بَ حا ا

(ج) اَ = بَ حا ح (د) $\frac{\text{اَ}}{\text{حا ا}} = \frac{\text{حا ب}}{\text{بَ}}$

(١٧) في Δ س ص ع يكون المقدار : ٢ نق حا س = ... «حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة له»

(أ) عَ (ب) صَ

(ج) سَ (د) مساحة Δ س ص ع

(١٨) إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع فإن : $\frac{\text{صَ}}{\text{٢ حا ص}}$ = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (ج) $\frac{1}{2}$ نق (د) ٤ نق

(١٩) 📖 في أي مثلث ل م ن يكون $\frac{\text{لَ}}{\text{حا ل}}$ مساويًا ....

(أ) $\frac{\text{مَ}}{\text{حا ن}}$ (ب) $\frac{\text{نَ}}{\text{حا م}}$ (ج) $\frac{\text{مَ + نَ}}{\text{حا ن + حا م}}$ (د) ٣ نق

(٢٠) 📖 في Δ ا ب ح إذا كان : $\frac{\text{حا ا}}{\text{اَ}} = \frac{\text{حا ب}}{\text{بَ}}$ فإن : $\frac{\text{٢ حا ا − حا ب}}{\text{..................}} = \frac{\text{حا ا}}{\text{اَ}}$

(أ) اَ + بَ (ب) ٢ اَ + بَ (ج) اَ − ٢ بَ (د) ٢ اَ − بَ

(٢١) إذا كان المثلث ا ب ح حاد الزوايا وكان ٢ اَ = $\frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}}$ فإن : ق (∠ ا) = ...

(أ) °٣٠ (ب) °٤٥ (ج) °٦٠ (د) °٧٥

(٢٢) إذا كان : ا ب ح مثلث فيه : حا ا = ٢ حا ح ، ب ح = ٦ سم فإن : ا ب = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٦

(٢٣) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب ح يساوى ٣ سم

وكان : حا ا + حا ب + حا ح = ٢ فإن محيط المثلث ا ب ح = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (ج) ١٢ (د) ٢٤

(٢٤) 📖 في أي مثلث ا ب ح يكون $\frac{\text{حا (ا + ب)}}{\text{حا ا + حا ب}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\text{حَ}}{\text{اَ + بَ}}$ (ج) $\frac{\text{اَ}}{\text{بَ + حَ}}$ (د) $\frac{\text{بَ}}{\text{اَ + حَ}}$

(٢٥) في Δ ا ب ح يكون : $\frac{\text{اَ}}{\text{اَ + بَ}} = \frac{\text{حا ا}}{\text{.........}}$

(أ) حا ب (ب) حا ح (ج) حا ا + حا ب (د) حا ا + حا ح

(٢٦) 📖 في Δ س ص ع : إذا كان ٣ حا س = ٤ حا ص = ٢ حا ع فإن سَ : صَ : عَ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٦ : ٤ : ٣ (ج) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٤ : ٣ : ٦

(٢٧) 📖 أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{\text{٢ جا ب}}{٥} = \frac{\text{جا حـ}}{٤}$ فإن : أ : ب : حـ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٤

(٢٨) فى Δ أ ب حـ إذا كان : $\frac{\text{جا أ}}{٤} = \frac{\text{جا ب}}{٩} = \frac{\text{جا حـ}}{٧}$ فإن أكبر زاوية قياسًا تكون ....

(أ) ∠ أ (ب) ∠ ب (جـ) ∠ حـ (د) قائمة.

(٢٩) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٣ : ٥ : ٤

فإن : $\text{حـ}^٢ : \text{أ}^٢$ = ...

(أ) $\sqrt{٦}$: ٢ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٣ : ٢

(٣٠) فى أى مثلث أ ب حـ يكون : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{جا ب}}{\text{جا أ}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ (ب) $\frac{\text{جا حـ}}{\text{حـ}}$ (جـ) ٤ $\text{نق}^٢$ (د) ١

(٣١) فى Δ أ ب حـ إذا كان نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث = ٤ سم

فإن : $\frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ}}{\text{جا أ} + \text{جا ب} + \text{جا حـ}}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٣٢) إذا كان نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ يساوى نق

فإن محيط المثلث = ... (جا أ + جا ب + جا حـ)

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) ٤ $\text{نق}^٢$ (د) ٨ $\text{نق}^٣$

(٣٣) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ − ب = ٤ سم ، جا أ = $\frac{٣}{٢}$ جا ب فإن : أ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٣٤) إذا كان أ ب حـ مثلث محيطه ٢٤ سم وكان : جا أ + جا ب = ٣ جا حـ فإن : حـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(٣٥) أ ب حـ مثلث فيه جا ب + جا حـ = ٤ جا أ وكان ب + حـ = ٢ أ + ١٠ سم

فإن : أ = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٣٦) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، ق (∠ أ) − ق (∠ حـ) = ٩٠°

فإن : ظا حـ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٣٧) إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ وكان أ = نق

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° فقط. (ب) ٣٠° أو ١٢٠° (جـ) ١٥٠° فقط. (د) ٣٠° أو ١٥٠°

(٣٨) إذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ هى Δ ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

فإن : $\frac{٤ \text{ نق } \Delta}{أ ب حـ}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

(٣٩) فى Δ أ ب حـ يكون $\frac{٢ ب}{جا ب}$ = ... نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

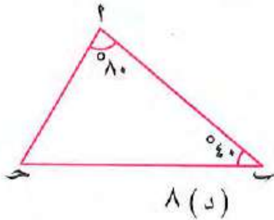
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٤٠) إذا كان المثلث أ ب حـ قائم الزاوية ومتساوى الساقين ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... (بدلالة نق)

(أ) $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (ب) ٢ نق^٢ (جـ) نق^٢ (د) ٤ نق^٢

(٤١) فى الشكل المقابل :



إذا كان محيط Δ أ ب حـ = ٢٠ سم

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه ≈ .... سم

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ س ص ع مثلث فيه : ق (∠ س) = ٨٠° ، ق (∠ ص) = ٦٠° ، ع = ١٠ سم

أوجد كلاً من س ، ص لأقرب سم «١٥ سم ، ١٣ سم»

٢ أ ب حـ مثلث فيه : حـ = ١٩ سم ، ق (∠ أ) = ١١٢° ، ق (∠ ب) = ٣٣° أوجد ب ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ لأقرب رقمين عشريين. «١٨,٠٤ سم ، ١٦,٥٦سم»

٣ س ص ع مثلث فيه : ص = ٦٨,٤ سم ، ق (∠ ص) = ١٠٠° ، ق (∠ ع) = ٤٠°

أوجد : (١) س (٢) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع

(٣) مساحة المثلث س ص ع لأقرب سم^٢ «٤٤,٦٤ سم ، ٣٤,٧٣ سم ، ٩٨١ سم^٢»

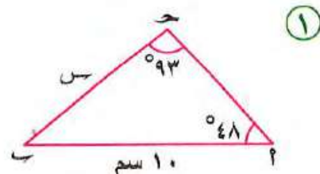
٤ أ ب حـ مثلث فيه : ب = ١٠ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (∠ حـ) = ٨٠°

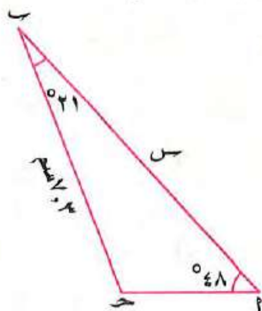
أوجد طول أكبر ضلع فى المثلث. «١١ سم»

٥ أ ب حـ مثلث فيه : حـ = ٤,٥ سم ، ق (∠ أ) = ١٠٠° ، ق (∠ ب) = ١٥°

أوجد طول أصغر ضلع فى المثلث. «١,٣ سم»

٦ 📖 باستخدام قانون الجيب أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة :





---

٧ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠ أ) = ٦٠° ، أ = ٧ $\sqrt{٣}$ سم أوجد مساحة ومحيط الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ «١٥٤ سم^{٢} ، ٤٤ سم»

---

٨ أ ب حـ مثلث فيه : أ = ١٣ سم ، ق(∠ أ) = ٨َ ٥٣° ، حـ = ١٥ سم

احسب طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ ، احسب ق(∠ حـ)

«٨,١ سم ، ٩ً ٢٣َ ٦٧° أ ، ٥١ً ٣٦َ ١١٢°»

---

٩ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠ أ) = ٣٥° ، أ = ٨ سم ، ب = ٦ سم **أوجد :** ق(∠ ب) «٤٥ً ٢٨َ ٢٥°»

---

١٠ 📖 فى المثلث أ ب حـ : ق(∠ أ) = ٢٢َ ٦٧° ، ق(∠ حـ) = ٣٣َ ٤٤° ، ب = ١٠٠ سم

، أوجد محيط المثلث أ ب حـ ومساحة سطحه. «٢٧٥ سم ، ٣٤٧٣ سم^{٢}»

---

١١ 📖 أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠ ب) = ٣٥° ، ق(∠ حـ) = ٧٠° ، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ١٦ سم احسب مساحة ومحيط هذا المثلث لأقرب عدد صحيح. «٢٦٧ سم^{٢} ، ٧٩ سم»

---

١٢ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : ق(∠ أ) = ١٢٠° ، وطول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوسه يساوى ١٢ سم أوجد حـ ثم احسب مساحة △ أ ب حـ «١٢ سم ، ٦٢,٤ سم^{٢}»

---

١٣ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ = ب ، ق(∠ أ) = ١٥° ، محيطه = ٢٥ سم

أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوسه. «٤٧٤ سم^{٢}»

---

١٤ إذا كان محيط △ أ ب حـ = ٤٠ سم ، ق(∠ أ) = ٤٤° ، ق(∠ ب) = ٦٦°

فأوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب حـ «١٠,٩ سم ، ١٤,٣ سم ، ١٤,٨ سم»

---

١٥ أ ب حـ مثلث فيه : حـ = ١٢ سم ، ق(∠ ب) = ٣ ق(∠ أ) = ٦٠°

أوجد أ ثم أوجد مساحة المثلث لأقرب سم^{٢} «٤,٢ سم ، ٢٢ سم^{٢}»

---

١٦ 📖 أ ب حـ مثلث مساحة سطحه ٤٥٠ سم^{٢} ، ق(∠ ب) = ٨٢° ، ق(∠ حـ) = ٥٦° أوجد قيمة أ «٢٧ سم»

١٧ أ ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : أ حـ = ١٢ سم ، جا أ = ٠,٦ ، مساحته تساوى ٤٣,٢ سم²
أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$ ، طول $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق (∠ ب) «١٢ سم ، ٧,٦ سم ، ٣٤ ٧١°»

١٨ أوجد محيط المثلث أ ب حـ الحاد الزوايا إذا كان :
أَ = ٧ سم ، بَ = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠° «٢٠ سم»

١٩ أوجد طول قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ فى كل من الحالتين الآتيتين :
(١) ق (∠ أ) = ٧٥° ، أَ = ٢١ سم
(٢) ق (∠ ب) = ٥٠° ، ق (∠ حـ) = ٦٥° ، حَ − بَ = ٦ سم «٢١,٧ سم ، ٤٢,٨ سم»

٢٠ أ ب حـ مثلث فيه : بَ = ٥ سم ، ظا حـ = $\frac{٤}{٣}$ ، ق (∠ ب) = ٣٠°
أوجد لأقرب سنتيمتر كلاً من أَ ، حَ ومساحة المثلث أ ب حـ «١٠ سم ، ٨ سم ، ٢٠ سم²»

٢١ س ص ع مثلث فيه : جا س + جا ص + جا ع = ٢,٣٧ ، ومحيطه = ٥٦,٨٨ سم
أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه. «١٢ سم»

٢٢ أ ب حـ مثلث فيه : جا أ : جا ب : جا حـ = ٢ : ٤ : ٥ ، حَ − بَ = ٣ سم
أوجد كلاً من : أَ ، بَ «٦ سم ، ١٢ سم»

٢٣ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٣ : ٤ : ٣
فإذا كان : أَ = ٥ سم فأوجد محيط المثلث. «١٥,٩ سم»

٢٤ س ص ع مثلث فيه : ق (∠ س) = $\frac{٢}{٣}$ ق (∠ ص) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ ع) ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ١٠ سم أوجد مساحة Δ س ص ع «١١٠ سم²»

٢٥ أ ب حـ مثلث فيه : ٦ جا أ = ٤ جا ب = ٣ جا حـ ، محيطه = ٤٥ سم
أوجد كلاً من : أَ ، حَ «١٠ سم ، ٢٠ سم»

٢٦ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ وتران فى دائرة طولاهما ٤٣,٥ سم ، ٥٢,١ سم ، مرسومان فى جهتين مختلفتين من القطر $\overline{\text{أ ء}}$ الذى طوله ١٠٠ سم أوجد :
(١) ق (∠ ب أ حـ) (٢) طول $\overline{\text{ب حـ}}$ «٤٩ ١٢٢° ، ٨٤ سم»

٢٧ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٧٠°
، ب ء = ٨ سم أوجد محيط متوازى الأضلاع. «٣٨ سم»

٢٨ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ١٨,٦ سم ، ق(∠ حـ أ ب) = ٢٢° ٣٦َ
، ق(∠ ء ب أ) = ٣٨° ٤٤َ أوجد طول القطر $\overline{\text{أ حـ}}$ ، ومساحة متوازى الأضلاع. «٢٦,٤٦ سم ، ٢٩٢ سم^2»

---

٢٩ أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، أ حـ = ٢٠ سم ، ق(∠ أ م ء) = ١٣٠° ، ق(∠ حـ أ ب) = ٨٥°
أوجد طول $\overline{\text{ب ء}}$ ثم أوجد مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء «٢٨,٢ سم ، ٢١٦ سم^2»

---

٣٠ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، أ ء = ٢٠ سم ، ق(∠ ء) = ١٢٠°
، ق(∠ ب) = ٦٢° ، ق(∠ أ حـ ب) = ٢٥° ٢٣َ
أوجد طول كل من : $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ لأقرب سم «٢٩ سم ، ٣٣ سم»

---

٣١ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : حـ ء = ١٠٠ سم ، ق(∠ ب حـ أ) = ٣٦°
، ق(∠ ب ء أ) = ٥٥° ، ق(∠ ب حـ ء) = ٨٥° ، ق(∠ حـ ء أ) = ٨٧°
أوجد طول كل من : $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ لأقرب سنتيمتر. «١١٢ سم ، ١٤٤ سم»

---

٣٢ إذا كان أ ب حـ ء شكلاً رباعيًا فيه : ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، ق(∠ ب أ ء) = ٨٠°
، أ ب = أ ء = ١٠ سم ، ب ء = ب حـ احسب مساحة الشكل أ ب حـ ء «١٠٢ سم^2»

---

٣٣ أ ب حـ ء هـ مخمس منتظم طول ضلعه ١٨,٢٦ سم ، أوجد طول قطره $\overline{\text{أ حـ}}$ «٢٩,٥ سم»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ يساوى ٣ سم

فإن : $\frac{\text{أ ب حـ}}{\text{حا أ حا ب حا حـ}}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٢٧ (د) ٢١٦

(٢) إذا كان أ ب حـ مثلث فإن : أ قتا أ + ب قتا ب + حـ قتا حـ = ...

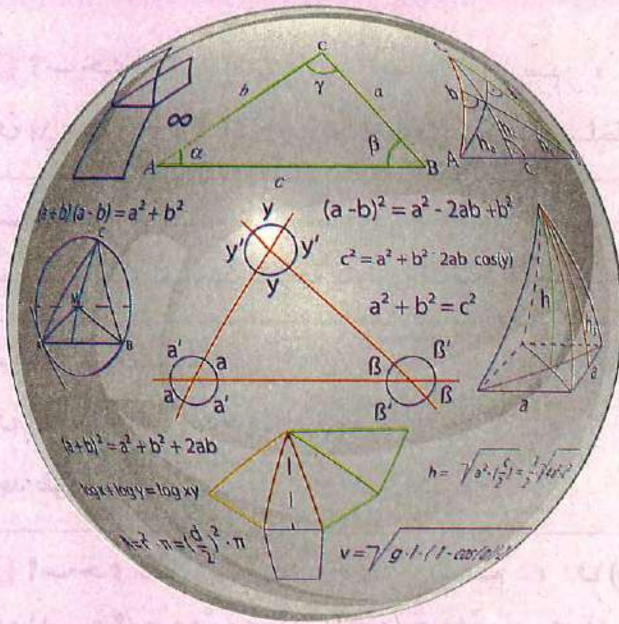
(أ) ٢ نق (ب) ٤ نق (جـ) ٦ نق (د) ٨ نق

(٣) إذا كان : أ = حا ب ، ب = حا حـ ، حـ = حا أ فإن محيط الدائرة المارة
برؤوس المثلث أ ب حـ يساوى ....

(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (جـ) π (د) ٢ π

(٤) فى Δ أ ب حـ : $\frac{\text{أ حا أ + ب حا ب + حـ حا حـ}}{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{حـ}^2}$ = ...

(أ) $\frac{1}{\text{نق}^2}$ (ب) $\frac{1}{\text{٢ نق}}$ (جـ) ٢ نق (د) نق^2



الدرس

2

قانون جيب التمام (قاعدة جيب التمام)

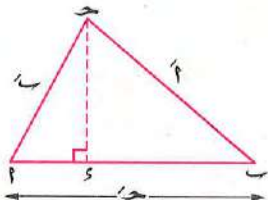
فى أى مثلث أ ب جـ يكون :

$أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢ - ٢\, ب\, جـ \,جتا\, أ$	ومنها	$جتا\, أ = \dfrac{ب^٢ + جـ^٢ - أ^٢}{٢\, ب\, جـ}$
$ب^٢ = أ^٢ + جـ^٢ - ٢\, أ\, جـ \,جتا\, ب$	ومنها	$جتا\, ب = \dfrac{أ^٢ + جـ^٢ - ب^٢}{٢\, أ\, جـ}$
$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ - ٢\, أ\, ب \,جتا\, جـ$	ومنها	$جتا\, جـ = \dfrac{أ^٢ + ب^٢ - جـ^٢}{٢\, أ\, ب}$
تستخدم هذه القاعدة إذا علم طولا ضلعين فى Δ أ ب جـ وقياس الزاوية المحصورة بينهما.		تستخدم هذه القاعدة إذا علمت أطوال أضلاع Δ أ ب جـ أو النسبة بينها.

البرهــان

ليكن المطلوب إثبات أن : $أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢ - ٢\, ب\, جـ \,جتا\, أ$

أولاً : إذا كان Δ أ ب جـ حاد الزوايا :



نرسم $\overleftrightarrow{جـ ء} \perp \overline{أ ب}$ يقطعها فى ء

، فى Δ جـ ء ب القائم الزاوية فى ء :

$\because (ب جـ)^٢ = (جـ ء)^٢ + (ء ب)^٢$

$\therefore (ب جـ)^٢ = (جـ ء)^٢ + (أ ب - أ ء)^٢ = (جـ ء)^٢ + (أ ء)^٢ + (أ ب)^٢ - ٢\,(أ ب)\,(أ ء)$

، $\because (جـ ء)^٢ + (أ ء)^٢ = (أ جـ)^٢$ ، أ ء = أ جـ جتا أ

∴ $(ب ح)^2 = (ا ح)^2 + (ا ب)^2 - 2 (ا ب) (ا ح)$ جتا ا

∴ $ا^2 = ب^2 + ح^2 - 2$ ب ح جتا ا

ومنها جتا ا $= \frac{ب^2 + ح^2 - ا^2}{2 ب ح}$ (وهو المطلوب)

ثانيًا : إذا كان Δ ا ب ح منفرج الزاوية فى ا :

نرسم ح ء ⊥ $\overleftarrow{ب ا}$ يقطعه فى ء

، فى Δ ح ء ب القائم الزاوية فى ء :

∵ $(ب ح)^2 = (ح ء)^2 + (ء ب)^2$

∴ $(ب ح)^2 = (ح ء)^2 + (ا ب + ا ء)^2 = (ح ء)^2 + (ا ء)^2 + (ا ب)^2 + 2 (ا ب) (ا ء)$

، ∵ $(ح ء)^2 + (ا ء)^2 = (ا ح)^2$ ، ا ء = ا ح جتا $(180° - ا)$ = − ا ح جتا ا

∴ $(ب ح)^2 = (ا ح)^2 + (ا ب)^2 - 2 (ا ب) (ا ح)$ جتا ا

∴ $ا^2 = ب^2 + ح^2 - 2$ ب ح جتا ا ومنها جتا ا $= \frac{ب^2 + ح^2 - ا^2}{2 ب ح}$ (وهو المطلوب)

لاحظ أن : قانون جيب التمام صحيح أيضًا فى حالة المثلث القائم الزاوية

[وذلك بوضع جتا ا = جتا °90 = صفر]

ملاحظات

1 لإيجاد قياس إحدى زوايا مثلث يفضل استخدام قانون جيب التمام لأنه يحدد نوع الزاوية إذا كانت حادة أو منفرجة.

2 إذا كان ا : ب : ح = 2 : 3 : 4 نفرض أن : ا = 2 ك ، ب = 3 ك ، ح = 4 ك حيث ك ∈ ع* ثم نعوض فى قانون جيب التمام لإيجاد قياسات زوايا Δ ا ب ح

3 لإثبات أن الشكل ا ب ح ء رباعى دائرى :

– نثبت أن زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان :

ق (∠ ا) + ق (∠ ح) = °180 **أى أن** جتا ا + جتا ح = صفر

أ، ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = °180 **أى أن** جتا ب + جتا ء = صفر

– نثبت أن قياسى زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة فيه وفى جهة واحدة منها متساويان :

كأن نثبت أن : ق (∠ ب ا ح) = ق (∠ ب ء ح) **أى أن** جتا (∠ ب ا ح) = جتا (∠ ب ء ح)

مثال ١

فى Δ أ ب حـ أوجد قيمة أَ إذا كان : بَ = ٣٠ سم ، حـَ = ١٤ سم ، ق(∠ أ) = ٦٠°

الحـــل

∵ $أَ^٢ = بَ^٢ + حـَ^٢ - ٢ بَ حـَ$ جتا أ

∴ $أَ^٢ = (٣٠)^٢ + (١٤)^٢ - ٢ × ٣٠ × ١٤ ×$ جتا ٦٠° = ٦٧٦

∴ أَ = $\sqrt{٦٧٦}$ = ٢٦ سم

مثال ٢

س ص ع مثلث فيه : سَ = ٤ سم ، صَ = ٥ سم ، عَ = ٦ سم

احسب قياس أكبر زواياه ، وكذلك احسب مساحته.

الحـــل

أكبر الزوايا قياسًا تقابل أكبر الأضلاع طولاً.

∴ جتا ع = $\frac{سَ^٢ + صَ^٢ - عَ^٢}{٢ سَ صَ} = \frac{٤^٢ + ٥^٢ - ٦^٢}{٢ × ٤ × ٥}$ = ٠,١٢٥

∴ ق(∠ ع) ≈ ٩ً ٤٩َ ٨٢°

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ سَ صَ جا ع = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٥ × جا ٩ً ٤٩َ ٨٢° ≈ ٩,٩ سم^٢

مثال ٣

أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{١}{٢}$ جا أ = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٤}$ جا حـ **احسب :** ق(∠ حـ)

الحـــل

∵ $\frac{جا أ}{٢} = \frac{جا ب}{٣} = \frac{جا حـ}{٤}$ ∴ $\frac{٢}{جا أ} = \frac{٣}{جا ب} = \frac{٤}{جا حـ}$

∴ أَ : بَ : حـَ = ٢ : ٣ : ٤ وبفرض أن : أَ = ٢ ك ، بَ = ٣ ك ، حـَ = ٤ ك

∴ جتا حـ = $\frac{أَ^٢ + بَ^٢ - حـَ^٢}{٢ أَ بَ} = \frac{٤ ك^٢ + ٩ ك^٢ - ١٦ ك^٢}{٢ × ٢ ك × ٣ ك} = \frac{-٣ ك^٢}{١٢ ك^٢} = -\frac{١}{٤}$

∴ ق(∠ حـ) = ٣٩ً ٢٨َ ١٠٤°

مثال ٤

أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ١٣ سم ، بَ = ١٤ سم ، حـَ = ١٥ سم

أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

الحــل

$\because$ حتا أ $= \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 \, ب \, حـ} = \frac{196 + 225 - 169}{2 \times 14 \times 15} = \frac{3}{5}$ $\therefore$ حا أ $= \frac{4}{5}$

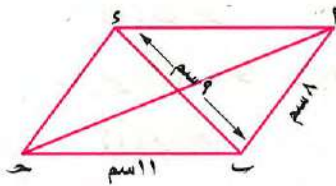
، $\because \frac{أ}{\text{حا أ}} = 2$ نق $\therefore \frac{13}{\frac{4}{5}} = 2$ نق

$\therefore$ نق $= \frac{13}{2 \times \frac{4}{5}} = 8\frac{1}{8}$ سم

مثال ٥

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١١ سم ، ب ء = ٩ سم

أوجد : طول قطره $\overline{أحـ}$



الحــل

فى Δ أ ب ء : حتا أ $= \frac{(8)^2 + (11)^2 - (9)^2}{2 \times 8 \times 11} = \frac{13}{22}$

، $\because$ ∠ب تكمل ∠أ (زاويتان متتاليتان فى ▱ أ ب حـ ء)

$\therefore$ حتا ب $= -$ حتا أ $= \frac{-13}{22}$

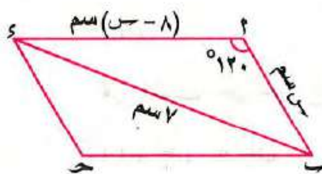
$\therefore$ فى Δ أ ب حـ : $(\text{أحـ})^2 = (8)^2 + (11)^2 - 2 \times 8 \times 11 \times \frac{-13}{22} = 289$

$\therefore$ أ حـ = ١٧ سم

مثال ٦

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠أ) = ١٢٠° ، ومحيطه = ١٦ سم

وطول القطر الأكبر فيه = ٧ سم أوجد مساحة متوازى الأضلاع علمًا بأن أ ب $<$ ب حـ



الحــل

نصف محيط متوازى الأضلاع $= \frac{16}{2} = 8$ سم

فبفرض أن أ ب = س سم $\therefore$ أ ء = (٨ – س) سم

$\therefore$ فى Δ أ ب ء : $\because (\text{ب ء})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{أ ء})^2 - 2 \, (\text{أ ب}) \, (\text{أ ء})$ حتا ١٢٠°

$\therefore 49 = س^2 + (8 - س)^2 - 2 \, س \, (8 - س) \times (-\frac{1}{2})$

$\therefore 49 = س^2 + 64 - 16 \, س + س^2 + 8 \, س - س^2$

$\therefore س^2 - 8 \, س + 15 = 0$ $\therefore (س - 3)(س - 5) = 0$ $\therefore س = 3$ أ، $س = 5$

، $\because$ أ ب $<$ ب حـ $\therefore$ أ ب = ٣ سم ، أ ء = ٥ سم

$\therefore$ م (▱ أ ب حـ ء) = ٢ م (Δ أ ب ء) $= 2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times$ حا ١٢٠° $= \frac{15\sqrt{3}}{2}$ سم^2



📖 من أسئلة الكتاب المدرسى ● فهـم ○ تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى Δ س ص ع المقدار $\frac{س^2 + ص^2 - ع^2}{٢ س ص}$ = ...

(أ) جتا س (ب) جتا ص (جـ) جتا ع (د) جا ع

(٢) 📖 فى المثلث س ص ع يكون : ص^٢ + ع^٢ − س^٢ = ٢ ص ع × ....

(أ) جتا س (ب) جا ع (جـ) جتا ع (د) جا س

(٣) فى Δ ا ب حـ : جتا (ا + ب) = ...

(أ) جتا حـ (ب) − جتا حـ (جـ) جا حـ (د) − جا حـ

(٤) 📖 فى أى مثلث ا ب حـ يكون جتا ا = ...

(أ) − (جتا ب + جتا حـ) (ب) جتا ب − جتا حـ

(جـ) جتا (ب + حـ) (د) − جتا (ب + حـ)

(٥) 📖 إذا كانت : ∠ ا تكمل ∠ حـ فإن : جتا ا + جتا حـ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) $\frac{١}{٢}$

(٦) إذا كان : ا ب حـ ء شكل رباعى دائرى فإن : جتا ا + جتا حـ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) −١

(٧) فى المثلث س ص ع : ٢ س ص جتا (س + ص) = ...

(أ) س^٢ + ص^٢ − ع^٢ (ب) ص^٢ + ع^٢ − س^٢

(جـ) س^٢ − ع^٢ − ص^٢ (د) ع^٢ − س^٢ − ص^٢

(٨) 📖 فى Δ ا ب حـ يكون المقدار $\frac{ا^2 + ب^2 - حـ^2}{٢ ا ب}$ مساويًا الصفر إذا كان ....

(أ) ق (∠ ا) = ٦٠° (ب) ق (∠ ب) = ٩٠°

(جـ) ق (∠ حـ) = ١٢٠° (د) ق (∠ ا) + ق (∠ ب) = ٩٠°

(٩) المثلث ل م ن فيه : ل = ٥ سم ، م = ٧ سم ، ق (∠ ن) = ٦٠°

فإن : ن ≃ .... سم (لأقرب جزء من عشرة).

(أ) ٦,٢ (ب) ٥ (جـ) ٤,٣ (د) ٣,٥

(١٠) Δ س ص ع فيه : سَ = ٥ سم ، صَ = ٣ سم ، ق(∠ ع) = $\frac{٢}{٣}$ π فإن : عَ = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ٤

(١١) فى Δ أ ب حـ : إذا كان ق(∠ أ) + ق(∠ ب) = ١٢٠° ، أ = ٢ سم ، بَ = ٣ سم

فإن : حَ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\sqrt{٧}$ (د) $\sqrt{٥}$

(١٢) Δ أ ب حـ فيه : أ = ٩ سم ، بَ = ١٥ سم ، ق(∠ حـ) = ١٠٦°

فإن محيطه ≃ .... سم

(أ) ٤٤ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٤ (د) ٢٨

(١٣) أ ب حـ مثلث فيه : بَ = ٢ سم ، حَ = ٢,٥ سم ، جتا أ = $\frac{٢}{٥}$

فإن : Δ أ ب حـ يكون ....

(أ) قائم الزاوية. (ب) متساوى الساقين.

(جـ) متساوى الأضلاع. (د) مختلف الأضلاع.

(١٤) فى المثلث س ص ع إذا كان : سَ = صَ فإن : جتا س = ...

(أ) $\frac{٢\ صَ^٢}{عَ}$ (ب) $\frac{عَ}{٢\ صَ}$ (جـ) $\frac{عَ}{٤\ سَ}$ (د) $\frac{صَ}{٢\ سَ}$

(١٥) فى Δ أ ب حـ يكون جتا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{أَ^٢ + بَ^٢ - حَ^٢}{٢\ أَ بَ}$ (ب) $\frac{أَ^٢ + حَ^٢ - بَ^٢}{٢\ أَ بَ}$

(جـ) $\frac{بَ^٢ + حَ^٢ - أَ^٢}{٢\ بَ حَ}$ (د) $\frac{حَ^٢ - أَ^٢ - بَ^٢}{٢\ أَ بَ}$

(١٦) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم تساوى ....°

(أ) ١١٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

(١٧) أ ب حـ مثلث فيه : بَ = ٤ سم ، أَ + حَ = ١١ سم ، أَ - حَ = ١ سم فإن : ....

(أ) المثلث منفرج الزاوية. (ب) المثلث قائم الزاوية.

(جـ) ق(∠ ب) = ٢ ق(∠ أ) (د) ق(∠ أ) = ٢ ق(∠ ب)

(١٨) أ ب حـ مثلث فيه : أَ^٢ + بَ^٢ - حَ^٢ + $\sqrt{٣}$ أَ بَ = ٠ فإن : ق(∠ حـ) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

(١٩) فى Δ أ ب حـ ، إذا كان ق(∠ حـ) = ٦٠° ، أَ^٢ + بَ^٢ - حَ^٢ = ك أَ بَ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) -١

(٢٠) فى Δ ٢ ب حـ إذا كان : ٤ حا ٢ = ٣ حا ب = ٦ حا حـ فإن : ق (∠ حـ) ≃ .... (لأقرب درجة)

(أ) ٨٩° (ب) ٢٩° (جـ) ٥٧° (د) ٨٢°

(٢١) فى Δ ٢ ب حـ : $\frac{١}{٢}$ حا ٢ = $\frac{١}{٣}$ حا ب = $\frac{١}{٤}$ حا حـ فإن : حتا حـ = ...

(أ) $\frac{-٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢٢) إذا كان : ٢ ب حـ مثلث فيه : ٥ حا ٢ حا ب = ٦ حا ب حا حـ = ٩ حا حـ حا ٢

فإن : ق (∠ حـ) ≃ ....

(أ) ٢٨° (ب) ٣٢° (جـ) ٣٦° (د) ٤٢°

(٢٣) إذا كان : ٢ ب حـ مثلث فيه : ٦ ٢َ = ٤ بَ = ٣ حـَ فإن قياس أصغر زوايا المثلث ≃ ....

(أ) ٢٨ َ ٥٧° (ب) ١٢ َ ٤١° (جـ) ٥٧ َ ٢٨° (د) ٥٢ َ ٣٦°

(٢٤) ٢ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ ٢) = ٦٠° ، بَ : حـَ = ٥ : ٨ وكانت مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث تساوى ١٤٧ π سم^{٢} فإن : محيط Δ ٢ ب حـ = ... سم

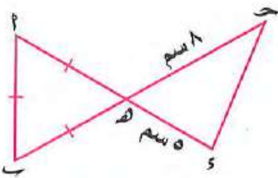
(أ) ٢١ (ب) ٣٤ (جـ) ٥٤ (د) ٦٠

(٢٥) ٢ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ٢ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١١ سم ، ب ء = ٩ سم

فإن : طول $\overline{٢ حـ}$ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٧

(٢٦) فى الشكل المقابل :

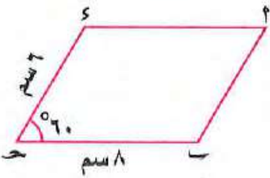


حـ ء = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٧

(جـ) ٨ (د) ٩

(٢٧) فى الشكل المقابل ٢ ب حـ ء متوازى أضلاع

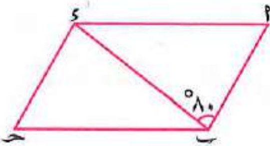


فإن ٢ حـ = ... سم

(أ) ٢ $\sqrt{١٣}$ (ب) ٢ $\sqrt{٣٧}$

(جـ) ٢ $\sqrt{١٧}$ (د) ١٤٨

(٢٨) فى الشكل المقابل :



٢ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ ٢ ب ء) = ٨٠°

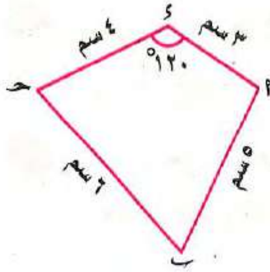
، ب ء = ٧ سم ، ٢ ب = ٥ سم

فإن محيط متوازى الأضلاع = ... لأقرب سم

(أ) ٢٥ (ب) ٢٦ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠



(٢٩) فى الشكل المقابل :

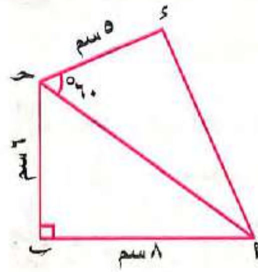


حتا ب = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$

(جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٣٠) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى فيه :

أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٩٠°

، ء حـ = ٥ سم ، ق (∠ أ حـ ء) = ٦٠°

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ ء حـ = ... سم^٢

(أ) ٩ π (ب) ١٦ π (جـ) ٢٥ π (د) ٤٩ π

ثانيًا / الأسئلة المقالية

١ س ص ع مثلث فيه : ق (∠ ع) = ٩٥° ، سَ = ١٣ سم ، صَ = ١٦ سم

أوجد : عَ «٢١,٥ سم»

---

٢ أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ٣ سم ، حَ = ٥ سم ، ق (∠ ب) = ٢١ ٣٦°

أوجد : بَ لأقرب سم «٣ سم»

---

٣ أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ٣ سم ، بَ = ٥ سم ، حَ = $\sqrt{١٩}$ سم أوجد :

(١) ق (∠ حـ) (٢) مساحة المثلث أ ب حـ «٦٠° ، $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٤}$ سم^٢»

---

٤ ضلعان من أضلاع مثلث طولاهما $(\sqrt{١٠} + ٢)$ سم ، $(\sqrt{١٠} - ٢)$ سم والزاوية المحصورة بينهما قياسها ٦٠° أوجد طول الضلع الثالث. «$\sqrt{٢٢}$ سم»

---

٥ أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ٤ سم ، بَ = ٦ سم ، ق (∠ حـ) = ٥٧°

أوجد محيط هذا المثلث لأقرب سم «١٥ سم»

---

٦ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب حـ الذى فيه : أَ = ٧,٦ سم ، بَ = ٥,٨ سم

، حَ = ٣,٤ سم «١٠٨ ٣٤° ، ٤٦ ٢٠° ، ٢٥ ٦°»

---

٧ أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ١٣ سم ، بَ = ١٤ سم ، حَ = ١٥ سم

أوجد : ق (∠ ب) ثم أوجد مساحة سطح المثلث أ ب حـ لأقرب سم^٢ «٥٩ ٢٩° ، ٨٤ سم^٢»

٨ أوجد قياس أصغر زاوية فى Δ ـس ص ع إذا كان : ـسَ = ١٨ سم ، صَ = ٢٧ سم
، عَ = ٢٤ سم ثم أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث ـس ص ع «٤٨َ ٤٠° ، ٥٩٦ سم^{2}»

٩ أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ٩ سم ، بَ = ١٥ سم ، حـَ = ٢١ سم ، أوجد قياس أكبر زاوية
فى هذا المثلث ، وأثبت أنها تحقق العلاقة جتا^{2} حـ − ٥ $\sqrt{3}$ جا حـ + ٨ = ٠ . «١٢٠°»

١٠ أ ب حـ مثلث محيطه ٥٢ سم ، أَ = ١٣ سم ، بَ = ١٧ سم أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث
ثم احسب مساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع. «٢٢َ ٩٣° ، ١١٠ سم^{2}»

١١ أوجد قياس أكبر زاوية فى Δ ـس ص ع الذى فيه : ـسَ = ٢٤,٥ سم ، صَ = ١٨ سم
، عَ = ١٠ سم ثم أوجد محيط الدائرة المارة برؤوسه $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ «١٩َ ١١٩° ، ٨٨ سم»

١٢ Δ ـس ص ع النسبة بين أطوال أضلاعه ـسَ : صَ : عَ = ٤ : ٥ : ٦ بين أن قياس أصغر زواياه
هو ٢٥َ ٤١° تقريبًا.

١٣ ـس ص ع مثلث فيه : جا ـس : جا ص : جا ع = ٧ : ٨ : ١٢
أوجد قياس أكبر زواياه. «٤َ ١٠٦°»

١٤ أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ٤ سم ، بَ = ٥ سم ، جتا حـ = $\frac{-1}{2}$
أوجد حـَ ثم أوجد مساحة Δ أ ب حـ «٧,٨ سم ، ٥ $\sqrt{3}$ سم^{2}»

١٥ أ ب حـ مثلث فيه : ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا حـ أوجد قياس أصغر زواياه. «٢٣َ ٢٦°»

١٦ أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{1}{3}$ جا أ = $\frac{1}{4}$ جا ب = $\frac{1}{5}$ جا حـ
أوجد : ق (∠ حـ) وإذا كان محيط المثلث = ٢٤ سم أوجد مساحته. «٩٠° ، ٢٤ سم^{2}»

١٧ أ ب حـ مثلث فيه : ب حـ = ٢٠ سم ، ق (∠ ب) = ٢٩° ، ق (∠ حـ) = ٧٣° ، ى منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$
، أوجد طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ى}}$ مقربًا لأقرب رقمين عشريين. «١٩,٥٥ سم ، ١١,٨٤ سم»

١٨ أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ٨ سم ، بَ = ٧ سم ، حـَ = ٩ سم ، فرضت نقطة ى على $\overline{\text{ب حـ}}$
بحيث ب ى = ٤ سم احسب طول $\overline{\text{أ ى}}$ ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ
«٧ سم ، ٤,٧ سم»

١٩ أ ب حـ ى متوازى أضلاع فيه : أ حـ = ١٦ سم ، ب ى = ٢٠ سم
، ق (∠ أ م ب) = ٥٠° حيث م ملتقى القطرين أوجد : أ ب ، أ ى لأقرب سم «٨ سم ، ١٦ سم»

٢٠ أ ب حـ ى متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٣ سم ، أ حـ = ٢٠ سم
أوجد طول $\overline{\text{ب ى}}$ «١٠ سم»

٢١ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أ ء} // \overline{ب حـ}$ ، أ ء = ٤٢ سم ، أ ب = ٣٠ سم
، ب حـ = ٤٨ سم ، ق (∠ أ) = ١٠٠° أوجد طول كل من : $\overline{ب ء}$ ، $\overline{حـ ء}$ «٥٥,٧ سم ، ٣٠ سم»

٢٢ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = أ ء = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ ء = ٨ سم
، أ حـ = ١١ سم أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.

٢٣ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ١٤ سم ، حـ ء = ١٠ سم
، أ حـ = ب ء = ١٦ سم أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.

٢٤ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٢٧ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، حـ ء = ٨ سم
، ء أ = ١٢ سم ، أ حـ = ١٨ سم أثبت أن : $\overrightarrow{أ حـ}$ ينصف ∠ ب أ ء

٢٥ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : ق (∠ ء أ ب) = ق (∠ ء ب حـ) = ٩٠° ، ب ء = ١٠ سم
، أ ء = ٨ سم ، ق (∠ ء حـ ب) = ٣٠° أوجد : أ حـ لأقرب سم «٢٢ سم»

٢٦ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ١٥ سم ، ب حـ = ٢٠ سم ، حـ ء = ١٦ سم
، أ حـ = ٢٥ سم ، ق (∠ أ حـ ء) = ٣٦ ٥٢ ٣٦° ، أوجد طول $\overline{أ ء}$ لأقرب سنتيمتر
، ثم أوجد مساحة سطح الشكل الرباعى أ ب حـ ء «١٦ سم ، ٢٧٠ سم^2»

٢٧ أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٣ ب ، ق (∠ حـ) = ٦٠° أوجد : ق (∠ ب) ، ق (∠ أ) «١٩ ٦° ، ٥٤ ١٠٠°»

٢٨ أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٥ سم ، ق (∠ ب) = ١٢٠° ، مساحته = $١٠\sqrt{٣}$ سم^2
أوجد كلاً من : حـ ، ب وكذلك ق (∠ أ) «٨ سم ، ١١,٣٦ سم ، ٢٥ ٢٢°»

٢٩ أ ب حـ مثلث فيه ع − أ = ٨ سم ، ع − ب = ٦ سم ، ع − حـ = ٤ سم
فأوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث ، حيث ٢ ع = أ + ب + حـ «٢٨ ٧٨°»

٣٠ فى المثلث أ ب حـ إذا كان ع − أ = ٢٦ سم ، ب = ٢٨ سم ، ع + أ = ٩٨ سم
حيث ٢ ع هو محيط المثلث ، فأوجد أطوال أضلاع المثلث ، ثم قياس أصغر زاوية فى هذا المثلث.
«٣٦ سم ، ٢٨ سم ، ٦٠ سم ، ٥١ ١٧°»

٣١ أ ب حـ مثلث مساحته ٦٤ سم^2 ، ق (∠ أ) = ٣٠° ، ب : حـ = ٣ : ٤
أوجد محيط Δ أ ب حـ «٤١,٨ سم»

٣٢ إذا كان حا أ : حا ب : حا حـ = ٣ : ٥ : ٧ أثبت أن : حتا أ : حتا ب : حتا حـ = ١٣ : ١١ : −٧

٣٣ أ ب حـ مثلث محيطه ٣٤ سم ، أ = ١٢ سم ، ب - حـ = ٦ سم

أوجد قياس أصغر زواياه ثم احسب مساحته. «١٩ ٤٦ ٣٤ ، ٤٧,٩ سم^{2}»

---

٣٤ في المثلث س ص ع إذا كان $ص^{2}$ = (ع - س)^{2} + ع س أثبت أن : ق (∠ ص) = ٦٠°

---

٣٥ **اكتشف الخطأ :** أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٥ سم ، ب = ١٠ سم ، حـ = ٧ سم

، ق (∠ أ) = ٢٧,٦٦° **أوجد :** ق (∠ ب)

حل زياد

∵ $\frac{ب}{جا ب} = \frac{أ}{جا أ}$

∴ $\frac{١٠}{جا ب} = \frac{٥}{جا ٢٧,٦٦°}$

∴ جا ب = $\frac{١٠ جا ٢٧,٦٦°}{٥}$ ≃ ٠,٩٢٨٤

∴ ق (∠ ب) ≃ ٦٨,١٩°

حل كريم

∵ جتا ب = $\frac{أ^{2} + حـ^{2} - ب^{2}}{٢ أ حـ}$

∴ جتا ب = $\frac{(٥)^{2} + (٧)^{2} - (١٠)^{2}}{٢ \times ٥ \times ٧}$

≃ -٠,٣٧١٤

∴ ق (∠ ب) ≃ ١١١,٨°

أي الحلين هو الصحيح ؟ ولماذا ؟

ثالثًا / مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ = ١٢ سم^{2} فإن : ($ب^{2}$ + $حـ^{2}$ - $أ^{2}$) ظا أ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

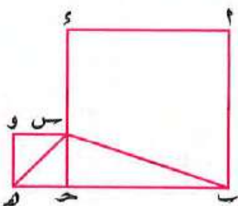
(٢) في Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ٦٠° فإن : $\left(١ + \frac{أ}{حـ} + \frac{ب}{حـ}\right)\left(١ + \frac{حـ}{ب} - \frac{أ}{ب}\right)$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣) في أي مثلث أ ب حـ إذا كان : $\frac{أ^{3} + ب^{3} + حـ^{3}}{أ + ب + حـ} = أ^{2}$ فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٥٠°

(٤) **في الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء ، س حـ هـ و مربعان

إذا كان : ب حـ = ٣ حـ هـ

فإن : جا (∠ ب س هـ) = ...

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (جـ) $\frac{-١}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$

الدرس

3

حل المثلث

حل المثلث يعنى إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه المجهولة إذا علم ثلاثة من هذه العناصر الستة (أحدها على الأقل طول ضلع). **وهناك أربع حالات لحل المثلث نعرض لها فيما يلى :**

الحالة الأولى : حل المثلث إذا علم فيه قياسا زاويتين وطول ضلع

فى Δ أ ب حـ إذا علم ق (∠ أ) ، ق (∠ ب) ، أ :

1. نستخدم العلاقة : ق (∠ حـ) = ١٨٠° − [ق (∠ أ) + ق (∠ ب)] لإيجاد : ق (∠ حـ)
2. نستخدم القانون : $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ لإيجاد : ب ، حـ

مثال (١)

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ أ) = $٥٢' \; ٣٨^\circ$ ، ق (∠ ب) = $٥١' \; ٩٦^\circ$ ، أ = ٢٢,٣ سم

الحل

ق (∠ حـ) = ١٨٠° − ($٥٢' \; ٣٨^\circ$ + $٥١' \; ٩٦^\circ$) = $١٧' \; ٤٤^\circ$

، ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$

∴ $\frac{٢٢,٣}{\text{جا } ٥٢' \; ٣٨^\circ} = \frac{\text{ب}}{\text{جا } ٥١' \; ٩٦^\circ} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا } ١٧' \; ٤٤^\circ}$

∴ ب = $\frac{٢٢,٣ \text{ جا } ٥١' \; ٩٦^\circ}{\text{جا } ٥٢' \; ٣٨^\circ} \approx$ ٣٥,٣ سم

، حـ = $\frac{٢٢,٣ \text{ جا } ١٧' \; ٤٤^\circ}{\text{جا } ٥٢' \; ٣٨^\circ} \approx$ ٢٤,٨ سم

الحالة الثانية: حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

في Δ أ ب حـ إذا علم أ ، ب ، ق (∠ حـ) :

1. نستخدم القانون : $حـ^2 = أ^2 + ب^2 - 2 أ ب$ جتا حـ لإيجاد : حـ
2. يفضل استخدام القانون : جتا أ $= \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ}$ لإيجاد : ق (∠ أ)

   وذلك لأن قانون جيب التمام يفرق بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة

   (أو يستخدم قانون الجيب لإيجاد قياس الزاوية المقابلة لأصغر الضلعين المعلومين)
3. نستخدم العلاقة : ق (∠ ب) = $180°$ − [ق (∠ أ) + ق (∠ حـ)] لإيجاد : ق (∠ ب)

مثال 2

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = 8 سم ، ب = 5 سم ، ق (∠ حـ) = $60° \ 2'$

الحل

∵ $حـ^2 = أ^2 + ب^2 - 2 أ ب$ جتا حـ $= 64 + 25 - 2 \times 8 \times 5$ جتا $60° \ 2' \approx 49.04$

∴ حـ ≈ 7 سم

∴ جتا أ $= \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ} = \frac{25 + 49 - 64}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7}$

∴ ق (∠ أ) ≈ $81° \ 47'$

∴ ق (∠ ب) = $180° - (60° \ 2' + 81° \ 47') = 38° \ 11'$

حل آخر :

بعد إيجاد حـ يمكن إيجاد ق (∠ ب) باستخدام قانون الجيب لأن ∠ ب تقابل أصغر الضلعين المعلومين بالمعطيات ، ثم نوجد ق (∠ أ)

∵ $\frac{حـ}{جا حـ} = \frac{ب}{جا ب}$

∴ $\frac{7}{جا 60° \ 2'} = \frac{5}{جا ب}$

∴ جا ب $= \frac{5 جا 60° \ 2'}{7} \approx 0.6188$

∴ ق (∠ ب) ≈ $38° \ 14'$ أ، $141° \ 46'$

، ∵ ب ليس طول أكبر أضلاع المثلث ∴ ∠ ب لا يمكن أن تكون منفرجة

∴ ق (∠ ب) = $38° \ 14'$

∴ ق (∠ أ) = $180° - (60° \ 2' + 38° \ 14') = 81° \ 44'$

لاحظ أن : الاختلافات البسيطة فى قياسات الزوايا بين الحلين يرجع إلى استخدام قيم تقريبية بحاسبة الجيب.

الحالة الثالثة | حل المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة

في Δ أ ب ح إذا علم أ ، ب ، ح :

1 نستخدم القانون : $جتا أ = \frac{ب^2 + ح^2 - أ^2}{2 ب ح}$ لإيجاد : ق(∠ أ)

2 نستخدم القانون : $جتا ب = \frac{ح^2 + أ^2 - ب^2}{2 ح أ}$ لإيجاد : ق(∠ ب)

3 نستخدم العلاقة : ق(∠ ح) = ١٨٠° − [ق(∠ أ) + ق(∠ ب)] لإيجاد : ق(∠ ح)

مثال ٣

حل المثلث أ ب ح الذي فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ح = ١١ سم

الحل

∵ $جتا أ = \frac{ب^2 + ح^2 - أ^2}{2 ب ح} = \frac{٤٩ + ١٢١ - ٢٥}{٢ \times ٧ \times ١١} = \frac{١٤٥}{١٥٤}$

∴ ق(∠ أ) ≈ ١٩ ٤١ ١٩°

، ∵ $جتا ب = \frac{ح^2 + أ^2 - ب^2}{2 ح أ} = \frac{١٢١ + ٢٥ - ٤٩}{٢ \times ١١ \times ٥} = \frac{٩٧}{١١٠}$

∴ ق(∠ ب) ≈ ٨ ٢٨°

∴ ق(∠ ح) = ١٨٠° − (٤١ ١٩° + ٨ ٢٨°) = ١١ ١٣٢°

! تذكر أن

مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث فمثلًا إذا كان : أ = ٢ سم ، ب = ٥ سم ، ح = ٨ سم فإن هذه الأطوال لا تصلح أن تكون أطوالًا لأضلاع مثلث.

مثال ٤

حل المثلث أ ب ح الذي فيه : ق(∠ أ) = ٤٠° ، ق(∠ ح) = ٣٥°

، طول نصف قطر الدائرة المارة برءوسه ٦ سم

الحل

ق(∠ ب) = ١٨٠° − (٤٠° + ٣٥°) = ١٠٥°

∴ $\frac{أ}{جا ٤٠°} = \frac{ب}{جا ١٠٥°} = \frac{ح}{جا ٣٥°} = ١٢$

∴ أ ≈ ٧,٧ سم ، ب ≈ ١١,٦ سم ، ح ≈ ٦,٩ سم

نشاط حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما [الحالة المبهمة]

مثال توضيحى

باستخدام الأدوات الهندسية ارسم Δ أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٧ سم ، ق (د أ) = ٣٠°

، ب حـ = ٤ سم ثم تحقق من إجابتك باستخدام قانون الجيب.

الحل

* نرسم قطعة مستقيمة $\overline{أب}$ طولها = ٧ سم

* نرسم د أ قياسها ٣٠° مع $\overline{أب}$ ولتكن ب أ ء

* نركز بسن الفرجار فى النقطة ب وبفتحة طولها ب حـ = ٤ سم

نرسم قوسًا يقطع المستقيم $\overleftrightarrow{أء}$ فى حـ

* نلاحظ أن النقطة حـ لها موضعان أى أننا يمكننا رسم مثلثين لهما نفس الشروط السابقة

هما أ ب $حـ_١$ ، أ ب $حـ_٢$ وبالقياس نجد أن :

ق (د حـ) ≈ ٦١° فى Δ أ ب $حـ_١$ أ، ق (د حـ) ≈ ١١٩° فى Δ أ ب $حـ_٢$

التحقق من الإجابة باستخدام قانون الجيب

$\because \frac{أ}{جا أ} = \frac{حـ}{جا حـ}$ $\therefore \frac{٤}{جا ٣٠°} = \frac{٧}{جا حـ}$

$\therefore$ جا حـ $= \frac{٧ \text{ جا } ٣٠°}{٤} = \frac{٧}{٨}$ (موجبة) $\therefore$ حـ تقع فى الربع الأول (حادة) أ، الثانى (منفرجة)

$\therefore$ ق (د حـ) ≈ ٦١° أ، ق (د حـ) ≈ ١١٩°

وعمومًا باستخدام الحل الهندسى يمكن التوصل إلى ما يلى :

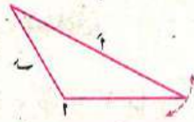
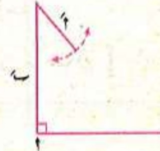
* فى Δ أ ب حـ إذا علم أ ، ب ، ق (د أ) نوجد ع = ب جا أ

ولإيجاد عدد الحلول الممكنة للمثلث نقارن بين قيم أ ، ب ، ع كما يلى :

أولًا : إذا كانت د أ حادة وكان :

١	٢	٣	٤
أ < ع فإنه لا يمكن رسم مثلث	أ = ع فإنه يمكن رسم مثلث وحيد قائم الزاوية	ع < أ < ب فإنه يمكن رسم مثلثين	أ ≥ ب فإنه يمكن رسم مثلث وحيد

ثانيًا : إذا كانت ∠ أ قائمة أو منفرجة وكان :

٢	١
 أَ > بَ فإنه يمكن رسم مثلث وحيد	 أَ ≤ بَ فإنه لا يمكن رسم مثلث

* يمكن حل المثلث فى هذه الحالة باستخدام قانون الجيب مباشرة دون تحديد عدد المثلثات الممكنة مع الأخذ فى الاعتبار ما يلى :

١ ∠ أ تقع فى الربع الأول (إذا كانت حادة)، تقع فى الربع الثانى (إذا كانت منفرجة).

٢ دالة الجيب مداها [-١ ، ١]

٣ إذا كان فى المثلث زاوية منفرجة فإن الزاويتين الأخريين لابد وأن تكونا حادتين.

مثال ٥

بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق ثم أوجد الحلول الممكنة :

١ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠ أ) = ١١٢° ، أَ = ٧ سم ، بَ = ٤ سم

٢ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠ أ) = ١١٢° ، أَ = ٤ سم ، بَ = ٧ سم

٣ ل م ن مثلث فيه : ق(∠ ل) = ٥٠° ، لَ = ٤ سم ، مَ = ٧ سم

٤ ء هـ و مثلث فيه : ق(∠ ء) = ٦٠° ، ءَ = ٧,٥ سم ، هـَ = ٥ √٣ سم

٥ ل م ن مثلث فيه : ق(∠ ل) = ٣٠° ، لَ = ٦ سم ، مَ = ٩ سم

الحل

١ ∵ ∠ أ منفرجة ، أَ > بَ

∴ يوجد للمثلث حل وحيد

، ∵ $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب}$

∴ $\frac{٧}{جا ١١٢°} = \frac{٤}{جا ب}$ ∴ جا ب = $\frac{٤ جا ١١٢°}{٧}$ ≈ ٠,٥٢٩٨

∴ ق(∠ ب) ≈ ٣٢° ومنها ق(∠ حـ) = ١٨٠° - (١١٢° + ٣٢°) = ٣٦°

، ∵ $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{حـَ}{جا حـ}$ ∴ $\frac{٧}{جا ١١٢°} = \frac{حـَ}{جا ٣٦°}$

∴ حـَ ≈ ٤,٤ سم

لاحظ أن

المثلث به زاوية واحدة على الأكثر منفرجة.

، ∵ ∠ أ منفرجة ∴ ∠ ب لابد وأن تكون حادة

∴ ب تقع فى الربع الأول فقط

لاحظ أن

∵ ٤ / جا ١١٢° = ٧ / جا ب ∴ جا ب = ٧ جا ١١٢° / ٤ ≈ ١,٦

وهذا مستحيل لأن جا ب ∌ [-١ ، ١]

٢ ∵ ∠أ منفرجة ، أ < ب

∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق.

٣ ∵ ∠ل حادة ، ع = ٧ جا ٥٠° ≈ ٥,٤ سم

، ∵ لَ < ع ∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق.

٤ ∵ ∠ى حادة ، ع = ٥ √٣ جا ٦٠° = ٧,٥ سم

، ∵ ى = ع ∴ يوجد للمثلث حل وحيد وهو مثلث قائم الزاوية.

∴ ق(∠و) = ١٨٠° − (٦٠° + ٩٠°) = **٣٠°**

، و = √((٥ √٣)² − (٧,٥)²) = **٥ √٣ / ٢ سم**

٥ ∵ ∠ل حادة ، ع = ٩ جا ٣٠° = ٤,٥ سم ، ∵ ٤,٥ < ٦ < ٩

أى أن ع < لَ < مَ ∴ يوجد للمثلث حلان

∵ لَ / جا ل = مَ / جا م ∴ ٦ / جا ٣٠° = ٩ / جا م ∴ جا م = ٣ / ٤

∴ م تقع فى الربع الأول أو الثانى

∴ ق(∠م) ≈ **٤٨° ٣٥َ ٢٥ً**

ومنها ق(∠ن) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٨° ٣٥َ ٢٥ً)

= **١٠١° ٢٤َ ٣٥ً**

، ∵ لَ / جا ل = نَ / جا ن

∴ ٦ / جا ٣٠° = نَ / جا ١٠١° ٢٤َ ٣٥ً

∴ نَ ≈ **١١,٧٦ سم**

أ،

ق(∠م) = ١٨٠° − ٤٨° ٣٥َ ٢٥ً = **١٣١° ٢٤َ ٣٥ً**

ومنها ق(∠ن)

= ١٨٠° − (٣٠° + ١٣١° ٢٤َ ٣٥ً) = **١٨° ٣٥َ ٢٥ً**

، ∵ ٦ / جا ٣٠° = نَ / جا ١٨° ٣٥َ ٢٥ً

∴ نَ ≈ **٣,٨٣ سم**

تمارين 17 على حل المثلث

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) يقصد بحل المثلث ....

(أ) إيجاد أطوال أضلاعه. (ب) إيجاد قياسات زواياه.

(جـ) إيجاد العلاقة بين أطوال أضلاعه وقياسات زواياه. (د) إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه.

(٢) محيط Δ أ ب جـ الذى فيه : ب = ١١ سم ، ق (∠ أ) = ٦٧°

، ق (∠ جـ) = ٤٦° ≃ .... (لأقرب سم)

(أ) ٢٢ (ب) ٣٨ (جـ) ٣١ (د) ٢٧

(٣) عند حل المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق (∠ جـ) = ٦٥°

فإن : جـ ≃ .... سم (لأقرب جزء من عشرة).

(أ) ٤٤,٤ (ب) ٣٢,١ (جـ) ٦,٧ (د) ٨,٢

(٤) عند حل Δ أ ب جـ الذى فيه : أ = ٢ سم ، ب = ٤ $\sqrt{٢}$ سم ، جـ = ٢ $\sqrt{٥}$ سم فإن :

أولًا : جتا أ = ...

(أ) $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{١٠}}$ (د) $\frac{\sqrt{١٠}}{٥}$

ثانيًا : ق (∠ جـ) = ...

(أ) ١٨ ٣٢° (ب) ٤٣ ٢٧° (جـ) ١٣٥° (د) ٤٥°

(٥) عدد حلول Δ أ ب جـ الذى فيه : ق (∠ جـ) = ١١٥° ، جـ = ١٢ سم ، أ = ٩ سم

هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(٦) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ الذى فيه : أ = ٨ سم ، ب = ١٠ سم ، ق (∠ أ) = ٤٢°

هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) عدد لا نهائى. (د) صفر

(٧) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ حيث : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ب = ٣ سم ، أ = ٥ سم

هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) عدد لا نهائى.

(٨) عدد حلول المثلث س ص ع الذى فيه : س = ٥ سم ، ص = ٦ سم ، ق (د س) = ٧٠°
يساوى ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٣

(٩) Δ س ص ع فيه : س = ٣٠ سم ، ص = ٢٠ سم ، ق (د س) = ١٠٠°
فإن هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.
(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أى مثلث.

(١٠) Δ أ ب جـ فيه : أ = ٢٠ سم ، ب = ٢٥ سم ، ق (د أ) = ٤٠° فإن هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.
(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أى مثلث.

(١١) Δ س ص ع فيه : ق (د س) = ١٠٠° ، س = ٣ سم ، ص = ٤ سم
هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.
(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أى مثلث.

ثانيًا الأسئلة المقالية

مسائل على الحالة الأولى لحل المثلث (طول ضلع وقياسا زاويتين)

١ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه : ب = ١١ سم ، ق (د أ) = ٦٧° ، ق (د جـ) = ٤٦°
«١١ سم ، ٨,٦ سم ، ٦٧°»

٢ حل المثلث أ ب جـ حيث أ = ٨ سم ، ق (د أ) = ٦٠° ، ق (د ب) = ٤٠°
«٥,٩٤ سم ، ٩,١ سم ، ٨٠°»

٣ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه : ق (د أ) = ٤٩° ١١َ ، ق (د ب) = ٦٧° ١٧َ
، جـ = ١١,٢٢ سم
«٩,٥ سم ، ١١,٦ سم ، ٦٣° ٣٢َ»

٤ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ ب = ٩ سم ، ق (د أ) = ٢ ق (د ب) = ٨٠°
ثم احسب مساحته لأقرب سم²
«١٠,٢ سم ، ٦,٧ سم ، ٦٠° ، المساحة ≈ ٣٠ سم²»

٥ حل المثلث س ص ع الذى فيه : س ص = ٤٠ سم ، ق (د س) = ٧٥° ١٢َ
، ق (د ص) = ٤٨° ٥َ ثم أوجد ارتفاع المثلث المرسوم من ع على س ص
«٤٦,٤ سم ، ٣٥,٨ سم ، ٥٦° ٣٣َ ، الارتفاع ≈ ٣٤,٦ سم»



مسائل على الحالة الثانية لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة)

٦ حل المثلث س ص ع الذى فيه : ق (∠ ع) = ٦٠° ، س ع = ١٦ سم
، ص ع = ١٣ سم

«١٤,٧ سم ، ٥١َ ٤٩° ، ٩َ ٧٠°»

---

٧ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق (∠ حـ) = ٦٥°

«٦,٧ سم ، ٥٠َ ٧١° ، ١٠َ ٤٣°»

---

٨ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ أ) = ١٢َ ١٥٣° ، ب = حـ = ٦ سم

«١١,٦٧ سم ، ٢٤َ ١٣° ، ٢٤َ ١٣°»

---

٩ حل المثلث ل م ن الذي فيه : لَ = ١٢,٥ سم ، نَ = ٧,٢٥ سم ، ق (∠ م) = ٢,١ ء

«١١,٩٦ سم ، ٥٣َ ٧٦° ، ٢٢َ ٣٤°»

---

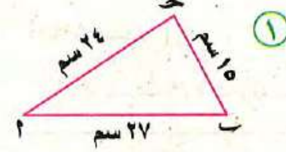
١٠ حل المثلث ل م ن الذى فيه : ل م = ٤٨,٥ سم ، م ن = ٤٦ سم ، جتا م = -٠,٦

«٨٤,٥٣ سم ، ٤٨َ ٢٥° ، ٥٢َ ١٢٦° ، ٢٠َ ٢٧°»

مسائل على الحالة الثالثة لحل المثلث (أطوال ثلاثة أضلاع)

١١ حل المثلث أ ب حـ فى كل من الشكلين الآتيين :

(١)



(٢)



---

١٢ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ١٣ سم ، ب = ١٤ سم ، حـ = ١٥ سم

«٨َ ٥٣° ، ٢٩َ ٥٩° ، ٢٣َ ٦٧°»

---

١٣ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٢ حـ = ٨ سم «٤٥َ ٣٠° ، ٦َ ١٢٥° ، ٩َ ٢٤°»

---

١٤ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٢ سم ، ب = ٤ $\sqrt{٢}$ سم ، حـ = ٢ $\sqrt{٥}$ سم

«٢٦َ ١٨° ، ٣٤َ ١١٦° ، ٤٥°»

---

١٥ حل المثلث س ص ع الذى فيه : س ص = ١٥ سم ، ص ع = ٢٥ سم ، س ع = ٣٠ سم

«١٥َ ٥٦° ، ٤٩َ ٩٣° ، ٥٦َ ٢٩°»

مسائل على النشاط

١٦ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه أ = ١٠ سم ، ب = ٩ سم ، ق(∠ب) = ٥٧°

١٧ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق(∠أ) = ٥٠° ، أ = ٤ سم ، ب = ٣ سم

١٨ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق(∠حـ) = ١١٦° ، حـ = ١٢ سم ، أ = ١٠ سم

١٩ **بيِّن ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق ثم أوجد الحلول الممكنة مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة :**

(١) أ = ١٥ سم ، ب = ١٠ سم ، ق(∠أ) = ١٢٠°

(٢) أ = ١٢ سم ، ب = ١٥ سم ، ق(∠أ) = ١٠٠°

(٣) أ = ٢٠ سم ، ب = ٢٨ سم ، ق(∠أ) = ٤٢°

(٤) أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق(∠أ) = ٦٠°

(٥) أ = ١٢ سم ، حـ = ٧ سم ، ق(∠أ) = ٢٧°

مسائل متنوعة

٢٠ حل المثلث أ ب حـ المتساوى الساقين الذى فيه : ق(∠أ) = ١١٠° ، أ = ٨ سم

«٤,٩ سم ، ٤,٩ سم ، ٣٥° ، ٣٥°»

٢١ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٢١ سم ، جتا ب = $\frac{٣}{٥}$ ، ظا حـ = $\frac{٥}{١٢}$

«١٧,٣ سم ، ٨,٣ سم ، ١٠٤° ١٥َ ، ٥٣° ٨َ ، ٢٢° ٣٧َ»

٢٢ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٥ سم ، ق(∠ب) = ١٢٠°

، ومساحته تساوى ١٠ $\sqrt{٣}$ سم²

«١١,٣٦ سم ، ٨ سم ، ٢٢° ٢٤َ ، ٣٧° ٣٦َ»

٢٣ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠حـ) = ٤ : ٥ : ٦

ومحيطه يساوى ٥٠ سم

«١٤,٥ سم ، ١٦,٩ سم ، ١٨,٦ سم ، ٤٨° ، ٦٠° ، ٧٢°»

٢٤ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه جا أ : جا ب : جا حـ = ٣ : ٤ : ٦ ومحيطه يساوى ٥٢ سم

«١٢ سم ، ١٦ سم ، ٢٤ سم ، ٢٦° ٣٣َ ، ٣٦° ٢٠َ ، ١١٧° ٦َ»

٢٥ حل المثلث أ ب حـ الحاد الزوايا الذى فيه : أ = ٢١ سم ، ب = ٢٥ سم

، وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى ٢٨ سم

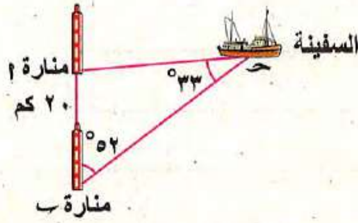
«٢٦ سم ، ٤٨° ٣٥َ ، ٦٣° ١٤َ ، ٦٨° ١١َ»

تطبيقات حياتية

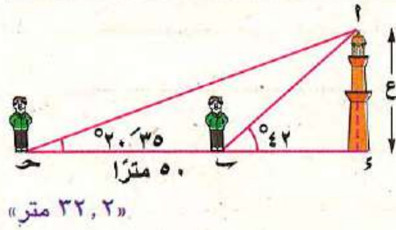


على الوحدة الرابعة

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى



١ 📖 **الربط بالجغرافيا :** منارتان ٢ ، ب المسافة بينهما ٢٠ كم على خط واحد من الشمال إلى الجنوب ، وكانت سفينة فى الموقع حـ ، بحيث ق (∠ ٢ حـ ب) = ٣٣° ، ق (∠ ٢ ب حـ) = ٥٢° ، فأوجد المسافة بين السفينة وكلٍّ من المنارتين. «٢٩ كم ، ٣٦,٦ كم»



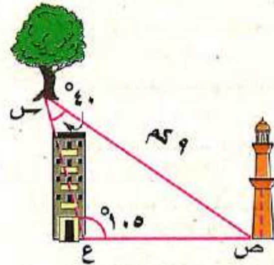
٢ 📖 يقف أحمد وصلاح أمام مئذنة وكانت المسافة بينهما ٥٠ مترًا ، كما هو مبين بالشكل المجاور.

ما ارتفاع المئذنة لأقرب جزء من عشرة من المتر ؟

«٣٢,٢ متر»

---

٣ 📖 **فى الشكل المقابل :**



ثلاثة مواقع جغرافية تشكل مثلثًا ، إذا كانت المسافة بين الموقع س والموقع ص تساوى ٩ كم ، وقياس الزاوية عند الموقع س يساوى ٤٠° ، وقياس الزاوية عند الموقع ع يساوى ١٠٥° ، **فأوجد :**

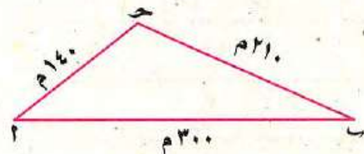
(١) المسافة بين الموقع س والموقع ع

(٢) مساحة سطح المثلث الذى رؤوسه المواقع الثلاثة س ، ص ، ع

«٥,٣ كم ، ١٥ كم²»

---

٤ **الربط بالرياضة :** جرى أحمد مسافة ٨ كم فى اتجاه معين ، ثم انعطف بزاوية قياسها ٨٠° ، وجرى مسافة ٩ كم ، ما مقدار الإزاحة بين النقطة التى بدأ منها أحمد الجرى والنقطة التى وصل إليها ؟ «١١ كم»



٥ 📖 **مساحات الأراضى :** قطعة أرض على شكل مثلث أطوال أضلاعه ٣٠٠ م ، ٢١٠ م ، ١٤٠ م

استخدم قانون جيب التمام لإيجاد مساحة قطعة الأرض مقربًا لأقرب متر مربع.

«١٣١٤٨ م²»

الجزء الخاص
بالامتحانات

الرياضيات
العامة

- اختبارات تراكمية
- اختبارات شهرية
- امتحانات نهائية

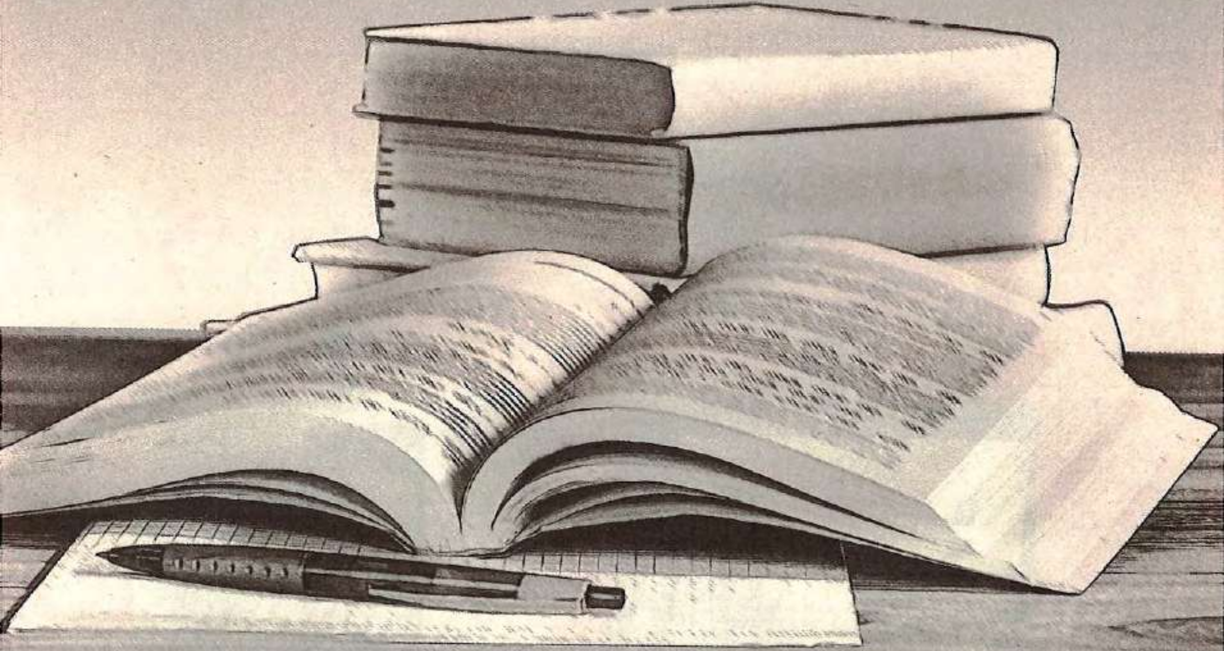


الصف الثانى الثانوى
القسم الأدبى
الفصل الدراسى الأول

2024
المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

محتويات الكتاب



- الاختبارات التراكمية القصيرة.
- الاختبارات الشهرية.
- امتحانات الكتاب المدرسى.
- الامتحانات النهائية.
- الإجابات.

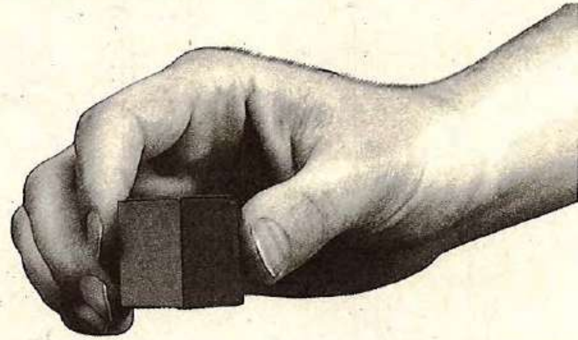
الاختبارات التراكمية القصيرة

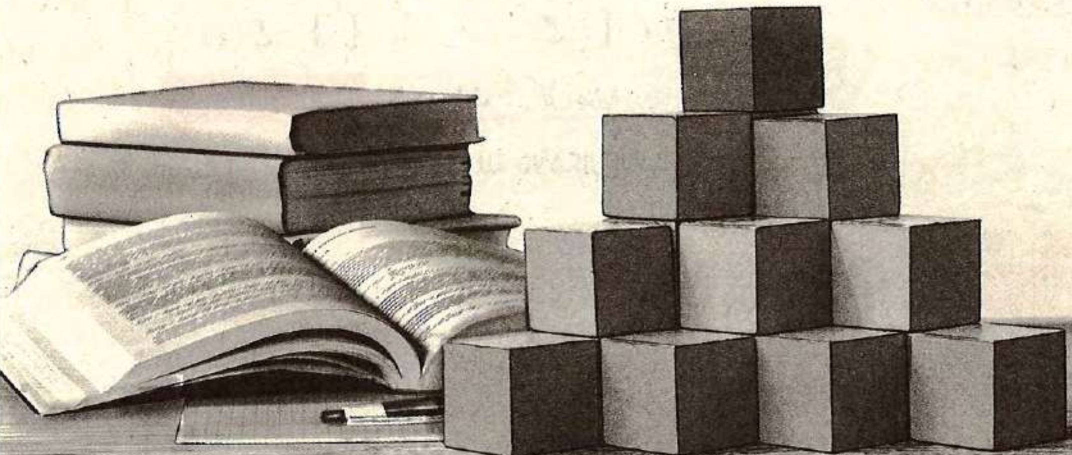


أولًا : اختبارات تراكمية قصيرة فى الجبر.

ثانيًا : اختبارات تراكمية قصيرة فى التفاضل.

ثالثًا : اختبارات تراكمية قصيرة فى حساب المثلثات.





الدرجة الكلية

١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

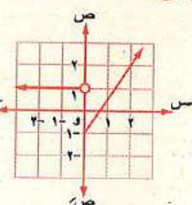
(١) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٢}$ هو ....

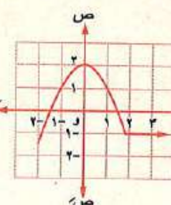
(أ) [٢ ، ∞[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ٢] (د)]-∞ ، ٢[

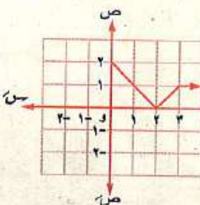
(٢) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt[3]{س - ٣}$ هو ....

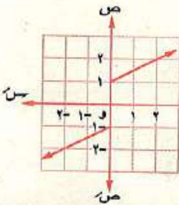
(أ) [٣ ، ∞[(ب)]٣ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ٣] (د) ح

(٣) أى من الأشكال البيانية الآتية لا يمثل دالة فى س ؟

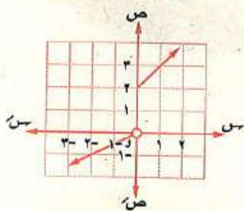

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

(٤) الشكل المقابل يمثل دالة مجالها = ...



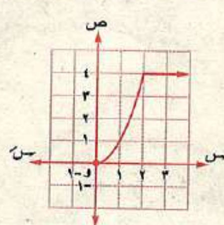
(أ) ح (ب) ح - [٠ ، ٢[

(جـ) ح - {٠} (د) ح -]٠ ، ٢]

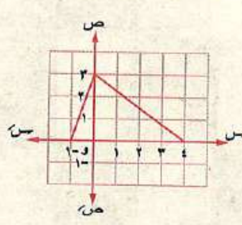
السؤال الثانى ٦ درجات — كل جزئية درجتان

ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :

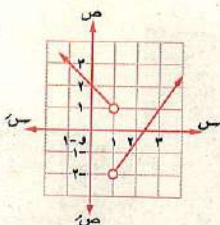
(١)



(٢)



(٣)



الدرجة الكلية

....

١٠

اختبـار 2 حتى درس 2 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول **٤ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجال الدالة د : د (س) = $\frac{1}{س}$ هو ....

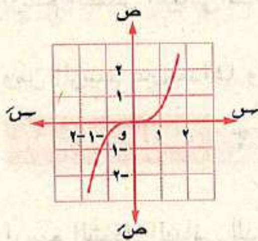
(أ) ح　(ب) ح - {٠}　(جـ) ح - {١}　(د) {٠}

② أى من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية زوجية ؟

(أ) د (س) = جا س　(ب) ر (س) = س جتا س

(جـ) ق (س) = س جا س　(د) هـ (س) = ظا س

③ الشكل المقابل يمثل دالة ....



(أ) زوجية.

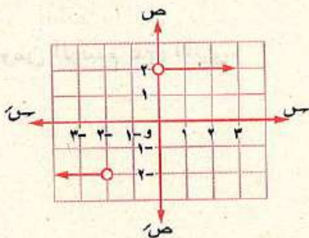
(ب) فردية.

(جـ) ليست زوجية وليست فردية.

(د) متماثلة حول محور الصادات.

④ الشكل المقابل يمثل دالة

مداها = ...



(أ) ح　(ب) ح - [-٢ ، ٠]

(جـ)]-٢ ، ٢[　(د) {-٢ ، ٢}

السـؤال الثانى **٦ درجات** كل جزئية درجتان

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① د (س) = $س^٤ + س^٢$　② د (س) = $س^٢$ جا س

③ د (س) = $\frac{س^٣ + ٢}{س - ٣}$

الدرجة الكلية



١٠

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٤ درجات**

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = $\begin{cases} |س| & \text{عندما } س \leq ٠ \\ س^{٢} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

ومن الرسم استنتج مدى الدالة وبيِّن نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك وادرس اطرادها.

السؤال الثانى **٣ درجات**

ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $\begin{cases} -س & ، -٢ \leq س < ٠ \\ س & ، ٠ \leq س < ٢ \end{cases}$

ومن الرسم عين مداها وابحث اطرادها.

السؤال الثالث **٣ درجات**

ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $\begin{cases} س - ١ & ، ٢ < س \leq ٤ \\ -١ & ، -٢ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

ومن الرسم عين المدى.



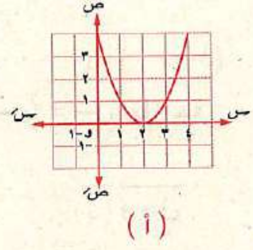
اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الأولى

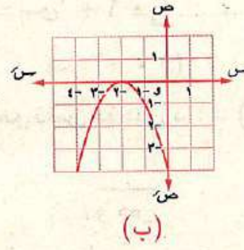
أجب عن الأسئلة الآتية :

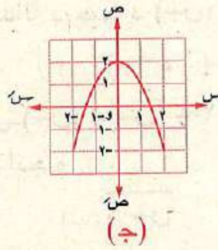
السؤال الأول ٤ درجات — كل جزئية درجة

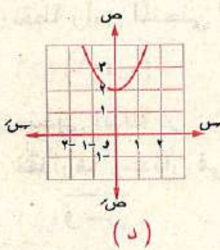
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د دالة حيث د (س) = $س^٢$ + ٢ فإن الشكل الذى يمثل د هو ....


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

② مدى الدالة د حيث د (س) = { ٠ عندما س ≥ ٠ ، −١ عندما س < ٠ } هو ....

(أ) {٠} (ب) {−١} (جـ) ح (د) {٠ ، −١}

③ نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^٣$ هى ....

(أ) (١ ، ١) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (١ ، ٠) (د) (٠ ، ١)

④ مدى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ − ١ هو ....

(أ) ح − {٢} (ب) ح − {١}

(جـ) ح − {−١} (د) ح

السؤال الثانى ٦ درجات

استخدم منحنى الدالة د : د (س) = $س^٣$ لتمثيل الدالة ر : ر (س) = $(س - ٣)^٣$ مبينًا مجال ر ومداها وادرس اطرادها وبين نوع الدالة ر من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = ٥ فإن : د (٧) = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٣٥

(٢) نقطة رأس المنحنى للدالة د حيث د (س) = $س^٢$ + ١ هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (-١ ، ٠) (جـ) (٠ ، ١) (د) (٠ ، -١)

(٣) منحنى الدالة ر : ر (س) = $س^٢$ + ٢ هو نفس منحنى د : د (س) = $س^٣$ بإزاحة مقدارها وحدتان فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{وس}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{وس}}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{وص}}$ (د) $\overrightarrow{\text{وص}}$

(٤) مجموعة الحل فى ح للمعادلة : |س| + ١ = ٠ هى ....

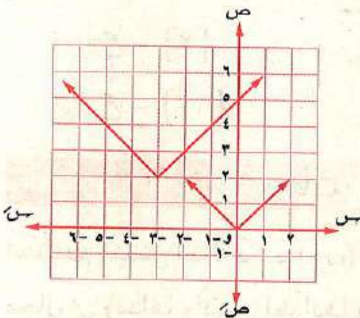
(أ) {١} (ب) {-١} (جـ) {١ ، -١} (د) $\varnothing$

السؤال الثانى ٢ درجة

أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{س^٢ - ٢س + ١} = ٨$

السؤال الثالث ٤ درجات كل جزئية درجة

فى الشكل المقابل :



رسم منحنى الدالة د : د (س) = |س|

ثم أُزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات

اكتب : (١) قاعدة الدالة الناتجة.

(٢) إحداثيى نقطة رأس منحناها.

(٣) مداها ثم استنتج اطرادها.

(٤) معادلة محور تماثلها.

الدرجة الكلية

١٠

اختبـار 6 حتى درس 6 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول ٢ درجة *كل جزئية نصف درجة*

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المتباينة : |س| - ١ > صفر فى ح هى ....

(أ) ح - [-١ ، ١] (ب)]-١ ، ١[(جـ) ح -]-١ ، ١[(د) [-١ ، ١]

(٢) إذا كانت : د (س) = ٢ فإن : د (٢ س) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) صفر (د) ١

(٣) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$

فإن نقطة التماثل للدالة ر : ر (س) = د (س + ١) هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (-١ ، ٠) (د) (-١ ، ١)

(٤) مدى الدالة د حيث د (س) = |س| هو ....

(أ) [٠ ، ∞[(ب)]٠ ، ∞[

(جـ)]-∞ ، ٠] (د)]-∞ ، ٠[

السـؤال الثانى ٤ درجات *كل جزئية درجتان*

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من :

(١) |٢ س - ٣| = |س + ١| (٢) |٣ س - ٢| ≤ ٥

السـؤال الثالث ٤ درجات

ارسم منحنى الدالة د حيث د (س) = |س - ٣| واستنتج من الرسم مدى الدالة واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 7 حتى درس 1 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عدد جذور المعادلة : $س^٧ = -١٢٨$ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٢ (د) -٢

(٢) مدى الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} ٠ & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -١ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$ هو ....

(أ) {٠} (ب) {-١} (جـ) ح (د) {٠ ، -١}

(٣) مجموعة حل المتباينة : |س| ≥ ١ فى ح هى ....

(أ)]-∞ ، ١] (ب)]-١ ، ١] (جـ) [-١ ، ١] (د)]-١ ، ١[

(٤) منحنى الدالة ر : ر (س) = $(س + ٤)^٢$ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = $س^٢$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overleftarrow{وص}$ (جـ) $\overleftarrow{وس}$ (د) $\overleftarrow{وص}$

(٥) مجموعة الحل للمعادلة : $س^{\frac{٢}{٣}} = ٢٥$ فى ح هى ....

(أ) {٥} (ب) {٥ ، -٥} (جـ) {١٢٥} (د) {١٢٥ ، -١٢٥}

(٦) إذا كان : $٧^{س + ١} = ٣^{٢س + ٢}$ فإن : س = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) صفر

السؤال الثانى **٤ درجات** كل جزئية درجتان

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل مما يأتى :

(١) $(س + ١)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$

(٢) $\sqrt{س^٢ - ٢س + ١} = ١$

الدرجة الكلية

١٠

اختبـار 8 حتى درس 2 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول ٤ درجات *كل جزئية درجة*

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$ فإن : د (−١) = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $-\frac{١}{٢}$

② معادلة محور تماثل الدالة د حيث د (س) = $(س - ٣)^٢ + ٢$ هى ....

(أ) س = ٢ (ب) س = ٣ (جـ) ص = ٢ (د) ص = ٣

③ الدالة د حيث د (س) = $أ^{س}$ تكون تناقصية على مجالها ح عندما ....

(أ) أ = ١ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = −١

④ $\frac{٢^{٢س} \times ٣^{٢س}}{٦^{٢س-١}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) ١ (جـ) ٦ (د) ٣٦

السـؤال الثانى ٣ درجات

ارسم منحنى كل من الدالتين د ، ر حيث د (س) = س + ١ ، ر (س) = ١ − س

ومن الرسم أوجد مساحة المثلث المحدد بالمستقيمين المتقاطعين ومحور السينات.

السـؤال الثالث ٣ درجات

يزداد سعر إحدى السلع المعمرة بنسبة ٣٪ سنويًا فإذا كان سعرها الأصلى ١٠٠٠ جنيه

كم يصبح سعرها بعد ثلاث سنوات ؟

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 9 حتى درس 3 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $لو_{٢}$ س = ٣ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) ٩

(٢) إذا كان : $٥^{س + ١} = ٧^{س + ١}$ فإن : $٣^{س + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣) نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٤ هى ....

(أ) (٤ ، ٣) (ب) (٣ ، -٤) (جـ) (-٣ ، -٤) (د) (٣ ، ٤)

(٤) مجموعة حل المعادلة : $لو_{٣}$ |س| = ١ فى ح هىَ ....

(أ) {٣} (ب) {-٣} (جـ) {٣ ، -٣} (د) {١ ، -١}

السؤال الثانى ٣ درجات

إذا كانت : د (س) = $س^{٢}$ |س| فعين نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك ، ثم أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : د (س) = ١

السؤال الثالث ٣ درجات

إذا كانت : د (س) = $٧^{س}$

فأوجد قيمة س إذا كانت : د (٢ س - ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{٥٠}{٤٩}$

الدرجة الكلية

١٠

اختبـار 10 حتى درس 4 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول **٢ درجة** *كل جزئية نصف درجة*

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قيمة س التي تحقق المعادلة : لو$_{٢}$ س = −٣ هي س = ...

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) ٨ (د) ٩

(٢) إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٧ = ص فإن : لو ٢١ = ...

(أ) س ص (ب) $\frac{س}{ص}$ (جـ) س + ص (د) س − ص

(٣) لو$_{أ ب جـ}$ أ + لو$_{أ ب جـ}$ ب + لو$_{أ ب جـ}$ جـ = ...

(أ) أ (ب) ب (جـ) جـ (د) ١

(٤) الدالة د : د (س) = $\frac{٢\,|س|}{س}$ تكافئ الدالة د : د (س) = ...

(أ) $\begin{cases} ٢ & \text{عندما } س > ٠ \\ -٢ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$ (ب) ٢

(جـ) −٢ (د) $\begin{cases} ٢ & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -٢ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

السـؤال الثاني **٦ درجات** *كل جزئية درجة ونصف*

أوجد في ح مجموعة الحل لكل مما يأتي :

(١) لو$_{س}$ (س + ٢) = ٢ (٢) $٢^{س+١} = ٥$

(٣) $٣^{س+٢} - ٣^{س+١} = ١٨$ (٤) $|٢س - ٣| \leq ٧$

السـؤال الثالث **٢ درجة**

استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^{٢}$ لتمثيل الدالة ر حيث

ر (س) = د (س) + ٢ ومن الرسم أوجد مدى ر وأثبت أنها زوجية.

ثانيًا اختبـارات تراكميــة قصيــرة فــى التفاضل

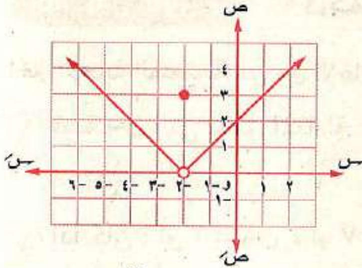
الدرجة الكلية



اختبـار 1 على درس 1 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول ٤ درجات *كل جزئية درجة*

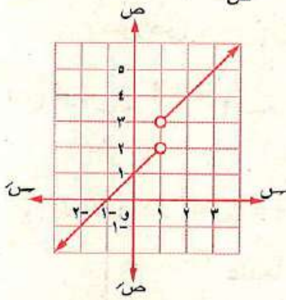


من الرسم البيانى المقابل الذى يمثل الدالة د أوجد :

(١) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) (٢) $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

(٣) د (−٢) (٤) د (٠)

السـؤال الثانى ٦ درجات *كل جزئية درجتان*



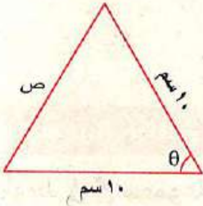
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الشكل المقابل هو التمثيل البيانى للدالة د فإن :

$\lim_{س \to ١}$ د (س) = ...

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ١ (د) غير موجودة.



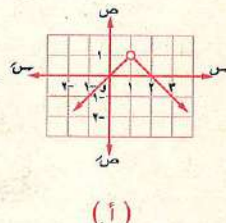
(٢) فى الشكل المقابل :

عندما $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{٢}$ فإن : ص ⟵ .... سم.

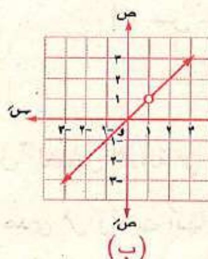
(أ) صفر (ب) ٥

(جـ) ١٠ (د) $١٠\sqrt{٢}$

(٣) أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ليس لها نهاية عند س = ١ ؟



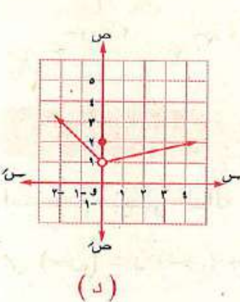
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 2 على درس 1 ، 2 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim_{س \to ١} \left(\frac{٣}{٤}\right) = \dots\dots\dots$

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

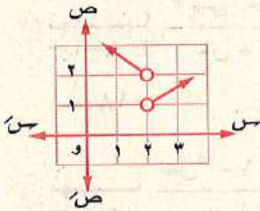
② $\lim_{س \to ٠} (٢ س^٢ + ٣) = \dots\dots\dots$

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٧

③ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} = \dots\dots\dots$

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −١ (د) ليس لها وجود.

④ فى الشكل المقابل :



$\lim_{س \to ٢} د(س) = \dots\dots\dots$

(أ) ١ (ب) صفر

(جـ) ٢ (د) ليس لها وجود.

السؤال الثانى ٤ درجات — كل جزئية درجتان

أوجد كلًا من :

① $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٥ س + ٦}{س^٢ - ٤}$

② $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣}$

السؤال الثالث ٢ درجة

إذا كانت : $\lim_{س \to ٢} \frac{أ}{س + ١} = ٤$ فأوجد : قيمة أ

الدرجة الكلية

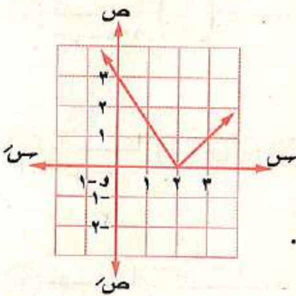
١٠

اختبـار 3 من درس 1 حتى درس 3 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول ٢ درجة *كل جزئية نصف درجة*

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



(١) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) صفر (د) ليس لها وجود.

(٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{ن} - ١^{ن}}{س^{م} - ١^{م}}$ = ...

(أ) $\frac{م}{ن}$ (ب) $\frac{م}{ن}$ (١)$^{م - ن}$ (جـ) $\frac{ن}{م}$ (١)$^{م - ن}$ (د) $\frac{ن}{م}$ (١)$^{ن - م}$

(٣) $\lim_{س \to -٢} \frac{٣ س^{٢} - ١٢}{س + ٢}$ = ...

(أ) ١٨ (ب) -٣ (جـ) ١٢ (د) -١٢

(٤) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٥} - ١}{س - ١}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ٢٠

السـؤال الثاني ٨ درجات *كل جزئية درجتان*

أوجد كلًا من :

(١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} - ٢ س + ١}{س^{٢} - ١}$ (٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٢} - ٤}$

(٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^{٥} - ١}{س}$ (٤) $\lim_{س \to ٦} \frac{س - ٦}{\sqrt{س - ٢} - ٢}$

الدرجة الكلية

١٠

اختبـار 4 من درس 1 حتى درس 4 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

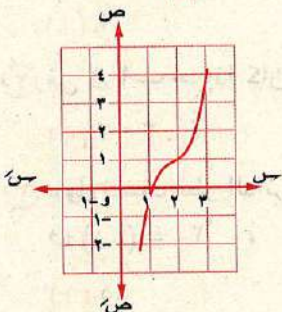
السـؤال الأول ٢ درجة *كل جزئية نصف درجة*

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س^{٢}}}{س} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) −١

② في الشكل المقابل :



$\lim\limits_{س \to ٢}$ د (س) = ...

(أ) ٢ (ب) ١

(جـ) صفر (د) ليس لها وجود.

③ إذا كانت : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{أ س + ٦}{س - ٥} = ٣$ فإن : أ = ... حيث أ ∈ ح

(أ) ١ (ب) ٦ (جـ) صفر (د) ٣

④ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س} =$ ....

(أ) صفر (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

السـؤال الثانى ٨ درجات *كل جزئية درجتان*

أوجد كلًا من :

① $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢ س^{٢} + ٥ س + ١}{٣ س^{٢} - ٧}$

② $\lim\limits_{س \to ١} \frac{(س + ١)^{٥} - ٣٢}{س - ١}$

③ $\lim\limits_{س \to \infty} (\sqrt{٤ س^{٢} + ٥ س} - ٢ س)$

④ $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{٣} + س^{٢} - ٢}{س - ١}$

الدرجة الكلية ...... / ١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ٣٠° ، أ = ٦ سم فإن : $\frac{ب}{جا ب}$ = ... سم.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) $\frac{1}{5}$ (د) ١٢

② فى Δ أ ب حـ إذا كان : ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا حـ فإن : أ : ب : حـ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٤ : ٣ : ٢ (جـ) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٦ : ٤ : ٣

③ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ الذى فيه :

ق (∠ أ) = ٣٠° ، أ = ١٠ سم هو .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠

④ فى Δ أ ب حـ يكون المقدار ٢ نق جا أ = ...

(أ) أ (ب) ب (جـ) حـ (د) م (Δ أ ب حـ)

السؤال الثانى ٣ درجات

أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٢٣° ، ق (∠ ب) = ٦٧° وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ١٠ سم ، أوجد كلًا من : أ ، ب لأقرب سنتيمتر.

السؤال الثالث ٣ درجات

فى الشكل المقابل :

دائرة مركزها م ، وطول نصف قطرها ٨ سم

، ق (∠ ب م حـ) = ٦٠° ، ق (∠ أ حـ ب) = ٤٥°

أوجد : طول كل من $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$



الدرجة الكلية



١٠

اختبار 2 على درس 1 ، 2 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ $\sqrt{3}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوي ....

(أ) ٥ سم (ب) ٢٠ سم (جـ) ١٥ سم (د) ١٠ سم

(٢) لأى مثلث أ ب حـ : $\frac{أ^2 + ب^2 - حـ^2}{2 أ ب}$ = ...

(أ) جا أ (ب) جتا أ (جـ) جتا حـ (د) جا حـ

(٣) مثلث أ ب حـ فيه أ : ب : حـ = ٣ : ٤ : ٥ فإن : ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(٤) فى Δ أ ب حـ إذا كان : ب = حـ فإن : جتا حـ = ...

(أ) $\frac{أ}{2ب}$ (ب) $\frac{ب}{2حـ}$ (جـ) $\frac{2ب}{حـ}$ (د) $\frac{2ب}{أ}$

السؤال الثانى ٣ درجات

أوجد قياس أكبر زاوية فى Δ أ ب حـ إذا كان :

أ = ٧ سم ، ب = ٥ سم ، حـ = ٣ سم

السؤال الثالث ٣ درجات

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ حـ = ١٠ سم ، ب ء = ٨ سم فإذا تقاطع $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب ء}$ فى م ، وكان ق (∠ أ م ب) = ٧٠° أوجد محيط متوازى الأضلاع لأقرب سم.

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 3 من درس 1 حتى درس 3 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٤ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ = بَ = ٨ سم ، محيط Δ أ ب حـ = ٢٦ سم

فإن : ق (∠ حـ) = ...

(أ) $35.3°$ (ب) $52.3°$ (جـ) $77.4°$ (د) $108°$

(٢) فى أى مثلث ل م ن يكون $\frac{لَ}{جا ل}$ مساويًا ....

(أ) $\frac{مَ}{جا ن}$ (ب) $\frac{نَ}{جا م}$ (جـ) $\frac{مَ + نَ}{جا ن + جا م}$ (د) ٢ نق

(٣) فى Δ أ ب حـ يكون المقدار $\frac{أَ^2 + بَ^2 - حَ^2}{2 أَ بَ}$ مساويًا الصفر إذا كان ....

(أ) ق (∠ أ) = $60°$ (ب) ق (∠ ب) = $90°$

(جـ) ق (∠ حـ) = $120°$ (د) ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = $90°$

(٤) فى أى مثلث أ ب حـ يكون جتا أ = ...

(أ) − (جتا ب + جتا حـ) (ب) جتا ب − جتا حـ

(جـ) جتا (ب + حـ) (د) − جتا (ب + حـ)

السؤال الثانى **٣ درجات**

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه :

أَ = ٢٠ سم ، ق (∠ ب) = $67° 37'$ ، ق (∠ حـ) = $42° 23'$

السؤال الثالث **٣ درجات**

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ ء = ٨ سم

، ء أ = ٩ سم ، أ حـ = ١١ سم. أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.

الاختبـارات الشهرية



أولًا : نماذج اختبارات شهر أكتوبر.

ثانيًا : نماذج اختبارات شهر نوفمبر.

محتوى امتحان شهر أكتوبـر

الجبــر

من : الوحدة الأولى – درس (١) : الدوال الحقيقية.

إلى : نهاية درس التمثيل البيانى للدوال والتحويلات الهندسية.

التفاضل

من : الوحدة الثالثة – درس (١) : مقدمة النهايات.

إلى : نظرية ٣ باستخدام التحليل والقسمة المطولة.

حساب المثلثات

إلى : الوحدة الرابعة – نهاية درس (١) : قاعدة الجيب.

محتوى امتحان شهر نوفمبر

الجبــر

من : حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

إلى : الدالة الأسية وتطبيقاتها وحل المعادلات الأسية.

التفاضل

من : إيجاد النهاية باستخدام المرافق.

إلى : نظرية ٤ «القانون».

حساب المثلثات

قانون جيب التمام «قاعدة جيب التمام»

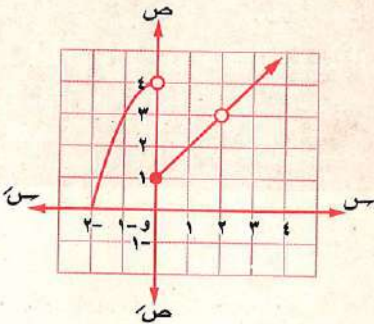


اختبـــار ١

الدرجة
٢٠

(١٢ درجة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



(١) من الشكل المقابل :

$\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا}$ د (س) = ...

(أ) ٢

(ب) ٤

(جـ) ١

(د) غير موجودة.

(٢) أ ب جـ مثلث فيه $\frac{جا أ}{٣} = \frac{٢ جا ب}{٥} = \frac{جا جـ}{٤}$ فإن أ : ب : جـ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٤

(٣) $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٤

(٤) الدالة د : د (س) = − $س^٢$ تناقصية عندما س ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^+$ (جـ) $ح^-$ (د) $ح^*$

(٥) فى △ أ ب جـ إذا كان ب = ٥ سم ، ق (∠ب) = ٣٠° فإن محيط الدائرة الخارجة للمثلث = ... سم.

(أ) ٥٠ $\sqrt{٣}$ π (ب) ٥ π (جـ) ١٠ $\sqrt{٣}$ π (د) ١٠ π

(٦) المنحنى د (س) = $س^٢$ − ٤ هو نفس المنحنى ر (س) = $س^٢$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overleftarrow{و س'}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص'}$ (د) $\overleftarrow{و ص}$

(٧) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س^٢ + ك س + ٩}$ هو ح − {٣}

فإن : ك = ...

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) ± ٦ (د) −٣٦

(٨) مدى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ + ٢ هو ....

(أ) ح − {−٣}　(ب) ح − {٢}　(جـ) ح − {٣}　(د) ح − {٢ ، ٣}

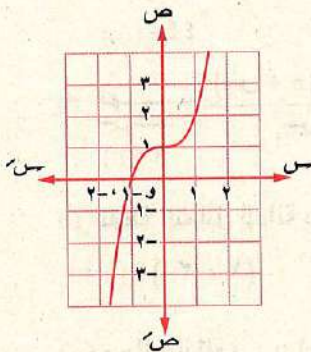
(٩) نوع الدالة د : د (س) = س جا س يكون ....

(أ) زوجية.　(ب) فردية.

(جـ) لا زوجية ولا فردية.　(د) ثابتة.

(١٠) قاعدة الدالة الممثلة فى

الشكل المقابل هى ....



(أ) ص = س^{٣} − ١

(ب) ص = (س + ١)^{٣}

(جـ) ص = (س − ١)^{٣}

(د) ص = س^{٣} + ١

(١١) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \left(\frac{٣}{٤}\right)$ = ...

(أ) ٣　(ب) ٤　(جـ) $\frac{٣}{٤}$　(د) ١

(١٢) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س}$ = ...

(أ) صفر　(ب) $\sqrt{٢}$

(جـ) $\frac{١}{٢}$　(د) ليس لها وجود.

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح حيث د (س) = |س| − ٤

مبينًا المدى والنوع والاطراد. (درجتان)

(٢) عين مجال الدالة الحقيقية د : د (س) = $\frac{١}{\sqrt{٣ - س}}$ (درجتان)

(٣) أوجد : $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{٤س - ٣} - ١}{س - ١}$ (درجتان)

(٤) أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠ب) = ٣٥° ، ق(∠حـ) = ٧٠° ، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ١٦ سم احسب مساحة ومحيط هذا المثلث لأقرب عدد صحيح. (درجتان)

اختبـــار ٢

الدرجة

٢٠

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

(١) الدالة د : د (س) = ١ − |س| متزايدة فى .... حيث د : ح ⟵ ح

(أ)]١ ، ∞[(ب)]٠ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ١[(د)]−∞ ، ٠[

(٢) إذا كانت : $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ + ٧س + أ}{س^٢ - ٦س + ٨} = \frac{١٥}{٢}$ فإن : أ = ...

(أ) −٤٤ (ب) ٧ (جـ) −٨ (د) ٨

(٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٥)^٢ - ٢٥}{س} = $ ....

(أ) ٢ (ب) ٢٥ (جـ) ٥ (د) ١٠

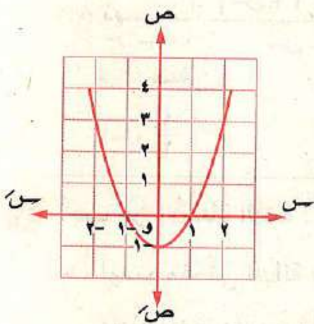
(٤) نقطة التماثل للدالة د : د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ١ هى ....

(أ) (−٢ ، ١) (ب) (−٢ ، −١) (جـ) (٢ ، ١) (د) (٢ ، −١)

(٥) مجال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٣ - س & ، -٢ \le س < ٢ \\ س & ، ٢ \le س \le ٥ \end{cases}$ هو ....

(أ) [١ ، ٥] (ب) [−٢ ، ٥] (جـ)]١ ، ٥] (د) [−٢ ، ٢]

(٦) منحنى الدالة المقابل يمثل أى من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ....



(أ) د (س) = $س^٣ - ١$

(ب) د (س) = $س^٢ - ١$

(جـ) د (س) = $س^٣ + ١$

(د) د (س) = $س^٢ + ١$

(٧) Δ أ ب حـ فيه : أ ب = ٤ سم ، جا حـ = $\frac{١}{٣}$ فإن : طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ١٢

(٨) أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ب) = ٥٢° ، ق (∠حـ) = ٤٨° ، محيط المثلث = ٣٠ سم فإن : أ ≃ .... لأقرب سم.

(أ) ١٥ (ب) ٢١ (جـ) ١٢ (د) ٢٠

(٩) إذا كانت : د دالة فردية مجالها ح ، أ ∈ ح فإن : $\frac{د(أ) + د(-أ)}{٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) د (أ) (جـ) د (− أ) (د) د (صفر)

(١٠) أى الدوال المعرفة بالقواعد التالية ليست دالة فردية ؟

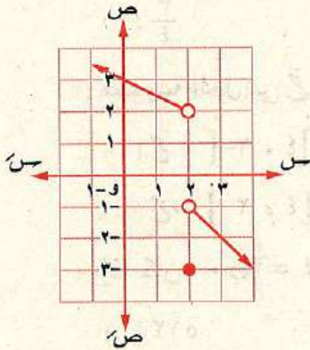
(أ) د (س) = جا س (ب) د (س) = ظا س

(جـ) د (س) = $س^٣$ (د) د (س) = $\frac{١}{س}$

(١١) $\lim_{س \to -٢} \frac{١}{|س|}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $-\frac{١}{٢}$

(١٢) فى الشكل المقابل :



$\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...

(أ) −٣

(ب) ٢

(جـ) −١

(د) غير موجودة.

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح حيث د (س) = $(س - ٢)^٣ - ١$ ومن الرسم أوجد المدى والاطراد وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك. (درجتان)

(٢) إذا كانت : $د_١$ ، $د_٢$ دالتين حقيقيتين ، $د_١$ (س) = $س^٥$ ، $د_٢$ (س) = جا س

فابحث نوع الدالة ($د_١$ + $د_٢$) من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك. (درجتان)

(٣) أوجد : $\lim_{س \to -١} \frac{س + ١}{\sqrt{س + ٥} - ٢}$ (درجتان)

(٤) أ ب حـ مثلث فيه : ب حـ = ١٠ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (∠ حـ) = ٨٠°

أوجد طول أكبر ضلع فى المثلث. (درجتان)

الدرجة
٢٠

اختبار ١

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

(١) فى Δ ٩ ب حـ يكون : $٩^٢ + ب^٢ - حـ^٢ = $ ....

(أ) حتا ٩ (ب) ٩ ب حتا حـ (جـ) حتا حـ (د) ٢ ٩ ب حتا حـ

(٢) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(٤ س + ١)^٩ - ١}{٣ س} = $ ....

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٣) مجموعة الحل فى ح للمتباينة : $|س - ١| \leq ٣$ تساوى ....

(أ) ح -]-٢ ، ٤[(ب) [-٢ ، ٤]

(جـ) ح - [-٢ ، ٤] (د)]-٢ ، ٤[

(٤) إذا كان : $س^{\frac{٢}{٣}} = ٦٤$ فإن : س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

(٥) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع الذى فيه :

$سَ = ٣$ سم ، $صَ = ٥$ سم ، $عَ = ٧$ سم يساوى تقريبًا .... سم.

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٢

(٦) مجموعة الحل فى ح للمعادلة : $|٢ س - ٤| = |س + ١|$ تساوى ....

(أ) {١} (ب) {٥} (جـ) {١ ، ٥} (د) $\varnothing$

(٧) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س^٧ - ١}{س + ١} = $ ....

(أ) -٢ (ب) ٥ (جـ) ١ (د) -١

(٨) إذا كانت : $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س)^ن - (٢)^ن}{س - ٢} = ٣٢$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٩) أودع رجل مبلغًا من المال قدره ١٢٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ١٣ ٪ فإن جملة المبلغ بعد ١٠ سنوات يساوى تقريبًا .... جنيه.

(أ) ٤٠٧٣٥ (ب) ٣٨٧٣٥ (جـ) ٣٦٠٤٩ (د) ٤٦٠٣٠

(١٠) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س| - ٣}$ هو ....

(أ) {٣ ، -٣} (ب) [-٣ ، ٣]

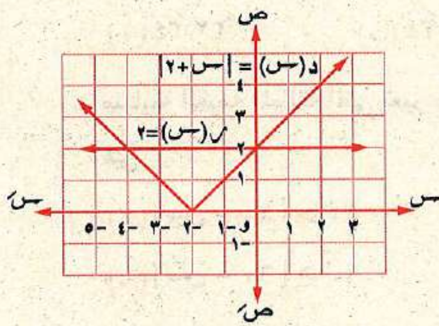
(جـ) ح - [-٣ ، ٣] (د) ح - {-٣ ، ٣}

(١١) نهـا (س ← ٥) $\frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٤}$

(١٢) فى الشكل المقابل : مجموعة حل المتباينة

د (س) < ر (س) فى ح هى ....



(أ) {-٤ ، ٠}

(ب) [-٤ ، ٠]

(جـ) ح - [-٤ ، ٠]

(د)]-٤ ، ٠[

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) أوجد مجموعة الحل فى ح للمتباينة : $\sqrt{٤ س^٢ - ١٢ س + ٩} \geq ٩$ (درجتان)

(٢) أثبت أن : $\frac{٢^س \times ٩^{س+١}}{٣ \times ١٨^س} = ٣$ (درجتان)

(٣) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ١٥ سم ، ب جـ = ٢٠ سم ، جـ ء = ١٦ سم ، أ جـ = ٢٥ سم ، ق (∠ أ جـ ء) = ٣٦° ٥٢َ ، أوجد طول $\overline{أء}$ لأقرب سنتيمتر ، ثم أوجد مساحة سطح الشكل الرباعى أ ب جـ ء (درجتان)

(٤) أوجد : نهـا (س ← ٥) $\frac{س^٢ - ٥ س}{\sqrt{س + ٤} - ٣}$ (درجتان)

الدرجة ٢٠

اختبار ٢

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

(١) إذا كانت : د (س) = ٥^س فإن : د (−٢) = ...

(أ) −٢ (ب) ٥ (جـ) $\frac{١}{٢٥}$ (د) $\frac{١}{٥}$

(٢) نهـا (س ← ١) $\frac{س^٥ - ١}{س - ١}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ٢٠

(٣) قياس أصغر زاوية فى Δ أ ب حـ الذى فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٧ سم ، ومحيطه ٢١ سم يساوى تقريبًا ....

(أ) ٣٢ ٣٤° (ب) ٤٢ ٣٤° (جـ) ٣٦ ٣٤° (د) ٤٦ ٣٤°

(٤) متباينة القيمة المطلقة التى تعبر عن درجة طالب تتراوح من ٥٠ إلى ٧٠ درجة هى ....

(أ) |س − ٢٠| < ١٠ (ب) |س − ٦٠| < ١٠

(جـ) |س − ٦٠| ≤ ١٠ (د) |س − ٢٠| ≤ ١٠

(٥) مجموعة الحل فى ح للمعادلة : |س − ٧| = ٢ هى ....

(أ) {٩ ، ٥} (ب) {٧ ، ٣} (جـ) Ø (د) {٣ ، −٣}

(٦) نهـا (س ← ٠) $\frac{\sqrt[٣]{س + ١} - ١}{س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) صفر (د) $\frac{-٢}{٣}$

(٧) مجموعة حل المتباينة : |٣ − ٢ س| ≤ ١ فى ح هى ....

(أ) [١ ، ٢] (ب)]١ ، ٢[(جـ) ح −]١ ، ٢[(د) ح − [١ ، ٢]

(٨) أى الدوال الآتية تمثل دالة أسية تزايدية على مجالها ح ؟

(أ) ص = ٣ (١,٠٥)^س (ب) ص = ٣ $\left(\frac{١}{١,٠٥}\right)^{س}$

(جـ) ص = ٣ + (٠,٥)^س (د) ص = (٠,٠٥)^س

(٩) مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$ فى ح هى ....

(أ) {٢٧ ، −٢٧}　(ب) {٩ ، −٩}　(جـ) {٩}　(د) {٢٧}

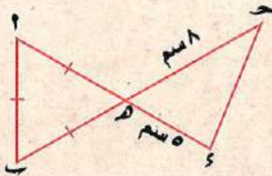
(١٠) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^٥ - ٣٢}{س} = $ ....

(أ) ٢٥　(ب) ٦٤　(جـ) ٨٠　(د) ١٠٠

(١١) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{٤ - \sqrt{س + ١٥}}{١ - س^٢} = $ ....

(أ) ١٦　(ب) −١٦　(جـ) $\frac{١}{١٦}$　(د) $\frac{-١}{١٦}$

(١٢) فى الشكل المقابل :



حـ ء = ... سم.

(أ) ٦　(ب) ٧

(جـ) ٨　(د) ٩

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^٢ - ٢س + ١} \leq ٤$　(درجتان)

(٢) أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $(س - ٥)^{\frac{٥}{٢}} = ٣٢$　(درجتان)

(٣) أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = أ ء = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ ء = ٨ سم ، أ حـ = ١١ سم أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.　(درجتان)

(٤) أوجد : $\lim\limits_{س \to ١} \frac{(س + ٢)^٤ - ٨١}{س - ١}$　(درجتان)

امتحانات الكتاب المدرسى



أولًا : نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الجبر.

ثانيًا : نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى التفاضل وحساب المثلثات.

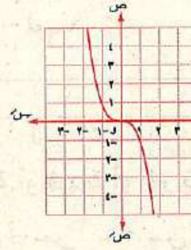
النموذج الأول

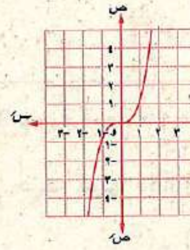
أجب عن الأسئلة الآتية :

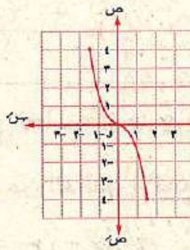
١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

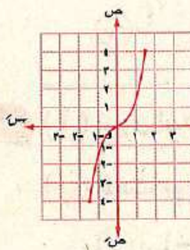
① إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث : د (س) = $س^{٣}$

فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

② إذا كان : $٥^{س - ٣} = ٤^{٣ - س}$ فإن : س = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) صفر

③ مدى الدالة د حيث د (س) = |س| هو ....

(أ) $[0 , \infty[$ (ب) $]0 , \infty[$ (جـ) $]-\infty , 0]$ (د) $]-\infty , 0[$

④ إذا كانت : د (س) = $٥^{س}$ فإن : د (−٢) = ...

(أ) −٢ (ب) ٥ (جـ) $\frac{١}{٢٥}$ (د) $\frac{١}{٥}$

---

٢ (أ) إذا كانت الدالة د حيث : د (س) = $\frac{١}{س}$ فأوجد مجال الدالة د وإحداثيى نقطة التماثل لمنحنى هذه الدالة ، **ثم أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة :** د $\left(\frac{١}{س}\right)$ = ٤

(ب) ارسم منحنى الدالة د حيث : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} & \text{لكل } -٥ \le س < ٢ \\ ٦ - س & \text{لكل } ٢ \le س \le ٨ \end{cases}$

ومن الرسم عين مدى الدالة وابحث اطرادها.

٣ **(أ)** ارسم منحنى الدالة د حيث : د (س) = | س − ٣ | واستنتج من الرسم مدى الدالة واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

(ب) أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من :

① | س − ٣ | ≤ ٥ ② | س − ٣ | = صفر

٤ **(أ)** أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة :

① لو س = لو ٣ + لو ١٠ ② $٩^{س} - ٣ \times ٣^{س}$ = صفر

(ب) اختصر :

① $\frac{٤^{٢ن + ١} \times ٢^{١ - ن}}{٨^{ن + ٢}}$ ② $لو_{٣}$ ٥٤ − $لو_{٣}$ ٩

٥ **(أ)** بدون استخدام الحاسبة أوجد فى أبسط صورة قيمة : $\frac{١}{لو_{٢} ٣٠} + \frac{١}{لو_{٣} ٣٠} + \frac{١}{لو_{٥} ٣٠}$

(ب) ابحث نوع كل من الدالتين الآتيتين من حيث كونها دالة زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① د (س) = س + جا س ② د (س) = $س^{٣} - ٢ س^{٢}$

النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجموعة حل المتباينة : | س | − ١ > صفر فى ح هى ....

(أ) ح − [−١ ، ١] (ب)]−١ ، ١[(جـ) ح −]−١ ، ١[(د) [−١ ، ١]

② إذا كان : ٤ = $لو_{٢}$ س فإن الصورة الأسية المكافئة هى ....

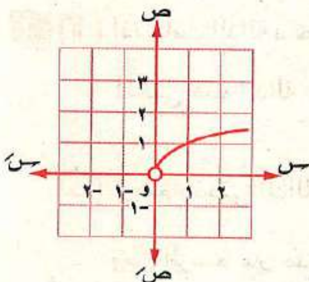
(أ) $س^{٢}$ = ٤ (ب) $س^{٤}$ = ٢ (جـ) س = $٢^{٤}$ (د) س = ٨

③ مجال الدالة فى الشكل المقابل

هو ....

(أ) [٠ ، ∞[(ب)]٠ ، ∞[

(جـ) [٠ ، ١] (د)]٠ ، ٢[



④ أى الدوال الآتية تمثل دالة أسية تزايدية على مجالها ح ؟

(أ) ص = ٣ $(١,٠٥)^{س}$ (ب) ص = ٣ $\left(\frac{١}{١,٠٥}\right)^{س}$

(جـ) ص = ٣ + $(٠,٥)^{س}$ (د) ص = $(٠,٠٥)^{س}$

---

٢ (أ) إذا كانت : د (س) = |س - ٣| + |س + ٢| فأثبت أن : د (٢) = د (-١)

(ب) استخدم منحنى الدالة د حيث : د (س) = $س^{٢}$ فى رسم كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

① $د_{١}$ (س) = $س^{٢}$ - ٣ ② $د_{٢}$ (س) = $(س + ١)^{٢}$

---

٣ (أ) **أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين فى ح :**

① $لو_{٢}$ س + $لو_{٢}$ (س + ١) = ١ ② $٣^{س}$ + $٣^{١ + س}$ = ٣٦

(ب) ① **أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة الآتية :** $٤^{س}$ + $٢^{س + ١}$ = ٨

② **بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :** $لو_{٢}$ ٨ + $لو_{٣}$ ٢٧ = $لو_{٣}$ ٢٧

---

٤ (أ) **أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة :** |س| + ١ < ٢

(ب) ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث : د (س) = $\frac{١}{س}$ - ١ ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

---

٥ (أ) ارسم منحنى الدالة د حيث : د (س) = $\begin{cases} س + ١ & ، \quad -١ \leq س < ٢ \\ ٥ - س & ، \quad ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

ومن الرسم استنتج المدى وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

(ب) إذا كانت : د (س) = $٢^{س + ١}$ ، **أوجد مجموعة حل كل من :**

① د (س) = ٣٢ ② د (س - ٢) = $\frac{١}{٨}$

ثانيًا نماذج امتحانات الكتاب المدرسى في التفاضل وحساب المثلثات

النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ = ب = ٨ سم ، محيط Δ أ ب حـ = ٢٦ سم

فإن : ق (∠ حـ) ≃ ....

(أ) ٣٥,٣° (ب) ٥٢,٣° (جـ) ٧٧,٤° (د) ١٠٨°

(٢) نهــــا (س ← ١) $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣) فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ٣٠° ، أ = ٦ سم فإن : $\frac{ب}{جا ب}$ = ...

(أ) ٣ سم (ب) ٦ سم (جـ) $\frac{١}{٥}$ سم (د) ١٢ سم

(٤) نهــــا (س ← ١) $\frac{س^٥ - ١}{س - ١}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ٢٠

---

2 (أ) أوجد كلًا من :

(١) نهــــا (س ← ∞) $\frac{٥ س^٤ + ٣ س^٢ - ٦}{٣ س + س^٤}$ (٢) نهــــا (س ← -٢) $\frac{س + ٢}{س - ٣}$

(ب) Δ أ ب حـ فيه : $\frac{١}{٢}$ جا أ = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٤}$ جا حـ أوجد قياس أكبر زواياه.

---

3 (أ) أوجد قيمة كل من :

(١) نهــــا (س ← ∞) $\frac{٤ - ٣ س^٢}{\sqrt{س^٤ + ٥}}$ (٢) نهــــا (س ← ٣) $\frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣}$

(ب) أوجد محيط Δ أ ب حـ الذى فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٦ سم ، ق (∠ حـ) = ٤٨°

٤ **(أ) أوجد كلًا من :** ① $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا} \frac{س^٢ - ٦ س + ٩}{س - ٣}$ ② $\underset{س \leftarrow ٢}{نهــا} \frac{٢ س^٢ - ٨}{س - ٢}$

(ب) أوجد طول قطر الدائرة المارة برؤوس △ أ ب حـ فى كل من الحالتين الآتيتين :

① ق (∠ أ) = ٧٥° ، أ = ٢١ سم

② ق (∠ ب) = ٥٠° ، ق (∠ حـ) = ٦٥° ، حـَ - بَ = ٦ سم

---

٥ **(أ) أوجد قيمة كل من :**

① $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا} \frac{(س - ٦)^٢ - ٩}{س^٢ - ٩}$

② $\underset{س \leftarrow -١}{نهــا} \frac{٢ س^٣ - س^٢ - ٢ س + ١}{س^٣ + ١}$

(ب) △ أ ب حـ فيه : ق (∠ أ) = ٣٦° ، ق (∠ حـ) = ٤٥° ، بَ = ٩ سم

أوجد : حـَ ثم أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوسه.

النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

① فى أى مثلث ل م ن يكون $\frac{لَ}{حا ل}$ مساويًا ....

(أ) $\frac{مَ}{حا ن}$ (ب) $\frac{نَ}{حا م}$ (جـ) $\frac{مَ + نَ}{حا ن + حا م}$ (د) ٣ نق

② $\underset{س \leftarrow \infty}{نهــا} \frac{\sqrt{٤ س^٢ + ١}}{س - ٢} =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) $\frac{٥}{-٢}$ (د) ٢

③ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} (٢ س^٢ + ٣) =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٧

④ فى $\triangle$ أ ب حـ إذا كان : ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا حـ

فإن : أَ : بَ : حَ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٤ : ٣ : ٢ (جـ) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٦ : ٤ : ٣

---

٢ **(أ) أوجد قيمة كل من :**

① $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س - ٢}$ ② $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{(س - ٢)^{٤} - ١}{س - ١}$

(ب) أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٧ سم ، القطران $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بء}$ يصنعان مع $\overline{أب}$ زاويتين قياساهما ٦٥° ، ٢٨° على الترتيب أوجد : طول كل من $\overline{بء}$ ، $\overline{أحـ}$

---

٣ **(أ) أوجد كلًا من :**

① $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩}$ ② $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} \frac{٤ س^{٢} + ١}{س^{٢} - ٢}$

(ب) أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ ء = ٨ سم ، ء أ = ٩ سم ، أ حـ = ١١ سم أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.

---

٤ **(أ) أوجد قيمة كل من :**

① $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٢} + ٥ س - ٦}{س^{٢} - ١}$ ② $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{(س + ١)^{٥} - ٣٢}{س - ١}$

(ب) أ ب حـ مثلث فيه : جا أ = $\frac{٢}{٥}$ ، بَ = $٢\frac{١}{٢}$ سم ، حَ = ٢ سم

أثبت أن المثلث متساوى الساقين.

---

٥ **(أ) أوجد قيمة :**

① $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٢} - ٢ س + ١}{س^{٢} - ١}$ ② $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \left(\frac{١}{س} + ٣\right)$

(ب) أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠ب) = ٣٥° ، ق(∠حـ) = ٧٠° وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ١٦ سم ، احسب مساحة ومحيط المثلث أ ب حـ لأقرب عدد صحيح.

الامتحانات النهائية

امتحانات بعض مدارس المحافظات





يمكنك حل الامتحانات التفاعلية من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان



١ محافظة القاهرة

إدارة الزاوية الحمراء
توجيه الرياضيات



اختبار تفاعلى ①

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① جميع العلاقات الاتية دوال ماعدا ....

(أ) ص = جا س (ب) ص = ٢ (جـ) ص = $س^٢$ − ١ (د) $ص^٢$ = $س^٢$ + ١

② منحنى الدالة د : د (س) = $(س - ٣)^٢$ هو نفس منحنى الدالة د (س) = $س^٢$ بازاحة مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overleftarrow{وس}$ (جـ) $\overleftarrow{وص}$ (د) $\overleftarrow{وص}$

③ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٣}{س^٢ - ١}$ هى ....

(أ) ح − {٣} (ب) ح − {١ ، −١} (جـ) {١ ، −١} (د) ح

④ مجموعة حل المتباينة : | ٢ س − ٣ | ≥ ٥ فى ح هى ....

(أ) [−١ ، ٤] (ب) ح −]−١ ، ٤[(جـ)]−١ ، ٤[(د) ح − [−١ ، ٤]

⑤ مجموعة حل المعادلة : | س − ٢ | = ٣ هى ....

(أ) {٢ ، ٣} (ب) {−١ ، ٥} (جـ) [−١ ، ٥] (د) {−٥ ، ٥}

⑥ إذا كان : $س^{\frac{٢}{٥}}$ = ٤ فإن : س = ...

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ± ٣٢ (د) ± ١٦

⑦ إذا كان : $٢^{س - ١}$ = ٤٤ فإن : $٢^{س - ٢}$ = ...

(أ) ١٨ (ب) ٢٢ (جـ) ١٠ (د) ١٦

⑧ إذا كان : د (س) = $٣^{س + ٢}$ فإن : د (−٢) = ...

(أ) ٣ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ١

(٩) يزداد سعر احدى السلع المعمرة بنسبة ٣ ٪ سنويًا فإذا كان سعرها الأصلى ١٠٠٠٠ جنيه فإن سعرها بعد ٤ سنوات = ... جنيه تقريبًا

(أ) ١١٢٥٥ (ب) ١٢١٥٥ (جـ) ٩٦٢٥ (د) ٩٧١٧

(١٠) إذا كان : لو$_{س}$ ٨١ = ٤ فإن : س ∋ ....

(أ) {-٣} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، -٣} (د) {١}

(١١) لو$_{٧}$ ١٥ + لو$_{٧}$ ١٤ – لو$_{٧}$ ١٠٥ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٧ (د) ١٠

(١٢) إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = أ^{س} يمر بالنقطة (١ ، ٣) فإن : أ = ...

(أ) ٠ (ب) ١ (جـ) -١ (د) ٣

(١٣) إذا كان : د (س) = ٢^{س} فإن مجموعة حل المعادلة د (٢ س) – د (س + ١) = ٠ هى ....

(أ) {٠} (ب) {٠ ، ١} (جـ) {١} (د) {-١}

(١٤) نهــــا$_{س \to \infty}$ $\frac{س^{٢} - س}{س^{٣}}$ = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) ١ (د) ∞

(١٥) نهــــا$_{س \to ٢}$ (١٠) = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(١٦) نهــــا$_{س \to ٣}$ $\frac{س^{٢} - ٧ س + ١٢}{س - ٣}$ = ...

(أ) ١ (ب) -٢ (جـ) ٧ (د) -١

(١٧) إذا كان : نهــــا$_{س \to ٢}$ $\frac{س^{٢} - ٤ أ}{س - ٢}$ لها وجود عندما أ = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(١٨) نهــــا$_{س \to ٢}$ $\frac{س^{٥} - ٣٢}{س - ٢}$ = ...

(أ) ١٨ (ب) ٣٢ (جـ) ٨٠ (د) ٣٢٠

(١٩) نهــــا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{(س + هـ)^{٧} - س^{٧}}{هـ}$ = ...

(أ) صفر (ب) س^{٧} (جـ) ١ (د) ٧ س^{٦}

(٢٠) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢ س^٢ - ٥}{٣ س + ٨}$ = ...

(أ) صفر (ب) ∞ (جـ) غير موجودة (د) $\frac{٢}{٣}$

(٢١) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س - ١}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢٢) طول قطر الدائرة الخارجية للمثلث ل م ن الذى فيه : لَ = ١٠ حا ل يساوى .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ حا ل (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٢٣) فى المثلث ل م ن إذا كان : لَ = ١٢ سم ، نَ = ١٥ سم ، حا م = ٠,٤

فإن : مَ = ... سم.

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ٠,٠٢ (د) ١٥

(٢٤) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال اضلاعه : ٦ ، ١٠ ، ١٤ سم تساوى ....°

(أ) ١٢٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ١٣٥ (د) ٦٠

(٢٥) عدد حلول المثلث س ص ع الذى فيه : ق(∠ س) = ٦٠° ، سَ = ٧ سم ، عَ = ٩ سم هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٦) فى المثلث س ص ع يكون : $سَ^٢ + صَ^٢ - ٢$ سَ صَ حتا ع = ...

(أ) $سَ^٢$ (ب) $صَ^٢$ (جـ) عَ (د) $عَ^٢$

(٢٧) أ ب جـ مثلث : ق(∠ أ) = ٥٠° ، ق(∠ ب) = ٧٠° ، أ ب = ٨ سم

فإن : ب جـ .... لاقرب سم.

(أ) ٧ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد : $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^٢ + ٥ س} - س\right)$

٢ ارسم منحنى الدالة د حيث : د(س) = |س + ٢| - ١ ومن الرسم عين المدى واطراد الدالة.



٢ محافظة الجيزة — إدارة جنوب الجيزة



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① نقطة رأس منحنى الدالة : د (س) = (س + ٥)^{٢} − ٣ هى ....

(أ) (٥ ، −٣)　(ب) (−٥ ، −٣)　(ج) (−٥ ، ٣)　(د) (٥ ، ٣)

② نوع الدالة : د (س) = س^{٤} جا س ....

(أ) أحادية.　(ب) فردية.　(ج) زوجية.　(د) غير ذلك.

③ مجموعة حل المعادلة : |س + ٣| − ٧ = ٠ فى ح هى ....

(أ) {٣ ، −٧}　(ب) $\varnothing$　(ج) {٤ ، −١٠}　(د) {−٤}

④ إذا كانت د دالة زوجية ، أ ∈ مجال فإن : د (أ) + د (− أ) = ...

(أ) صفر　(ب) ٤　(ج) ٢　(د) ٢ د (أ)

⑤ منحنى الدالة د (س) = |س + ٧| هو نفس منحنى الدالة د (س) = |س| بإزاحة قدرها ٧ وحدات فى اتجاه ....

(أ) وس←　(ب) وس′←　(ج) وص←　(د) وص′←

⑥ إذا كانت : د (س) = ٣^{س} فإن : د (س) × د (−س) = ...

(أ) −٩　(ب) صفر　(ج) ١　(د) ٣

⑦ إذا كانت : ٣$^{س + ١}$ = ٢٧ فإن : س = ...

(أ) −٢　(ب) −١　(ج) ١　(د) ٢

⑧ مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ (أ س + ٣) = ٢ هى {٣} فإن : أ = ...

(أ) ٣　(ب) ٢　(ج) ٥　(د) $\frac{١}{٢}$

⑨ إذا كان : ٥$^{س − ١}$ = ٤$^{س − ١}$ فإن : س = ...

(أ) ٥　(ب) ١　(ج) −١　(د) صفر

(١٠) لو (حتا س) + لو (قا س) = ... حيث س ∈ [٠ ، ٩٠°[

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) −١

(١١) إذا كان : $٢^{س} = ٥$ فإن : $٢^{س + ٢}$ = ...

(أ) ١٥ (ب) ٤ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

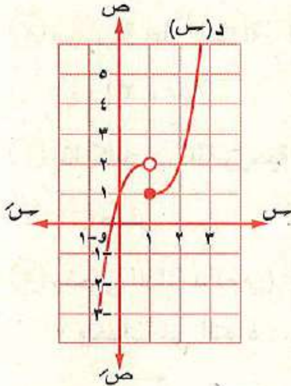
(١٢) إذا كان : $٣^{س} = ٥$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) $لو_{٣}$ ٥ (جـ) $لو_{٧}$ ٨ (د) $لو_{٥}$ ٣

(١٣) إذا كان : أ ∈]٠ ، ٩] فإن : $لو_{٣}$ أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ٢] (ب)]٢ ، ٨١] (جـ) [٢ ، ∞[(د)]−∞ ، ٢]

(١٤) $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ...



(أ) ٢

(ب) ١

(جـ) صفر

(د) غير موجود

(١٥) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ١

(جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ليس للدالة نهاية

(١٦) $\lim_{س \to -\frac{١}{٢}} \frac{١٦ س^{ك} - ١}{٢ س + ١} = -٤$ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٧) $\lim_{س \to \infty} \frac{(٦ س - ٥)(٣ س - ٤)^{٢}}{(٣ س - ٢)^{٣}}$ ....

(أ) ∞ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ٤

(١٨) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩}$ تساوى ....

(أ) $٤\frac{١}{٢}$ (ب) ٢٧ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٣

(١٩) إذا قطع منحنى الدالة د الكثيرة الحدود محور الصادات عند ص = ٣ فإن : ....

(أ) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}}$ د (س) = صفر (ب) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}}$ د (س) = ٣

(جـ) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ د (س) = صفر (د) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ د (س) = ٣

(٢٠) $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا س}}{\text{س}}$ تساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{٤}{\pi}$

(٢١) فى Δ س ص ع يكون المقدار : ٢ نق جا س = ...

(أ) مساحة Δ س ص ع (ب) سَ

(جـ) صَ (د) عَ

(٢٢) فى Δ س ص ع إذا كان : ٣ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع فإن : سَ : صَ : عَ تساوى ....

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٦ : ٤ : ٣ (جـ) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٤ : ٣ : ٦

(٢٣) فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{\text{لَ}^٢ + \text{مَ}^٢ - \text{نَ}^٢}{٢ \text{ لَ مَ}}$ مساويًا ....

(أ) جتا ل (ب) جتا م (جـ) جتا ن (د) جا ل

(٢٤) فى المثلث س ص ع إذا كان : سَ = ١٥ سم ، صَ = ٢٥ سم ، عَ = ٣٥ سم
فإن قياس أكبر زاوية فى المثلث يساوى ....

(أ) ١٥٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٤٠° (د) ٩٠°

(٢٥) إذا كان : أ ب حـ مثلث فإن : أَ قتا أ + بَ قتا ب + حـَ قتا حـ = ...

(أ) ٢ نق (ب) ٤ نق (جـ) ٦ نق (د) ٨ نق

(٢٦) إذا كان طولا ضلعين فى مثلث هما ٤ سم ، ٥ سم ، وقياس الزاوية بينهما يساوى ٦٠°
فإن طول الضلع الثالث يساوى ....

(أ) $٢\sqrt{٥}$ سم (ب) ٤,٥ سم (جـ) ٣ سم (د) $\sqrt{٢١}$ سم

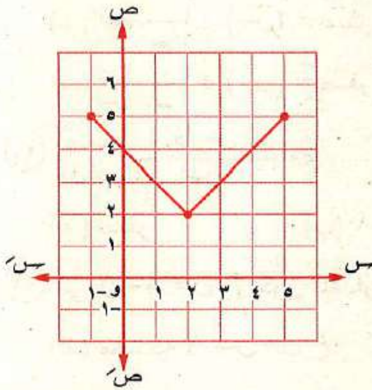
(٢٧) مساحة سطح المثلث أ ب حـ الذى فيه : أَ = ٨ سم ، بَ = ٧ سم ، جتا حـ = $\frac{١}{٢}$
يساوى .... سم^٢

(أ) ١٤ (ب) $١٤\sqrt{٣}$ (جـ) ٢٨ (د) $٢٨\sqrt{٣}$

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) فى الشكل المقابل :



أوجد مجال ومدى وإطراد ونوع الدالة.

---

(٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{س - أ}{(س - ٤)^٢} = ٣$ **فأوجد : قيمة أ**



٣ محافظة الإسكندرية — إدارة وسط

أولا أسئلة الاختيار من متعدد


اختبـار تفاعلى (٣)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجال الدالة : د (س) = $\sqrt{س^٢ + ٤}$ ....

(أ) $]٢ ، \infty[$ (ب) $]٠ ، \infty[$ (جـ) ح (د) $ح^+$

(٢) مجموعة حل المتباينة: |س - ٣| < ١ هى ....

(أ) $]٢ ، ٤[$ (ب) $[٢ ، ٤]$ (جـ) ح - $]٢ ، ٤[$ (د) ح - $[٢ ، ٤]$

(٣) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س + ٢}$ ، ر (س) = $\sqrt{٤ - س}$

فإن : مجال د + ر يساوى ....

(أ) ح (ب) $[-٢ ، ٤]$ (جـ) $[-٢ ، \infty[$ (د) $]-\infty ، ٤]$

(٤) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^٢ & ، س < ١ \\ ٥ س & ، س \geq ١ \end{cases}$ فإن : د (٢) = ...

(أ) ٢٥ (ب) ١٠ (جـ) ٤ (د) ٢

(٥) إذا كانت د دالة زوجية منحناها يمر بالنقطة (٢ ، −٣) فإنه أيضا يمر بالنقطة ....

(أ) (−٢ ، ٣)　(ب) (−٢ ، −٣)　(جـ) (٢ ، ٣)　(د) (٠ ، ٣)

(٦) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة : $س^3 = ٨$ هو ....

(أ) صفر　(ب) ١　(جـ) ٢　(د) ٤

(٧) مجموعة حل المعادلة $س^{\frac{2}{3}} = ٩$ فى ح هى ....

(أ) {٢٧}　(ب) {٢٧ ، −٢٧}　(جـ) {٨١ ، −٨١}　(د) ∅

(٨) إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ فإن مدى الدالة د هو ....

(أ) ح　(ب) $ح^+$　(جـ) $ح^-$　(د)]٠ ، ∞[

(٩) إذا كانت : $٣^{س+١} + ٣^{س-١} = ١٠$ فإن : س = ...

(أ) صفر　(ب) ١　(جـ) ٢　(د) ٣

(١٠) إذا لو$_م$ ٥ = س ، لو$_م$ ٣ = ص فإن : لو$_م$ ١٥ = ...

(أ) س + ص　(ب) س ص

(جـ) س − ص　(د) لو$_م$ س + لو$_م$ ص

(١١) مجموعة حل المعادلة : $٥^{س+٣} = ٤^{س+٣}$ فى ح هى ....

(أ) {٣}　(ب) {٣ ، −٣}　(جـ) {٥ ، ٤}　(د) {−٣}

(١٢) لو$_ص$ $ص^4$ = ...

(أ) ٤ ص　(ب) ٤　(جـ) $ص^4$　(د) ٤ ص

(١٣) مجموعة حل المعادلة : لو$_٢$ (س + ٤) = ٣ فى ح هى ....

(أ) {٥}　(ب) {٢٣}　(جـ) {١}　(د) ∅

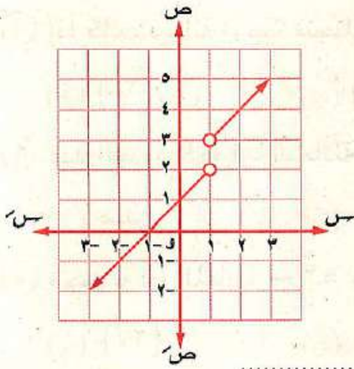
(١٤) $\underset{س \leftarrow ب}{نهـا}$ ($٢ س^2 - ب^2$) = ...

(أ) ب　(ب) ٢ ب　(جـ) $ب^2$　(د) $٢ ب^2$

(١٥) $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} \frac{س^5 - أ^5}{س - أ}$ = ...

(أ) أ　(ب) $أ^5$　(جـ) ٥ أ　(د) ٥

(١٦) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن : نهـــا (س ← ١) د (س) = ...

(أ) ١

(ب) ٢

(جـ) ٣

(د) غير موجودة

(١٧) إذا كانت : نهـــا (س ← ٣) $\frac{\text{د (س)}}{\text{س} - ٣}$ موجودة فإن : د (٣) = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) صفر (د) غير معرفة

(١٨) نهـــا (س ← ٤) $\frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤}{\text{س} - ٤}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) −$\frac{١}{٥}$ (جـ) ٥ (د) −٥

(١٩) نهـــا (س ← أ) $\frac{\text{س}^٥ - \text{أ}^٥}{\text{س} - \text{أ}}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٥ أ (جـ) ٥ $\text{أ}^٤$ (د) ٤ $\text{أ}^٥$

(٢٠) نهـــا (س ← ∞) $\frac{-٤\text{س} + ٥}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣}$ = ...

(أ) صفر (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) −٣

(٢١) إذا كان : نهـــا (س ← ∞) $\frac{\text{أ س}^٢ + ٥\text{س} + ٣}{٣\text{س}^٢ + ٤}$ = ٤ فإن أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٢٢) مثلث ل م ن فيه : مَ = ٦٨,٤ سم ، ق (∠ م) = ١٠٠° ، ق (∠ ن) = ٤٠° فإن مساحة المثلث تساوى .... سم² تقريبًا.

(أ) ٦٤٠ (ب) ٧٢٢ (جـ) ٨٨١ (د) ٩٨١

(٢٣) أ ب جـ مثلث متساوى الاضلاع طول ضلعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم ، فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث يساوى ....

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٥ (د) ١٥ $\sqrt{٣}$

(٢٤) فى المثلث س ص ع إذا كان : ٣ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع

فإن : سَ : صَ : عَ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٦ : ٤ : ٣ (جـ) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٤ : ٣ : ٦

(٢٥) فى المثلث أ ب حـ ، إذا كان $\frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ} = \frac{1}{2}$ فإن : ....

(أ) ق(∠أ) = ٦٠° (ب) ق(∠ب) = ٦٠°

(جـ) ق(∠أ) = ١٢٠° (د) ق(∠حـ) = ١٢٠°

(٢٦) فى المثلث أ ب حـ ، أ : ب : حـ = ٣ : ٢ : ٢ فإن : حتا أ = ...

(أ) $\frac{1}{8}$ (ب) $-\frac{1}{8}$ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{3}{4}$

(٢٧) فى المثلث أ ب حـ ، أ = ٥ سم ، حـ = ٨ سم ، ق(∠ب) = ٦٠° فإن : ب = ... سم.

(أ) ٧ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٤

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = $(س - ٢)^3 + ٢$ ومن الرسم عين مدى الدالة وفترات اطرادها ثم بين نوعها من حيث كونها زوجيه أم فردية أم غير ذلك.

---

٢ أوجد بالخطوات قيمة النهاية :

$$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س - ١}$$



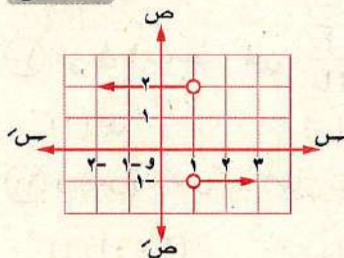
٤ محافظة القليوبية إدارة قها التعليمية



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



(أ) {٢}

(ب) {-١ ، ٢}

(جـ)]-١ ، ٢[

(د) ح

② إذا كانت : (٣ ، ٢) ∈ لمنحنى الدالة الفردية فإن النقطة .... ∈ نفس المنحنى.

(أ) (−٣ ، −٢) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (−٣ ، ٢) (د) (٢ ، ٣)

③ لأى مثلث Δ ل م ن إذا كان : لَ = مَ فإن : جتا ل = ...

(أ) $\frac{٢ نَ}{لَ}$ (ب) $\frac{٢ نَ}{مَ}$ (جـ) $\frac{نَ}{٢ مَ}$ (د) $\frac{٢ لَ}{مَ}$

④ فى المثلث أ ب حـ يكون : $أَ^٢ + بَ^٢ - حَ^٢ = ٢ أَ بَ \times$ ....

(أ) جا حـ (ب) جتا حـ (جـ) جتا أ (د) جتا ب

⑤ إذا كانت : د (س) = { |س| عندما س > صفر ، $س^٢$ عندما س ≤ صفر } فإن مجال الدالة هو ....

(أ) [٠ ، ∞[(ب)]٠ ، ∞[(جـ) $ح_+$ (د) ح

⑥ إذا كانت د : د (س) = $س^٣$ فإن صورة منحنى الدالة بالانعكاس فى محور السينات والانتقال وحدة واحدة فى اتجاه و س ← وثلاث وحدات فى اتجاه و ص ← هى ....

(أ) $-(س - ١)^٣ + ٣$ (ب) $-(س + ١)^٣ + ٣$

(جـ) $-(س + ١)^٣ - ٣$ (د) $-(س - ١)^٣ - ٣$

⑦ إذا كانت : $\sqrt{س^٣} = ٨$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٩

⑧ مجموعة الحل فى ح للمعادلة : |س − ٤| = ٢ هى ....

(أ) ∅ (ب) {٦ ، −٢} (جـ) {−٦ ، ٢} (د) {٦ ، ٢}

⑨ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣ س}{س - ٣} =$ ....

(أ) −٣ (ب) −٢ (جـ) ٣ (د) صفر

⑩ فى Δ أ ب حـ فإن : $\frac{أَ}{جا أ} =$ ....

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) ٣ نق (د) $نق^٢$

⑪ د (س) = $س^٢ + ٢$ فإن نقطة رأس المنحنى هى ....

(أ) (٠ ، ٢) (ب) (−٢ ، ٠) (جـ) (٠ ، −٢) (د) (٢ ، ٠)

(١٢) لو$_٣$ ٧ × لو$_٧$ ٩ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ٩

(١٣) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{س + ٣} - ٢}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٤) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٢}$ هو ....

(أ) [٢ ، ∞[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]- ∞ ، ٢] (د)]- ∞ ، ٢[

(١٥) لو$_٣$ ٩ + لو$_٥$ ٢٥ = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٩

(١٦) إذا كان : $٣^{س}$ = ١ فإن : ٣ س + ٢ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ١

(١٧) فى Δ أ ب جـ المقدار $ب^٢$ + ٢ أ جـ جتا ب = ...

(أ) $أ^٢ + ب^٢$ (ب) $أ^٢ + جـ^٢$ (جـ) $ب^٢ + جـ^٢$ (د) $أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢$

(١٨) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٣ + س^٢ - ٢}{س - ١}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٩) إذا كان : لو (س + ٥) = ١ فإن : س = ...

(أ) ١٠ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) صفر

(٢٠) قيمة لو$_٣$ ٥٤ - لو$_٣$ ٢ = ...

(أ) لو ٣ (ب) لو ٢٧ (جـ) ٢٧ (د) ٣

(٢١) $\lim\limits_{س \to ∞} \left(\frac{٢ س^٢ + ١}{س^٢ + ٢}\right)^٢$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢٢) مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{س^٢}$ + ٢ س = ٣ فى ح تساوى ....

(أ) {١ ، ٣} (ب) {١} (جـ) {٣} (د) ∅

(٢٣) إذا كانت : $أ^{س} - ٣ أ^{-س} = ٢$ حيث أ > ١ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) لو ٣ (جـ) لو$_أ$ ٣ (د) لو$_٣$ أ

(٢٤) فى Δ أ ب حـ إذا كان : $\frac{\text{جا أ}}{٤} = \frac{\text{جا ب}}{٥} = \frac{\text{جا حـ}}{٦}$ فإن : أَ : بَ : حَ = ...

(أ) ٤ : ٥ : ٦ (ب) ٦ : ٥ : ٤ (جـ) ٥ : ٤ : ٦ (د) ٣ : ٥ : ٢

(٢٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا ٥ س}}{\text{٣ س}}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) ‎-٢ (جـ) ٢ (د) $\frac{٣}{٥}$

(٢٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣ طا ٢ س}}{\text{٢ جا س}}$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) غير معرفة

(٢٧) فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ٣٠ ، أَ = ٤ سم يكون نصف قطر الدائرة التى تمر برؤوس المثلث = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) أوجد قيمة : أ التى تجعل الدالة د متصلة عند أ

حيث د (س) = { س^{٢} عندما س ≤ أ ، ٢ س عندما س > أ }

---

(٢) إذا كانت : ٢$^{\text{س} + ١}$ = ٧ **فأوجد :** قيمة س لأقرب رقم عشرى.



٥ محافظة الغربية — إدارة السنطة التعليمية

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة : |س − ٣| + ١ = ٠ فى ح هى ....

(أ) ح (ب) {٤} (جـ) {−١} (د) ∅

(٢) نقطة تماثل منحنى الدالة : د (س) = (س − ١)^{٣} + ٢ هى ....

(أ) (٢ ، ١) (ب) (٢ ، −١) (جـ) (−١ ، ٢) (د) (١ ، ٢)

(٣) الدالة الفردية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الاتية هى ....

(أ) $س^٢$ حاس (ب) $طا^٢$ س (جـ) حتاس (د) ١

(٤) إذا كان : $لو_٣$ (٢ س + ٣) = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢ (د) ٤

(٥) إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٤ = ص فإن : لو ١٢ = ...

(أ) س + ص (ب) لو س + لو ص (جـ) س ص (د) لو س ص

(٦) $لو_٥$ ٧ × $لو_٧$ ١٢٥ = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٧

(٧) إذا كانت : $٢^{س + ٢}$ = ٣٢ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٥

(٨) الدالة د : د (س) = | س + ٢ | تكون متناقصة فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب) [٢ ، ∞[(جـ)]-٢ ، ∞[(د)]-∞ ، -٢]

(٩) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٤}$ هو ....

(أ) [٢ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٢]

(جـ) [٢ ، ∞[- {٤} (د)]-∞ ، -٢] - {٤}

(١٠) مجموعة حل المعادلة : $٣^{٢س}$ - ٣٠ × $٣^{س - ١}$ + ٩ = ٠ هى ....

(أ) {٠} (ب) {٠ ، ٢} (جـ) {٢} (د) ∅

(١١) إذا كان : $٢^{س + ١}$ - $٢^{س - ١}$ = ٣ فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٢) $\frac{١}{لو_٥ ٣٠} + \frac{١}{لو_٣ ٣٠} + \frac{١}{لو_٢ ٣٠}$ = ...

(أ) ٣٠ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) -١

(١٣) إذا كان : $س^{\frac{٣}{٢}}$ = ٦٤ فإن : س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

(١٤) أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع حيث طول ضلعه ٥ $\sqrt{٣}$ سم : فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى .... سم.

(أ) ١٠ (ب) ١٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٥ (د) ٥ $\sqrt{٣}$

(١٥) فى Δ أ ب حـ إذا كان : ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا حـ فإن : ق (∠ حـ) = ... (لأقرب درجة)

(أ) ٨٩° (ب) ٢٩° (جـ) ٥٧° (د) ٨٢°

(١٦) فى Δ أ ب حـ مثلث إذا كان : $\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{\text{٢ جا ب}}{٥} = \frac{\text{جا حـ}}{٤}$ فإن : أَ : بَ : حَ = ...

(أ) ٣ : ٥ : ٤ (ب) ٦ : ٥ : ٨ (جـ) ٦ : ٥ : ٣ (د) ٣ : ٢ : ٤

(١٧) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ س ص ع الذى فيه : سَ = ٢٠ جا س سم يساوى .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠

(١٨) فى أى مثلث أ ب حـ يكون : $\frac{\text{أَ}}{\text{بَ}} \times \frac{\text{جا ب}}{\text{جا أ}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}}$ (ب) $\frac{\text{جا حـ}}{\text{حَ}}$ (جـ) ٤ نق^{٢} (د) ١

(١٩) إذا كان : Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ أ) = ١٢٠° ، أ حـ = ٦ سم ، أ ب = ١٠ سم فإن : ب حـ = ... سم.

(أ) ١٤ (ب) ٣٥ (جـ) ٢١ (د) ٧

(٢٠) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٦} - ١}{\text{س} - ١}$ = ...

(أ) ١ (ب) −٦ (جـ) ٦ (د) ٥

(٢١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{٣ س} + ١)^{٢} - ١}{\text{٣ س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ٤}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢٣) $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٣} + \text{٢ س}^{-٢} + ١}{\text{٢ س}^{-٣} - \text{س}^{-١} + ٣}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٨}$

(٢٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^2 - س - ٦}{س^2 + س - ١٢} = \ldots\ldots$

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) -١ (د) -٥

(٢٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{٢ س - ٦}{٧ س - ٢١} = \ldots\ldots$

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٧}$ (جـ) $\frac{٣}{٧}$ (د) ٣

(٢٦) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٥}{س} + ٢\right) = \ldots\ldots$

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٧

(٢٧) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٧ - ١}{س^٣ - ١} = \ldots\ldots$

(أ) ٧ (ب) $\frac{٧}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٧}$ (د) ١

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) حل المتباينة فى ح : $|٢ س - ١| \geq ٥$

---

(٢) أوجد قيمة النهاية الآتية :

$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٢٧ س^٣ + ٥}}{٢ س - ٧}$

٦ محافظة الدقهلية

إدارة بلقاس التعليمية



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٢ س + ١}{س - ٢}$ هو ......

(أ) ح (ب) ح - {٢} (جـ) ح - $\{\frac{١}{٢}\}$ (د)]٢ ، ∞[

(٢) مدى الدالة : د (س) = ٧ هو ......

(أ) [٧ ، ∞[(ب) ح (جـ) {٧} (د) ح - {٧}

(٣) إذا كانت : د دالة فردية فى الفترة [أ ، ب] فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) − أ (ج) $أ^٣$ (د) ٢ أ

(٤) فى Δ أ ب ح حيث : أَ = ٥ سم ، بَ = ٣ سم ، ق (∠ ح) = $\frac{٢\pi}{٣}$

فإن : حَ = ... سم.

(أ) ٧ (ب) ٥٨ (ج) ٣٩ (د) ٤

(٥) Δ أ ب ح يكون فيه : ٢ أَ حَ × .... = $أَ^٢ + حَ^٢ - بَ^٢$

(أ) جتا أ (ب) جتا ب (ج) جتا ح (د) جا ب

(٦) قياس أكبر زاوية فى المثلث أ ب ح الذى أطوال أضلاعه هى ٣ ، ٥ ، ٧ سم تساوى ....°

(أ) ١١٠ (ب) ١٠٠ (ج) ١٥٠ (د) ١٢٠

(٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ٢س}{\sqrt{س + ٩} - ٣}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ١٢ (ج) −٣ (د) ١٢

(٨) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٨ + ٩س^٢}}{س}$ = ...

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) ٣ (ج) −٣ (د) $-٢\sqrt{٢}$

(٩) إذا كان : $٣^{س - ٥} = ٩$ فإن : س = ...

(أ) −٧ (ب) ٧ (ج) −٣ (د) ٢

(١٠) مجال الدالة د : د (س) = $لو_٣$ (س + ١) هو ....

(أ) ح (ب)]٠ ، ∞[(ج) [−١ ، ∞[(د)]−١ ، ∞[

(١١) مجموعة حل المعادلة : |٥ س − ١| + ٤ = ١ فى ح هى ....

(أ) $\{-\frac{٤}{٥}\}$ (ب) $\{-\frac{٤}{٥} ، -\frac{٦}{٥}\}$ (ج) {٣} (د) ∅

(١٢) إذا كانت : د (س) = $٥^{س + ١}$ وكان : د (أ) = ١٢٥ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (ج) ٢ (د) ٣

(١٣) فى Δ س ص ع إذا كان : ٣ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع

فإن : سَ : صَ : عَ = ...

(أ) ٤ : ٣ : ٢ (ب) ٦ : ٤ : ٣ (ج) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٤ : ٣ : ٦

(١٤) مجموعة حل المتباينة : | ٣ − س | > صفر هى ....

(أ) {±٣}　　(ب)]−٣ ، ٣[　　(ج)]−∞ ، ٣[　　(د) ح − {٣}

(١٥) الدالة : د (س) = أ^س تكون تناقصية على مجالها عندما ....

(أ) أ = ١　　(ب) ٠ < أ < ١　　(ج) أ < ١　　(د) أ > ١

(١٦) أ ب حـ مثلث متساوى أضلاع طول ضلعه ٦ سم فإن نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ...

(أ) ٤ √٣　　(ب) ٢ √٣　　(ج) √٣　　(د) ١٢

(١٧) نهـــا (س ← ٠) $\frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س}$ = ...

(أ) ٢　　(ب) $\frac{١}{٢}$　　(ج) صفر　　(د) ∞

(١٨) الدالة : د (س) = أ^س تمر بالنقطة (٣ ، ٨)　فإن : أ = ...

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(ج) ٨　　(د) ٤

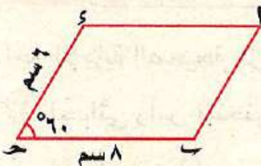
(١٩) أودع مبلغ ٥٠٠٠ جنيه م فى بنك يعطى فائدة مركبة قدرها ٥٪ سنويًا فإن جملة المبلغ بعد ٧ سنوات يساوى .... جنيه.

(أ) ٦٧٥٠　　(ب) ٧٠٣٥,٥　　(ج) ٥٣٥٠,٥　　(د) ٨٥٠٠

(٢٠) إذا كان : لو$_{٢}$ س = لو$_{٣}$ ٩　فإن : س = ...

(أ) ٢　　(ب) ٤　　(ج) ٩　　(د) ١٨

(٢١) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازى أضلاع

أ حـ = ... سم.

(أ) ١٠　　(ب) ٢ √١٧　　(ج) ٢ √٣٧　　(د) ٤٨

(٢٢) ٢ لو$_{م}$ س + لو$_{م}$ ص − لو$_{م}$ س ص = ...

(أ) لو س　　(ب) لو$_{م}$ س　　(ج) لو$_{م}$ س ص　　(د) لو$_{م}$ س^{٢}

(٢٣) نهـــا (س ← ∞) $\frac{(١٢)^{\frac{١}{س}}}{س}$ = ...

(أ) −١　　(ب) ١٢　　(ج) صفر　　(د) ∞

(٢٤) نهـــا$_{س \to \pi}$ جا س = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) π (د) −١

(٢٥) نهـــا$_{س \to \infty}$ (٤ + ٥ س − س^{٢}) = ...

(أ) ٥ (ب) صفر (جـ) −∞ (د) ∞

(٢٦) نهـــا$_{س \to ٢}$ $\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٤}$ = ...

(أ) $\frac{-٢}{٥}$ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) −$\frac{٥}{٢}$

(٢٧) إذا كان : نهـــا$_{س \to \infty}$ $\frac{أ^{٢} س + ٦}{٢ س + ٥}$ = ٨ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) ±٤ (د) ٤

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد قيمة : نهـــا$_{س \to ٢}$ $\frac{(س - ٣)^{٢} - ١}{٢ س^{٢} - ٣ س - ٢}$

٢ ارسم الشكل البيانى للدالة :

د (س) = (س − ٣)^{٢} + ١ ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطردها.



٧ محافظة دمياط إدارة الزرقا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد


اختبار تفاعلى ⑦

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إحداثى رأس المنحنى : د (س) = (س − ٥)^{٢} + ١ هى ....

(أ) (−٥ ، ١) (ب) (٥ ، ١) (جـ) (−٥ ، −١) (د) (١ ، ٥)

② مثلث أ ب حـ فيه : حـَ = ١٤ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠° ، بَ = ٣٠ سم

فإن : أَ = ... سم.

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٦ (د) ٢٧

③ إذا كان : لو$_{س}$ ٢٥ = ٢ فإن قيمة : س^{٣} − س^{٢} − س = ...

(أ) ١٠٥ (ب) ٩٥ (جـ) ١٤٥ (د) ١٥٥

④ Δ ٢ب حـ متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ $\sqrt{٣}$ فإن طول قطر الدائرة الخارجة للمثلث يساوى .... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٢٠ (د) ١٥

⑤ إذا كان : ٢ = $٢^{س}$ ، ب = $٣^{س}$ ، حـ = $٥^{س}$ فإن قيمة : $٣٠^{س}$ = ...

(أ) ٢ب حـ (ب) ٢ب $حـ^{٢}$ (جـ) ٢ب (د) ٣ ٢ب حـ

⑥ مجال د (س) = $\sqrt{س - ٥}$ هو ....

(أ) {٥} (ب)]٥ ، ∞[(جـ)]−٥ ، ∞[(د) [٥ ، ∞[

⑦ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ ٤ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ١٢ (د) غير موجودة

⑧ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^{٤} - ١٦}{س - ٢}$ = ...

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ٣٢ (د) ٦٤

⑨ مدى الدالة : د (س) = $(س - ٤)^{٢}$ + ١ هو : ....

(أ) [−٤ ، ١] (ب) [١ ، ∞[(جـ)]− ∞ ، ٤] (د) [٤ ، ∞[

⑩ Δ ٢ب حـ فيه : ٢َ قا ٢ + بَ قا ب + حـَ قا حـ = ...

(أ) ٢ نق (ب) ٤ نق (جـ) ٦ نق (د) ٨ نق

⑪ مجموعة حل المتباينة : | ٣ س − ٦ | ≤ ١٢ (حيث س ∈ ح) هى : ....

(أ) [−٢ ، ٦] (ب) {−٢ ، ٦} (جـ)]−٢ ، ٦[(د) [−٦ ، ٢]

⑫ إذا كان : $لو_{٥}$ س = ٣ فإن : لو (٨ س) = ...

(أ) ٣ (ب) ١٢٥ (جـ) ١٠٠ (د) ١٠٠٠

⑬ إذا كانت : د (س − ١) = $٣^{س}$ فإن : د (٤) = ...

(أ) ٩ (ب) ٢٧ (جـ) ٨١ (د) ٢٤٣

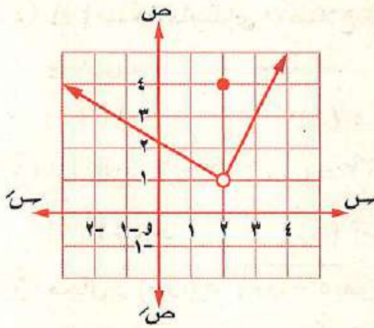
⑭ عدد الحلول الممكنة للمثلث Δ ٢ب حـ : ٢َ = ٨ سم ، بَ = ١٠ سم ، ق (∠ ٢) = ٤٢° هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑮ مجموعة حل المعادلة : | س − ٤ | = ١ حيث : س ∈ ح هى ....

(أ) {−٣ ، ٥} (ب) [٣ ، ٥] (جـ) {٣ ، −٥} (د) {٣ ، ٥}

(١٦) فى الشكل المقابل :



$\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...

(أ) ١

(ب) ٢

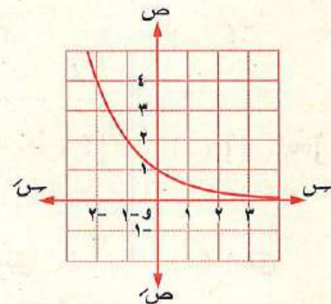
(جـ) ٤

(د) غير موجودة

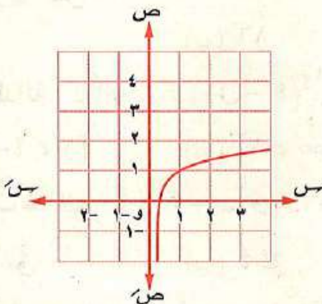
(١٧) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٣ + ٩ س^٤}{٣ س^٤ + ٧ س}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٩

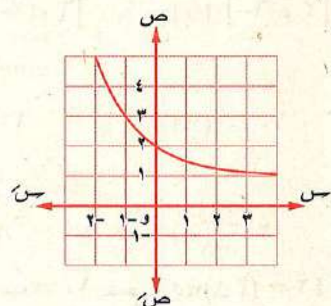
(١٨) الدالة د حيث : د (س) = $٢^{س}$ يمثلها الشكل البيانى : ....



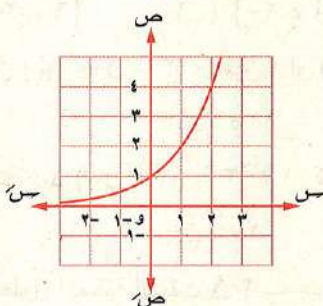
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

(١٩) مثلث أطوال أضلاعه ٩ سم ، ٤٠ سم ، ٤١ سم فإن قياس أكبر زوايا المثلث تساوى ....

(أ) ٩٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٥٠°

(٢٠) $\lim_{س \to \infty}$ (س$^{-٤}$ + ٥ س$^{-٣}$ + ٩) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٥　　(جـ) ٩　　(د) غير موجودة

(٢١) مجموعة حل المعادلة : لو (س + ٦) = ٢ (حيث س ∈ ح) هى : ....

(أ) −٤　　(ب) ٦٤　　(جـ) ٩٤　　(د) ١٠٠

(٢٢) إذا كانت : س ∈ ح وكانت : ٥^{س} = ٢٥ فإن الصورة اللوغاريتمية المكافئة لها هى : ....

(أ) لو$_٥$ ٢٥ = س　　(ب) لو$_٥$ س = ٢٥　　(جـ) لو$_س$ ٥ = ٢٥　　(د) لو$_س$ ٢٥ = ٥

(٢٣) مثلث أ ب حـ فيه : بَ = ١١ سم ، ق (∠ أ) = ٦٧° ، ق (∠ حـ) = ٤٦°

فإن محيط المثلث ≈ .... سم.

(أ) ٢٢　　(ب) ٢٧　　(جـ) ٣١　　(د) ٣٨

(٢٤) المعادلة : س^{٤} = ١٦ عدد جذورها يساوى ....

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) ٤

(٢٥) إذا كانت : $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} + ٣ س - ٤}{س + ك} = ٥$ 　فإن : قيمة ك = ...

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) −١　　(د) ٤

(٢٦) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٧ س + ١٠}{س - ٥}$ = ...

(أ) صفر　　(ب) ٣　　(جـ) ٥　　(د) ١٠

(٢٧) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٨} - ١}{س^{٤} - ١}$ = ...

(أ) ١　　(ب) ٢　　(جـ) ٤　　(د) ٨

ثانيًا　الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) ارسم منحنى الدالة د حيث د (س) = ٢ − | س | ومن الرسم ابحث اطراد الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

٢ أوجد مع (توضيح خطوات الحل)

أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} - ١} - ٢}{\text{س} - ٥}$



٨ محافظة كفر الشيخ

إدارة فوه



اختبار تفاعلى ٨

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجال الدالة د $(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٣}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٣} (جـ) [٣ ، ∞[(د)]−∞ ، ٣]

② $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} - ٤} =$ ....

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{-٢}{٥}$

③ أ ب حـ مثلث متساوى الاضلاع الذى طول ضلعه ٥ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى ....

(أ) ٥ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

④ مجموعة حل المعادلة : $\text{س}^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$ هى ....

(أ) {٢٧ ، −٢٧} (ب) {٩ ، −٩} (جـ) {٩} (د) {٢٧}

⑤ إذا كانت د دالة فردية على [− س ، س] فإن : د (− س) + د (س) = ...

(أ) ٢ س (ب) غير معرفة (جـ) −٢ س (د) صفر

⑥ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١} - ٢}{\text{س} - ٣} =$ ....

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٦ (د) $\frac{١}{٦}$

⑦ إذا كان محيط المثلث أ ب حـ = ١٥ سم ، ق (∠ أ) = ٥٣° ، ق (∠ ب) = ٤٧°
فإن : طول $\overline{\text{أ ب}}$ ≈ .... سم.

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٥ (د) ٨

⑧ الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢ & \text{، س} > ٠ \\ -٢ & \text{، س} < ٠ \end{cases}$ متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (-٢ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (-٢ ، ٢)

⑨ إذا كان : $٢^{س} = ٥$ فإن : $٢^{س+١}$ = ...

(أ) ١٥ (ب) ٤ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

⑩ $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{س^٥ + ٣٢}{س^٣ + ٨}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{٢٠}{٣}$ (جـ) $\frac{-٢٠}{٣}$ (د) ليس لها نهاية.

⑪ فى المثلث أ ب حـ يكون $\frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢}$ = أ ب × ....

(أ) جتا حـ (ب) جا حـ (جـ) جتا أ (د) جتا ب

⑫ نقطة تماثل الدالة د : د (س) = ٣ - $(س + ٢)^٣$ هى ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (٢ ، ٣) (جـ) (-٢ ، ٣) (د) (-٢ ، -٣)

⑬ مجموعة حل المعادلة : $٣^{س-٢} + ٣^{س-١}$ = ٣٦ فى ح هى ....

(أ) {٩} (ب) {٤} (جـ) {٢} (د) {٣}

⑭ $\lim\limits_{س \to \infty}$ ($٣س^{-٤} + ٤س^{-٣} + ٧$) هى ....

(أ) ١٤ (ب) ٧ (جـ) ∞ (د) صفر

⑮ إذا كان : $\frac{جا أ}{٣} = \frac{جا ب}{٥} = \frac{جا حـ}{٧}$ فإن قياس أكبر زاوية فى المثلث أ ب حـ = ...

(أ) °١٥٠ (ب) °١٢٠ (جـ) °٦٠ (د) °٣٠

⑯ الدالة د : د (س) = $أ^{س}$ تكون تناقصية على مجالها ح عندما ....

(أ) أ = ١ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = -١

⑰ مجموعة حل المعادلة : |س - ١| = ٤ فى ح هى ....

(أ) {٥} (ب) {-٣ ، ٥} (جـ) [-٣ ، ٥] (د) {-٥}

⑱ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س^٢}}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) -١

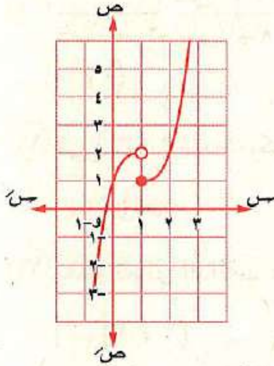
(١٩) أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٤ سم ، ب = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ١١٢° فإن عدد المثلثات التى تحقق الشروط السابقة هى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) عدد لا نهائى

(٢٠) إذا كان لو$_{س}$ (س + ٦) = ٢ فإن : س ∈ ....

(أ) {٣ ، -٢} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، ١} (د) {٦ ، ١}

(٢١) فى الشكل المقابل :



نهــا$_{س ← ١}$ د (س) = ...

(أ) ١

(ب) ٢

(جـ) غير موجودة

(د) ٣

(٢٢) فى المثلث أ ب حـ إذا كان : ب = حـ فإن : جتا حـ = ...

(أ) $\frac{أ}{٢ ب}$ (ب) $\frac{ب}{٢ حـ}$ (جـ) $\frac{٢ ب}{حـ}$ (د) $\frac{٢ ب}{أ}$

(٢٣) مجال الدالة د : د (س) = لو$_{١ - س}$ ٤ هو ....

(أ)]١ ، ∞[(ب)]-١ ، ١[

(جـ) [١ ، ∞[(د)]-∞ ، ١[- {٠}

(٢٤) مجموعة حل المعادلة لو (س - ١) + لو (س + ١) = لو ٣ هى ....

(أ) {٢} (ب) {-٢} (جـ) {٢ ، -٢} (د) {٣}

(٢٥) نهــا$_{س ← -١}$ $\frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٥

(٢٦) إذا كان : ٣^{س} = ٥ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) لو$_{٣}$ ٥ (جـ) لو$_{٥}$ ٣ (د) $\frac{٥}{٣}$

(٢٧) نهــا$_{هـ ← ٠}$ $\frac{(س + هـ)^٧ - س^٧}{هـ}$ = ...

(أ) س^٧ (ب) ٧ س^٦ (جـ) صفر (د) ١

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد مجموعة الحل فى ح للمتباينة : | س + ٤ | ≤ ٢

---

٢ أوجد قيمة : نها س ← ∞ $\frac{(س + ١)(٥ س - ٣)}{س^٢ + ٣}$



٩ محافظة البحيرة

إدارة أبو المطامير



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجال الدالة : د (س) = $\sqrt{س - ٣}$ هو ....

(أ) ح - {٣} (ب)]٣ ، ∞[(جـ) {٣} (د)]-∞ ، ٣]

② الدالة : د (س) = $\frac{جتا س}{س}$ هى دالة ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) لا فردية ولا زوجية. (د) خطية.

③ نقطة تماثل منحنى الدالة : د (س) = $\frac{٢}{س - ١}$ + ٣ هى ....

(أ) (١ ، ٣) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (٢ ، ٣) (د) (٣ ، ١)

④ مجموعة حل المتباينة : | س - ١ | < ٠ فى ح هى ....

(أ) {١} (ب)]١ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ١[(د) ∅

⑤ الدالة : د (س) = ٥ - (٢ س - ٣)^٣ تكون تناقصية على الفترة ....

(أ) ح (ب) ح - {$\frac{٣}{٢}$} (جـ) [$\frac{٣}{٢}$ ، ٥] (د) ح - {٥}

⑥ مجموعة حل المعادلة : ٣$^{٢ س - ١}$ = ٥$^{٢ س - ١}$ فى ح هى ....

(أ) {$\frac{١}{٢}$} (ب) {$\frac{٣}{٥}$} (جـ) {$\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{١}{٢}$} (د) لو$_٥$ ٣

⑦ لو$_{٢٤}$ ٢ + لو$_{٢٤}$ ٢ + لو$_{٢٤}$ ٦ = ...

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢٤

⑧ إذا كان : $\text{د}(\text{س}) = ٧^{\text{س}}$ وكان : د (س + ١) + د (س − ١) = ٥٠

فإن : س = ... حيث : س ∈ ح

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٧ (د) ٤٩

⑨ إذا كان : $\text{لو}_{\text{س}}\ ٣٦ = ٢$ فإن : س = ...

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) ±٦ (د) ٢

⑩ عدد جذور المعادلة : $\text{س}^{٣} = ٨$ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٨

⑪ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = ٢^{\text{س}}$ فإن : د (أ) × د (ب) = ...

(أ) د (أب) (ب) د (أ + ب) (جـ) أ + ب (د) أب

⑫ إذا كان : $\text{لو}_{٣}\ ١٥ = \text{س}$ ، $\text{لو}_{٢}\ ٥ = \text{ص}$ فإن : ....

(أ) ٣ س = ٢ ص (ب) $\text{س}^{٣} = \text{ص}^{٢}$ (جـ) س = ص (د) $٣^{\text{س} - ١} = ٢^{\text{ص}}$

⑬ إذا كان : $\text{لو}_{\text{س}}\ ٢٥ = ٢$ فإن : $\text{لو}_{٥}\left(\frac{\text{س}}{٥}\right) = $ ....

(أ) ٣ (ب) ١٢٥ (جـ) صفر (د) ٢٥

⑭ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} (٢\,\text{س}^{٢} - \text{س}) = $ ....

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

⑮ $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}} \frac{٣\,\text{س}^{٢} - ٨\,\text{س} - ١٦}{\text{س}^{٢} - ١٦} = $ ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١ (د) ليس لها وجود

⑯ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٧} - ١}{\text{س} - ١} = $ ....

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) صفر

⑰ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س} + ١)^{٢} - ١}{٢\,\text{س}} = $ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑱ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢}}\right) = $ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ∞

(١٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - ٣س}{٢س}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) صفر (د) ليس لها نهاية

(٢٠) $\lim_{س \to \infty} (س^{-٢} + س^{-٣} + ٥)$ = ...

(أ) ∞ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ١٠

(٢١) $\lim_{س \to ٢} (٣ ك)$ = ...

(أ) ك (ب) ٦ (جـ) ١ (د) ٣ ك

(٢٢) فى المثلث س ص ع يكون : ٢ نق جا س = ...

(أ) عَ (ب) صَ

(جـ) سَ (د) مساحة Δ س ص ع

(٢٣) المثلث أ ب حـ فيه : أَ = حـَ ، بَ = ٢ سم ، جتا أ = $\frac{٢}{٥}$ فإن : أَ = ...

(أ) ٣ سم (ب) ٤ سم (جـ) $\frac{٥}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

(٢٤) فى المثلث س ص ع إذا كان : $\frac{جا س}{٥} = \frac{جا ص}{١٣} = \frac{جا ع}{١٢}$ فإن قياس أكبر زواياه = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٢٠

(٢٥) فى المثلث أ ب حـ يكون : $بَ^٢ + حـَ^٢ - أَ^٢$ = ٢ بَ حـَ × ....

(أ) جتا ب (ب) جتا (٩٠ – ب) (جـ) جا (٩٠ – أ) (د) جا (٩٠ – حـ)

(٢٦) المثلث أ ب حـ فيه : أَ = بَ فإن : جتا أ = ...

(أ) $\frac{٢ بَ}{حـَ}$ (ب) $\frac{٢ حـَ}{بَ}$ (جـ) $\frac{بَ}{٢ أَ}$ (د) $\frac{حـَ}{٢ بَ}$

(٢٧) فى المثلث أ ب حـ أى العبارات التالية صحيحة ؟ ....

(أ) جا أ + جا ب = أَ + بَ (ب) أَ جا ب = بَ جا أ

(جـ) أَ = بَ جا حـ (د) $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{جا ب}{بَ}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

1 أوجد مجموعة حل المتباينة الأتية فى ح : | ٢ س – ٥ | + | ٥ – ٢ س | < ١٤

2 أوجد : $\lim_{س \to 2} \frac{س^{3} - 3 س^{2} + س + 2}{س - 2}$



١٠ محافظة الفيوم — توجيه الرياضيات

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد



اختبار تفاعلى ١٠

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة |٢ س – ٣| = ٥ فى ح هى ....

(أ) {–١} (ب) {–١ ، ٤} (جـ) {٤} (د) {١ ، ٤}

(٢) $\lim_{س \to \infty}$ (٥ $س^{-3}$ + $س^{-2}$ – ٢) = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) –٢

(٣) المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى ٤ $\sqrt{3}$ سم تكون مساحته .... $سم^{2}$

(أ) ١٨ (ب) ١٨ $\sqrt{3}$ (جـ) ٩ $\sqrt{3}$ (د) ٣٦

(٤) إذا كان لو (س – ٢) = ١ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) –١ (جـ) ١٢ (د) ٨

(٥) فى △ أ ب جـ : إذا كان أ = ب فإن : جتا ب = ...

(أ) $\frac{جـ}{2 أ}$ (ب) $\frac{أ}{2 جـ}$ (جـ) $\frac{ب}{2 جـ}$ (د) $\frac{2 جـ}{ب}$

(٦) إذا كانت : ٣ $س^{\frac{3}{2}}$ = $ص^{\frac{3}{2}}$ = ٢٧ ، فإن |س| + ص = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٦ (د) ٤٢

(٧) $\displaystyle\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٢٧}{س^٤ - ٨١}$ = ...

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{-٩}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{-١}{٤}$

(٨) إذا كانت : $٣^{س} = ٢٤٣$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) −٥ (جـ) ٥ (د) ±٥

(٩) الدالة : د (س) = $(س - ٢)^٢ + ١$ يمثلها بيانيًا منحنى متماثل بالنسبة المستقيم ....

(أ) س = ١ (ب) س = −١ (جـ) س = ٢ (د) س = −٢

(١٠) $\displaystyle\lim_{س \to \infty} \frac{٤ س^٢ - ٣}{٣ س (س - ٣)}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) ٤ (جـ) صفر (د) ∞

(١١) فى المثلث أ ب حـ يكون $\frac{أ}{٢ نق}$ = ...

(أ) ٢ جا أ (ب) $\frac{١}{٢}$ جا أ (جـ) جا أ (د) ٤ جا أ

(١٢) مجال الدالة : د (س) = $\sqrt{٥ - س}$ هو ....

(أ) $[٥ ، \infty[$ (ب) $]-\infty ، ٥]$ (جـ) $[-٥ ، \infty[$ (د) $]-\infty ، -٥]$

(١٣) $\displaystyle\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤ س + ١} - ٣}{س - ٢}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(١٤) فى المثلث س ص ع فإن : $سَ^٢ + صَ^٢ - عَ^٢$ = ...

(أ) ٢ سَ صَ جتا ص (ب) ٢ سَ صَ جتا ع

(جـ) ٢ سَ عَ جتا ص (د) ٢ عَ صَ جتا س

(١٥) إذا كان : $٥^{س + ٢} = ٧^{س + ٢}$ فإن : $٣^{س + ٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١٥ (د) ٢١

(١٦) إذا كانت : $\displaystyle\lim_{س \to أ} \frac{س^٦ - أ^٦}{س - أ} = ١٩٢$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٣٢ (د) ١٩٢

(١٧) الدالة الفردية من الدوال المعطاة هى د (س) = ...

(أ) ٣ س + ٥ (ب) $س^٢ - ٤$ (جـ) $س^٣ - س$ (د) س جا س

(١٨) فى Δ أ ب حـ إذا كان : حتا ب = $\frac{أَ}{٢ حَ}$ فإن : ....

(أ) أَ = بَ (ب) أَ = حَ (جـ) أَ = ٢ بَ (د) حَ = بَ

(١٩) نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{س^٢ + س - ٢}{س - ١}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) −٢ (د) ١

(٢٠) الدالة د (س) = (س + ١)^٣ + ٢ تزايدية فى ....

(أ)]−١ ، ∞[(ب)]− ∞ ، −١[(جـ) ح (د)]٢ ، ∞[

(٢١) نهـــا$_{س \leftarrow ∞}$ $\frac{٤}{س}$ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢٢) إذا كانت : د (س) = ٣^{س} فإن : د (س + ٣) = ...

(أ) ٣$^{س + ٣}$ (ب) ٣$^{س + ٤}$ (جـ) ٩$^{س + ٢}$ (د) ٩$^{س + ١}$

(٢٣) نهـــا$_{س \leftarrow ٣}$ (٣٥) = ...

(أ) ٣ (ب) ١٠٥ (جـ) $\frac{٣٥}{٣}$ (د) ٣٥

(٢٤) مجال الدالة لو$_{س - ١}$ (س + ٢) هو ....

(أ)]−٢ ، ∞[(ب)]١ ، ∞[− {٢}

(جـ)]−٢ ، ∞[− {١} (د) [١ ، ∞[

(٢٥) أكبر زاوية من زوايا Δ س ص ع الذى فيه : سَ = ٨ سم ، صَ = ١٣ سم ، عَ = ٧ سم قياسها ....°

(أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٥٠ (د) ١٢٠

(٢٦) منحنى الدالة د (س) = ٣$^{س + ٢}$ يمثلها بيانيًا منحنى يمر بالنقطة ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٠ ، ٣) (جـ) (٠ ، ٩) (د) (٩ ، ٠)

(٢٧) إذا كانت : ٥^{س} = ٧ فإن : س = ...

(أ) $\frac{لو ٥}{لو ٧}$ (ب) $\frac{لو ٧}{لو ٥}$ (جـ) ٧^{٥} (د) ٧$^{\frac{١}{٥}}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد النهاية الآتية : $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \frac{س^٤ - ١٦}{س^٢ - ٣ س + ٢}$

---

٢ ارسم الشكل البيانى للدالة :

د (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٢ ، ومن الرسم عين المجال والمدى والاطراد.



١١ محافظة بنى سويف — إدارة ببا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا}$ $س^{-٥}$ = ...

(أ) ∞ (ب) −٥ (جـ) ٥ (د) صفر

② $\frac{أ + ب}{س} = \frac{جـ}{جا جـ}$ فإن : س = ...

(أ) جا ب + جا جـ (ب) جا أ + جا ب (جـ) جا أ + جا جـ (د) جتا أ + جتا ب

③ إذا كان : س = ٥ هو حل للمعادلة لو (م س − ٣) = ٢ فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٢١ (د) $\frac{١٠٣}{٥}$

④ مدى الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٣ - س & ، -٢ \leq س < ٢ \\ س & ، ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$ هو ....

(أ) [١ ، ٥] (ب) [−٢ ، ٥] (جـ)]١ ، ٥] (د) [−٢ ، ٢]

⑤ $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} \sqrt{\frac{٤}{س} + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ∞

⑥ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^٢ - ٦ س + ٩} \leq ٤$ هى ....

(أ) [−١ ، ٧] (ب) [٠ ، ٤] (جـ) [٤ ، ∞[(د) [١ ، ٥]

⑦ $\lim_{س \to 2} \frac{س^3 - 8}{س^2 - 5س + 6} = ...$

(أ) ‎-١٢ (ب) ١٢ (جـ) ‎-٤ (د) ٤

⑧ $\lim_{س \to 2} \frac{س^2 + 3س - 10}{س - 2} = ...$

(أ) ٧ (ب) صفر (جـ) ٨ (د) ١

⑨ قيمة س التى تحقق المعادلة : لو س + لو ٥ = ١ هى ....

(أ) ٢ (ب) ١٠ (جـ) ١ (د) ٥٠

⑩ $\lim_{س \to 2} \frac{س^2 - 4}{س + 3} = ...$

(أ) ٨ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ∞

⑪ قيمة س التى تحقق المعادلة : $(5)^{س - 2} = (7)^{3س - 6}$ هى ....

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٦

⑫ س ص ع مثلث فيه : ق (∠ س) = ٧٠° ، ق (∠ ص) = ٦٠° ، س ص = ١٠ سم فإن : س ع = ... سم.

(أ) ١١,٣ (ب) ١٤,٣ (جـ) ١٧ (د) ١٨

⑬ $لو_ب أ \times لو_أ حـ \times لو_حـ ب = ...$

(أ) $\frac{أ}{ب}$ (ب) $\frac{حـ}{أ}$ (جـ) $\frac{ب}{حـ}$ (د) ١

⑭ قيم س التى تحقق المعادلة : $لو_س 36 = 2$ هى ....

(أ) ‎-٦ (ب) ٦ (جـ) ±٦ (د) ٣٦

⑮ إذا كانت : ٢ جا س = ٣ جا ص = ٤ جا ع فإن : سَ : صَ : عَ = ...

(أ) ٣ : ٤ : ٦ (ب) ٢ : ٣ : ٤ (جـ) ٦ : ٤ : ٣ (د) ٩ : ٣ : ٢

⑯ نقطة تماثل الدالة : د (س) = $(س - 3)^3 + 1$ هى ....

(أ) (٣ ، ١) (ب) (‎-٣ ، ١) (جـ) (‎-٣ ، ‎-١) (د) (٣ ، ‎-١)

⑰ مساحة سطح المثلث أ ب حـ الذى فيه : أَ = ٨ سم ، بَ = ٧ سم ، جتا حـ = $\frac{1}{2}$ يساوى ....

(أ) ١٤ (ب) $14\sqrt{3}$ (جـ) ٨ (د) $28\sqrt{3}$

(١٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س} = ...$

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ١

(١٩) إذا كان : $س^{س - ٢} = ٤^{س - ٢}$ فإن : مجموعة الحل = ...

(أ) {٤ ، ٢} (ب) {٢ ، ٤ ، -٤} (جـ) {٤} (د) {٢}

(٢٠) إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$ فإن حل المعادلة : د (٢ س) - ٥ د (س) + ٤ = ٠

هو ....

(أ) {٠ ، ٣} (ب) {٢ ، ٣} (جـ) {٠ ، ٢} (د) {٢ ، ٤}

(٢١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٧} - ١}{س - ١} = ...$

(أ) ٣٥ (ب) ٧ (جـ) ٤٢ (د) ١

(٢٢) أى من الدوال الاتية مجالها هو مداها ....

(أ) د (س) = ٥ (ب) د (س) = |س - ٣|

(جـ) د (س) = س + ١ (د) د (س) = $س^{٢}$ - ١

(٢٣) إذا كانت : د (س) = $س^{٢}$ يمكن رسم الداله ر (س) = $(س - ٢)^{٢}$ + ١ بإزاحة ٢ وحدة ، ١ وحدة طول على الترتيب فى إتجاهى .... على الترتيب.

(أ) $\overleftarrow{وس}$ ، $\overleftarrow{وص}$ (ب) $\overleftarrow{وس}$ ، $\overleftarrow{وص}$

(جـ) $\overleftarrow{وس}$ ، $\overleftarrow{وص}$ (د) $\overleftarrow{وس}$ ، $\overleftarrow{وص}$

(٢٤) إذا كان : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{ن} - ٦٤}{س^{٣} - ٨} = ١٦$ فإن : قيمة ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٦

(٢٥) د (س) = $(أ - ٤)^{س}$ دالة اسية إذا كانت أ ∈ ....

(أ) ح - {-٤} (ب) ح - {٣}

(جـ) ح - {٤} (د)]٤ ، ∞[- {٥}

(٢٦) محيط الدائرة المارة برؤوس مثلث متساوى الاضلاع طول ضلعه ١٢ سم يساوى .... سم.

(أ) $١٢\sqrt{٣}\pi$ (ب) $٨\sqrt{٣}\pi$ (جـ) ٢٤π (د) ١٤٤π

(٢٧) إذا كان : Δ س ص ع فيه : ٣ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع

فإن : ق (∠ س) ≃ ....°

(أ) ٣٦ (ب) ٧١ (جـ) ٦٣ (د) ٨٠

ثانيًا **الأسئلة المقالية**

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد : نهـا س ← ٦ $\frac{\text{س}^2 - 36}{\text{س}^2 - 5\text{س} - 6}$

---

٢ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = $(\text{س} - 2)^2 + 3$

ومن الرسم أوجد مداها واطرادها.

١٢ محافظة المنيا

إدارة ملوى



أولًا **أسئلة الاختيار من متعدد**

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt[3]{\text{س} - 7}$ هو ....

(أ) [٧ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٧] (جـ) ح (د) ح$^+$

(٢) منحنى ر (س) = $\text{س}^2 + 5$ هو نفس منحنى د (س) = س^2 بإزاحة مقدارها ٥ وحدات في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{و س}'}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{و ص}}$ (د) $\overleftarrow{\text{و ص}'}$

(٣) مدى الدالة د : د (س) = $(\text{س} - 5)^2 + 4$ هو ....

(أ)]-∞ ، ٥] (ب) [-٥ ، ٤[(جـ) [٤ ، ∞[(د)]-∞ ، ٤]

(٤) إذا كانت د دالة فردية حيث : أ ∈ مجال د فإن : د (أ) + د (- أ) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ د (أ) (جـ) ٢ أ (د) د (أ)

(٥) مجموعة حل المعادلة : |س − ٣| = ٣ هى ....

(أ) {٦ ، ٠} (ب) {٦} (جـ) {٠} (د) {±٣}

(٦) إذا كان : $٣^{س} = ٢$ ، $٢^{ص} = ٩$ فإن : س ص = ...

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ٣ (د) ١٨

(٧) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة : $س^{٤} = -٨١$ هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٨) إذا مر منحنى الدالة د : د (س) = $أ^{س}$ بالنقطة (١ ، ٣) فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٣

(٩) منحنى الدالة د : د (س) = $٢^{س}$ هو صورة منحنى الدالة ر : ر (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ بالانعكاس فى المستقيم ....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = ٣ س

(١٠) مجموعة حل المعادلة : لو (س − ١) = صفر هى ....

(أ) $\left\{\frac{١}{١٠}\right\}$ (ب) {١} (جـ) {٢} (د) {−١}

(١١) إذا كان : $لو_{٢}$ س = ٣ فإن : $لو_{٨}$ س = ...

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ١

(١٢) إذا كان : لو ٢٣ = أ فإن : لو ٢٣٠٠ = ...

(أ) أ + ٢ (ب) أ − ٢ (جـ) ١٠٠ أ (د) $أ^{٢}$

(١٣) مجموعة حل المعادلة : $لو_{س}$ ٨١ = ٤ هى ....

(أ) {−٣} (ب) {٣} (جـ) {±٣} (د) Ø

(١٤) $\lim_{س \to \frac{١}{٢}}$ ٣٠ = ...

(أ) ١٥ (ب) ٦٠ (جـ) ٣٠ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٥) $\lim\limits_{س \to -٣} \frac{١}{|س|} = ...$

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) ١ (د) −١

(١٦) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظا س}{س}$ تساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{٤}{\pi}$ (د) ليس لها وجود

(١٧) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^{٨} - ١}{س}$ تساوى ....

(أ) ٨ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ٩

(١٨) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س^{٢}}}{س}$ تساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) −١

(١٩) إذا كان : أ > ب فإن : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^{أ}}{س^{ب}} = ...$

(أ) صفر (ب) ∞ (جـ) ١ (د) أ − ب

(٢٠) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س^{٢} - س}{س}$ تساوى ....

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) غير موجودة

(٢١) $\lim\limits_{س \to -١} \frac{س^{٧} + ١}{س + ١}$ تساوى ....

(أ) ٧ (ب) ٦ (جـ) −٧ (د) −٦

(٢٢) Δ أ ب حـ فيه : $\frac{ب}{جا ب} = ٨$ فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... وحدة طول.

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٢

(٢٣) دائرة طول قطرها ١٠ سم تمر برؤوس Δ أ ب حـ حاد الزوايا فيه : ب حـ = ٥ سم
فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) $٣٠°$ (ب) $٦٠°$ (جـ) $٤٥°$ (د) $١٥٠°$

(٢٤) فى Δ أ ب حـ إذا كان : $\frac{جا أ}{٤} = \frac{جا ب}{٩} = \frac{جا حـ}{٧}$ فإن أكبر زاوية قياسا تكون ....

(أ) ∠ أ (ب) ∠ ب (جـ) ∠ حـ (د) قائمة

(٢٥) فى Δ أ ب حـ يكون : $\frac{أ^{٢} + ب^{٢} - حـ^{٢}}{٢ أ ب} = ...$

(أ) جتا أ (ب) جتا حـ (جـ) جتا ب (د) جا أ

(٢٦) فى Δ أ ب ح إذا كان : ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = ١٢٠° ، أَ = ٢ سم ، بَ = ٣ سم

فإن : حَ = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\sqrt{7}$ (د) $\sqrt{5}$

(٢٧) فى أى مثلث س ص ع يكون : س ص : ص ع = ...

(أ) حا س : حا ص (ب) حا ص : حا ع (جـ) حا ع : حا س (د) حا ع : حا ص

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد مجموعة الحل جبريًا : |٢ س − ٣| ≤ ٧

٢ أوجد :

نهـا (س ← ٢) $\frac{س^5 - 32}{س^2 - 4}$



١٣ محافظة أسيوط

إدارة أبنوب

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) Δ س ص ع فيه : سَ = ٥ سم ، صَ = ٧ سم ، ق (∠ ع) = ٦٥°

فإن : عَ ≃ .... سم.

(أ) ٧,٦ (ب) ٦,٧ (جـ) ٧,٨ (د) ٨,٧

(٢) المثلث أ ب حـ فيه : ق (∠ أ) = ١١٢° ، ق (∠ ب) = ٣٣° ، حَ = ١٩ سم.

فإن : مساحة Δ أ ب حـ لأقرب $سم^2$ هى ....

(أ) ٦٤ (ب) ١٢٨ (جـ) ١٥٩ (د) ١٨٥

(٣) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه : ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

④ اذا كان : ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا حـ فإن : أ : ب : حـ = ...

(أ) ٦ : ٤ : ٣ (ب) ٤ : ٣ : ٦ (جـ) ٦ : ٣ : ٤ (د) ٣ : ٤ : ٢

⑤ مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ المتساوى الاضلاع الذى طول ضلعه ٩ سم = ... سم^{٢}.

(أ) ٩ π (ب) ١٨ π (جـ) ٢٧ π (د) ٨١ π

⑥ دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم تمر برؤوس Δ أ ب حـ حاد الزوايا فيه : ب حـ = ١٠ سم فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٥٠°

⑦ نهـــا (س ← ٥) $\frac{س^{٢} - ٨ س + ١٥}{س^{٢} - ١٠ س + ٢٥}$ = ...

(أ) غير موجودة (ب) $\frac{٢٠}{٣}$ (جـ) ٢ (د) ٣

⑧ إذا كان : نهـــا (س ← أ) $\frac{٢ أ س}{٥}$ = ٤٠ فإن : أ = ...

(أ) ±١٠ (ب) ±٤٠ (جـ) ±٥٠ (د) $\frac{٢}{٥}$

⑨ نهـــا (س ← ∞) $\frac{٥ س^{٣} + ٢ س + ٧}{٦ س^{٣} + ٣ س + ٣}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) ٥ (د) ∞

⑩ نهـــا (س ← $\frac{\pi}{٦}$) $\frac{جا س}{س}$ = ...

(أ) $\frac{٦}{\pi}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{٣}{\pi}$

⑪ نهـــا (س ← ٠) $\frac{(٢ س + ١)^{٢} - ١}{س}$ = ...

(أ) -٤ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ٤

⑫ نهـــا (س ← ٢) $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

⑬ نهـــا (س ← ∞) (٢ + ٣ س^{٣} - ٧ س^{٤}) = ...

(أ) - ∞ (ب) -٧ (جـ) ٣ (د) ∞

(١٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{٦ - س}$ = ...

(أ) $\frac{-١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) صفر (د) غير موجودة

(١٥) مجموعة حل المتباينة : |س − ٣| ≤ ٥ هى ....

(أ) [−٢ ، ٨] (ب) ح −]−٢ ، ٨[(جـ)]−٢ ، ٨[(د) ح − [−٢ ، ٨]

(١٦) مجموعة حل المعادلة : لو$_٢$ س = −١ هى ....

(أ) ∅ (ب) $\{\frac{١}{٢}\}$ (جـ) $\{\frac{-١}{٢} ، \frac{١}{٢}\}$ (د) {٢}

(١٧) منحنى الدالة : ص = لو$_٥$ (س − ٢) يقطع محور السينات فى النقطة = ...

(أ) (٥ ، ٠) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٧ ، ٠) (د) (٣ ، ٠)

(١٨) إذا كان : $٥^{س + ٢} = ٣^{س + ٢}$ فإن : قيمة س = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) −٢

(١٩) كل الدوال المعرفة بالقواعد الآتية زوجية ما عدا د (س) = ...

(أ) س جا س (ب) |س| (جـ) $س^٢$ (د) س جتا س

(٢٠) إذا كان : س = لو ٤ ، ص = لو ٦ فإن : لو ٢٤ = ...

(أ) س × ص (ب) س + ص (جـ) س − ص (د) س ÷ ص

(٢١) إذا كان : د (س) = ٣ فإن مجال الدالة هو ....

(أ) ح (ب) $ح^+$ (جـ) {٣} (د) ح − {٣}

(٢٢) معادلة محور تماثل الدالة : د (س) = $(س − ٣)^٢$ + ١ هى ....

(أ) س = −١ (ب) س = ١ (جـ) س = −٣ (د) س = ٣

(٢٣) إذا كانت : د دالة فردية على [−س ، س] فإن : د (−س) + د (س) = ...

(أ) −٢ س (ب) صفر (جـ) ٢ س (د) غير معرفة

(٢٤) لو$_٢$ ٣ × لو$_٧$ ٥ × لو$_٣$ ٤ × لو$_٥$ ٧ = ...

(أ) ٤ (ب) لو ٢ (جـ) ٢ (د) ١

(٢٥) تكون الدالة الاسية : د (س) = $أ^س$ تناقصية إذا كان ....

(أ) أ > ١ (ب) أ < ١ (جـ) صفر < أ < ١ (د) أ < صفر

(٢٦) إذا كان : د (س) = $٣^{س}$ ، فإن مجموعة الحل التي تحقق :
د (س − ٢) + د (س − ١) = ٣٦ هى ....

(أ) {٩} (ب) {٤} (جـ) {٣} (د) {٢}

(٢٧) إذا كان : $س^{\frac{٣}{٢}}$ = ٨ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ±٤ (جـ) ±٨ (د) ١٦

ثانيًا | الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = |س + ٢| + ١ وعين مداها ثم حل المعادلة د (س) = صفر

---

٢ **أوجد قيمة :**

$$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣}$$



١٤ محافظة سوهاج | إدارة البلينا

أولًا | أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س + ١ & ، \quad -٢ \le س \le ٣ \\ ٢ - س & ، \quad ٣ < س \le ٥ \end{cases}$ هو ....

(أ) ح − {٣} (ب) [−٢ ، ٥] (جـ)]−٢ ، ٥[(د) ح − {−٢ ، ٥}

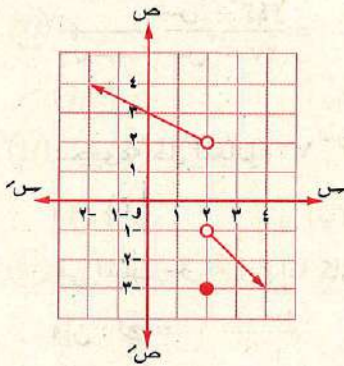
(٢) فى المثلث أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ق (∠ ب) = ٨٠° ، أَ = ١٥ سم
فإن : حـَ ≈ .... سم. (لاقرب سنتيمتر)

(أ) ١١ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٩

(٣) إذا كانت : د (س) = ٣ $س^{٣}$ + ٢ س + ك دالة فردية فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

④ $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...



(أ) ٣-

(ب) ٢

(جـ) ١-

(د) غير موجودة

⑤ إذا كان المثلث ء هـ و حاد الزوايا وكان : $\sqrt{٢}$ ءَ = $\frac{هـَ}{جا هـ}$ فإن : ق (∠ ء) = ...

(أ) °٣٠ (ب) °٤٥ (جـ) °٦٠ (د) °٧٥

⑥ مجموعة حل المعادلة : $\frac{١}{|س - ٢|} = \frac{١}{٣}$ هى .... حيث س ≠ ٢

(أ) {-١} (ب) {-١ ، ٥} (جـ) {٥} (د) ∅

⑦ فى المثلث أ ب حـ إذا كان : أَ = ٦ سم ، بَ = ١٠ سم ، ق (∠ حـ) = °١٢٠

فإن : حـَ = ...

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ١٠

⑧ محور تماثل الدالة : د (س) = $س^٢$ - ٢ هو المستقيم ....

(أ) س = ٢ (ب) س = صفر (جـ) ص = صفر (د) ص = ٢

⑨ $\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{١}{٣}$

⑩ مجموعة حل المتباينة : |س - ٣| + |٦ - ٢ س| ≥ ٩ فى ح هى ....

(أ) [٠ ، ٦] (ب) ح -]٠ ، ٦[(جـ) ح - [٠ ، ٦] (د)]٠ ، ٦[

⑪ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٣ س - ٤}{س - ١}$ = ...

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) غير معرفه

⑫ إذا كانت : $٢^{س} = ٣$ فإن : $٨^{س}$ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٧ (جـ) ٩ (د) ٢٤

(١٣) نهـــا$_{س \to ٣}$ $\frac{س^٥ - ٢٤٣}{س^٣ - ٢٧}$ = ...

(أ) ٩ (ب) ١٥ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) ٤٥

(١٤) مجموعة حل المعادلة : $٧^{س^٢ - ٤} = ٥^{س^٢ - ٤}$ هى : ....

(أ) {٢} (ب) {-٢} (جـ) {٢ ، -٢} (د) {٠}

(١٥) فى المثلث س ص ع إذا كان : ق (∠ ع) = ٣٠° وكان : $سَ^٢ + صَ^٢ - عَ^٢$ = ك سَ صَ

فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) -$\sqrt{٣}$ (د) $\sqrt{٣}$

(١٦) الدالة : د (س) = $(٣ أ)^{س}$ تكون تناقصية إذا كانت ....

(أ) أ > ١ (ب) ٠ < أ < $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ > $\frac{١}{٣}$

(١٧) إذا كانت : د (س) = $٣^{س - ١}$ وكانت النقطة (ك ، $\frac{١}{٩}$) ∈ بيان الدالة

فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) -٢ (د) -١

(١٨) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٧ سم ، ب = ١٠ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠°

هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى

(١٩) إذا كان : لو$_{س}$ (٢ س + ٨) = ٢ فإن : س ∈ ....

(أ) {٤} (ب) {-٢} (جـ) {-٢ ، ٤} (د) ∅

(٢٠) منحنى الدالة : د (س) = لو$_{٥}$ (٢ س - ٣) يقطع محور السينات فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٥ ، ٣) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (١ ، ١)

(٢١) نهـــا$_{س \to ٣}$ $\frac{\sqrt[٣]{س + ٥} - ٢}{س - ٣}$ = ...

(أ) $\frac{١}{١٢}$ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) ١

(٢٢) عند حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٦ سم ، حـ = ٧ سم

فإن : جتا حـ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٢}}{٣}$ (د) $\frac{١}{٥}$

(٢٣) إذا كان : $لو_{م} ٤ = لو_{٣} س$ فإن : س = ...

(أ) -٢ (ب) صفر (جـ) -٢ ، ٢ (د) ٢

(٢٤) $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{٥ س^٢ + ٣ س + ٤}{س^٢ + ٢ س + ١} = ...$

(أ) ٤ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٥ (د) ١

(٢٥) قيمة المقدار : لو ٣٥ – ٢ لو ٧ + لو ١٧٥ + لو ٨ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) -٣ (د) ٣

(٢٦) $\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{س^٣ + ٢^٣}{س + ٢} = ...$

(أ) ١ (ب) غير معرفه (جـ) ٤ (د) ١٢

(٢٧) إذا كانت : $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{أ س + ٥}{٣ س - ٤} = ٢$ فإن = ... حيث : $أ \in ح$

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ٦

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد : $\underset{س \to -٢}{نهـا} \frac{س^٤ + س^٣ + ٢ س - ٤}{س^٢ + ٢ س}$

---

٢ ارسم منحنى الدالة الاتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها وحدد نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

$$د(س) = \begin{cases} ٢ & ، س \geq ٠ \\ س^٢ + ٢ & ، س < ٠ \end{cases}$$



١٥ محافظة قنا إدارة نجع حمادى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة الزوجية من الدوال الاتية هى ....

(أ) د (س) = س جا س (ب) د (س) = جا س

(جـ) د (س) = س + جا س (د) د (س) = $\frac{س}{جتا س}$

(٢) مجال الدالة : د (س) = $\frac{٥ س + ٣}{س^٢ - ٩}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح - {٣}

(جـ) ح - {٣ ، -٣} (د) ح - [-٣ ، ٣]

(٣) إذا كان : $٣^{س - ١} = ٥^{س - ١}$ فإن : $٢^{س + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) -١ (د) ٢

(٤) فى المثلث س ص ع إذا كان : ٤ حا س = ٢ حا ص = ٣ حا ع

فإن : سَ : صَ : عَ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٣ : ٦ : ٤ (جـ) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٤ : ٣ : ٦

(٥) أى من الدوال الاتية تمثل دالة نمو اسى ....

(أ) د (س) = $٢^{-س}$ (ب) د (س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

(جـ) د (س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$ (د) د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-س}$

(٦) مجموعة حل المتباينة : | ٢ س - ٥ | < ٧ فى ح هى ....

(أ) [-١ ، ٦] (ب)]-١ ، ٦[(جـ) [-١ ، ٦[(د)]-٦ ، ١]

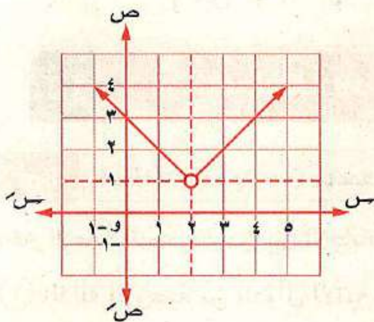
(٧) إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$ وكان : د (م - ١) = ٨ فإن : م = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ١

(٨) $لو_{أ ب جـ} أ + لو_{أ ب جـ} ب + لو_{أ ب جـ} جـ$ = ...

(أ) جـ (ب) ب (جـ) أ (د) ١

(٩) فى الشكل المقابل :



$\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...

(أ) ١

(ب) -١

(جـ) ٢

(د) غير موجودة

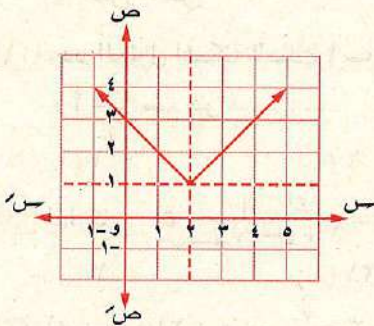
(١٠) إذا كان : د (س) = ٥ فإن : $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) -٥ (د) غير موجودة

(١١) إذا كان : $لو_{٣}$ س = $لو_{٩}$ ٢٥ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) $\frac{٢٥}{٣}$

(١٢) الدالة التى تمثل الشكل المقابل هى ....



(أ) د (س) = - | س + ٢ | + ١

(ب) د (س) = - | س - ٢ | + ١

(جـ) د (س) = | س - ٢ | - ١

(د) د (س) = | س - ٢ | + ١

(١٣) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{٢س^{٢} + ٣س}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

(١٤) $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{٣س^{٢} + ٢س + ١}{س^{٢} - ٣س + ٢}$ = ...

(أ) ٩ (ب) ٢٧ (جـ) ٨١ (د) ٣

(١٥) $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٣} - ٨}$ = ...

(أ) ٤ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) $\frac{٢٠}{٣}$

(١٦) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا}$ (٤ جتا ٢ س - ١) = ...

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ١-

(١٧) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع الذى فيه : سَ = ١٨ جا س يساوى .... سم.

(أ) ٥ (ب) ٩ (جـ) ١٨ (د) ٣٦

(١٨) ا ب حـ مثلث فيه : بَ = ٨ سم ، حـَ = ٦ سم ، جتا (حـ + ب) = $\frac{١}{١٢}$

فإن : اَ = ... سم.

(أ) ٢ $\sqrt{٦}$ (ب) ٦ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٦ $\sqrt{٣}$ (د) ٣ $\sqrt{٦}$

(١٩) إذا كان : د (س) = $٣^{س}$ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س + ١) - د (س - ١) = ٧٢ هى ....

(أ) {٩} (ب) {٣} (جـ) {٤} (د) {٢}

(٢٠) اذا كان : لو ٣ = س ، لو ٧ = ص فإن : لو ٢١ = ...

(أ) س ص (ب) س + ص

(جـ) س – ص (د) لو س + لو ص

(٢١) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠حـ) = ١١٥° ، حـَ = ١٢ سم ، أَ = ٩ سم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(٢٢) إذا كان : نهـــا $_{س \leftarrow ١}$ $\frac{ك}{س + ٢}$ = ٧ فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٢١ (جـ) ٩ (د) –٢

(٢٣) نهـــا $_{س \leftarrow \infty}$ $(٣ + ٥ س^{-٣} + ٣ س^{-٢})$ = ...

(أ) ٣ (ب) غير موجودة (جـ) ∞ (د) ١١

(٢٤) مجموعة حل المعادلة : $(لو_٥ س)^٢ - ٣ (لو_٥ س) + ٢ = ٠$ فى ح هى ....

(أ) {٢٥ ، ١٢٥} (ب) {٢٥ ، ٥}

(جـ) {٥ ، –٢٥} (د) {١٢٥ ، ٦٢٥}

(٢٥) ل م ن مثلث فيه : لَ = ٥ سم ، مَ = ٧ سم ، ق (∠ن) = ٦٠° فإن : نَ ≃ ....

(أ) ٦,٢ سم (ب) ٥ سم (جـ) ٣,٤ سم (د) ٥,٣ سم

(٢٦) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى اطوال اضلاعه : ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم = ...

(أ) ١١٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ١٠٠° (د) ١٢٠°

(٢٧) نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = $(س - ١)^٢ + ٢$ هى ....

(أ) (٢ ، –١) (ب) (١ ، –٢) (جـ) (١ ، ٢) (د) (–٢ ، –١)

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = $(س - ٣)^٣ + ١$

وحدد المجال والمدى الاطراد ونوع الدالة.

---

٢ أوجد قيمة ما يأتى : نهـــا $_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س^٢ - ٢ س}$



الإجابات

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الجبر

الاختبار الأول

١ ① (أ) ② (د) ③ (د) ④ (أ)

٢
① تزايدية فى]٠ ، ٢[وثابتة فى]٢ ، ∞[
② تزايدية فى]−١ ، ٠[وتناقصية فى]٠ ، ٤[
③ تناقصية فى]− ∞ ، ١[وتزايدية فى]١ ، ∞[

الاختبار الثانى

١ ① (ب) ② (جـ) ③ (ب) ④ (د)

٢
① الدالة زوجية.
② الدالة فردية.
③ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

الاختبار الثالث

١
مثل بنفسك ، المدى = [٠ ، ∞[
، نوعها ليست زوجية وليست فردية
، الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[

٢
مثل بنفسك ، المدى = [٠ ، ٢]
، الدالة تناقصية فى]−٢ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ٢[

٣
مثل بنفسك ، المدى =]١ ، ٣[∪ {−١}

الاختبار الرابع

١ ① (د) ② (د) ③ (ب) ④ (جـ)

٢
مثل بنفسك ، المجال = ح ، المدى = ح ، الدالة تزايدية على ح ونوعها ليست زوجية وليست فردية.

الاختبار الخامس

١ ① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (د)

٢
مجموعة الحل = {−٧ ، ٩}

٣
① ص = |س + ٣| + ٢ ② (−٣ ، ٢)
③ المدى = [٢ ، ∞[، الاطراد : تناقصية فى]−∞ ، −٣[وتزايدية فى]−٣ ، ∞[
④ معادلة محور التماثل : س = −٣

الاختبار السادس

١ ① (أ) ② (أ) ③ (جـ) ④ (أ)

٢
① مجموعة الحل = $\left\{ ٤ ، \frac{٢}{٣} \right\}$
② مجموعة الحل = $\left[-١ ، \frac{٧}{٣} \right]$

٣
مثل بنفسك ، المدى = [٠ ، ∞[
، الاطراد : تناقصية فى]− ∞ ، ٣[
وتزايدية فى]٣ ، ∞[
، النوع : ليست زوجية وليست فردية.

الاختبار السابع

١ ① (ب) ② (د) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (د) ⑥ (أ)

٢
① مجموعة الحل = {١٥}
② مجموعة الحل = {٠ ، ٢}

الاختبار الثامن

١ ① (جـ) ② (ب) ③ (جـ) ④ (جـ)

٢
ارسم بنفسك ، مساحة المثلث = وحدة مربعة

٣
السعر بعد ثلاث سنوات = ١٠٩٢,٧٢٧ جنيه

الاختبار التاسع

١ ① (جـ) ② (ب) ③ (د) ④ (جـ)

٢
الدالة زوجية ، مجموعة الحل = {−١ ، ١}

٣
س = $-\frac{١}{٢}$

الاختبار العاشر

١ ① (أ) ② (جـ) ③ (د) ④ (أ)

٢
① مجموعة الحل = {٢}
② مجموعة الحل = {١,٣٢}
③ مجموعة الحل = {١}
④ مجموعة الحل = [−٢ ، ٥]

٣
ارسم بنفسك ، مدى الدالة =]٢ ، ∞[
، أثبت بنفسك.

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى التفاضل

الاختبار الأول

١ (١) صفر (٢) ٢ (٣) ٣ (٤) ٢

٢ (١) (د) (٢) (د) (٣) (جـ)

الاختبار الثانى

١ (١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (د)

٢ (١) $-\frac{1}{4}$ (٢) $\frac{1}{4}$

٣ أ = ١٢

الاختبار الثالث

١ (١) (جـ) (٢) (د) (٣) (د) (٤) (أ)

٢ (١) $\frac{1}{2}$ (٢) ٢٠ (٣) ٥ (٤) ٤

الاختبار الرابع

١ (١) (ب) (٢) (ب) (٣) (د) (٤) (جـ)

٢ (١) $\frac{2}{3}$ (٢) ٨٠ (٣) $\frac{5}{4}$ (٤) ٥

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى حساب المثلثات

الاختبار الأول

١ (١) (د) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (أ)

٢ أ = ٨ سم ، بـ = ١٨ سم

٣ أب = ٨ $\sqrt{2}$ سم ، أجـ = ١٥,٤٥ سم

الاختبار الثانى

١ (١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (أ)

٢ ق(∠أ) = ١٢٠°

٣ محيط متوازى الأضلاع = ٢٥ سم

الاختبار الثالث

١ (١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (د) (٤) (د)

٢ ق(∠أ) = ٧٠° ، بـ ≃ ١٩,٦٨ سم ،
جـ ≃ ١٤,٣٥ سم

٣ أثبت بنفسك.

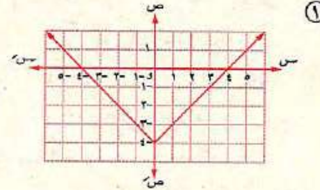
إجابات اختبارات شهر أكتوبر

اختبار ١

١ (١) (د) (٢) (أ) (٣) (جـ) (٤) (ب)
(٥) (د) (٦) (جـ) (٧) (ب) (٨) (ب)
(٩) (أ) (١٠) (د) (١١) (جـ) (١٢) (جـ)

٢

(١)



* المدى = [-٤ ، ∞[
* الدالة زوجية
* متناقصة فى]-∞ ، ٠]
ومتزايدة فى [٠ ، ∞[

(٢) بوضع ٢ - س > ٠
∴ س < ٢
∴ س ∈]-∞ ، ٢[
∴ مجال د =]-∞ ، ٢[

(٣) $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\sqrt{4\text{س}-3}-1}{\text{س}-1} \times \frac{\sqrt{4\text{س}-3}+1}{\sqrt{4\text{س}-3}+1}$

$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{4\text{س}-3-1}{(\text{س}-1)(\sqrt{4\text{س}-3}+1)}$

$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{4(\text{س}-1)}{(\text{س}-1)(\sqrt{4\text{س}-3}+1)}$

$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{4}{\sqrt{4\text{س}-3}+1} = \frac{4}{1+1} = 2$

(٤) ∵ ق(∠أ) = ١٨٠° - (٣٥° + ٧٠°) = ٧٥°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا}\,75^\circ} = \frac{\text{ب}}{\text{جا}\,35^\circ} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا}\,70^\circ} = 32$

∴ أ = ٣٢ جا ٧٥° ≃ ٣٠,٩ سم
، ب = ٣٢ جا ٣٥° ≃ ١٨,٤ سم
، جـ = ٣٢ جا ٧٠° ≃ ٣٠ سم

∴ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × ٣٠,٩ × ١٨,٤ × جا ٧٠°
≃ ٢٦٧ سم²

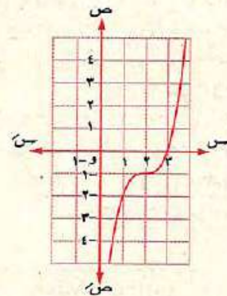
، محيط المثلث = ٣٠,٩ + ١٨,٤ + ٣٠ ≃ ٧٩ سم

اختبار ٢

١ (١) (د) (٢) (أ) (٣) (د) (٤) (جـ)
(٥) (ب) (٦) (ب) (٧) (أ) (٨) (جـ)
(٩) (أ) (١٠) (ب) (١١) (جـ) (١٢) (د)

٢

(١)



* المدى = ح   * تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية ولا فردية.

(٢) ∵ $\text{د}_1(-\text{س}) = (-\text{س})^5$
$= -\text{س}^5 = -\text{د}_1(\text{س})$

$\therefore$ د$_1$ دالة فردية

، $\because$ $\text{د}_2(-\text{س}) = \text{جا}(-\text{س}) = -\text{جا}\,\text{س}$

$= -\text{د}_2(\text{س})$

$\therefore$ د$_2$ دالة فردية $\qquad$ $\therefore$ د$_1$ + د$_2$ دالة فردية

③ $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \dfrac{\text{س} + 1}{\sqrt{\text{س} + 5} - 2}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to -1} \dfrac{\text{س} + 1}{\sqrt{\text{س} + 5} - 2} \times \dfrac{\sqrt{\text{س} + 5} + 2}{\sqrt{\text{س} + 5} + 2}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to -1} \dfrac{(\text{س} + 1)(\sqrt{\text{س} + 5} + 2)}{\text{س} + 5 - 4}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to -1} (\sqrt{\text{س} + 5} + 2) = 4$

④ $\because$ $\text{ق}(\angle \text{ب}) = 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ) = 60^\circ$

$\therefore$ $\angle$ حـ أكبر الزوايا قياسًا

$\therefore$ حَ طول أكبر الأضلاع

$\therefore \dfrac{\text{حَ}}{\text{جا } 80^\circ} = \dfrac{10}{\text{جا } 60^\circ}$

$\therefore \text{حَ} = \dfrac{10 \text{ جا } 80^\circ}{\text{جا } 60^\circ} \simeq 11$ سم

إجابات اختبارات شهر نوفمبر

اختبار ١

١

① (د)	② (د)	③ (أ)	④ (ب)
⑤ (جـ)	⑥ (جـ)	⑦ (د)	⑧ (ب)
⑨ (أ)	⑩ (د)	⑪ (د)	⑫ (د)

٢

① $\because \sqrt{4\text{س}^2 - 12\text{س} + 9} \le 9$

$\therefore \sqrt{(2\text{س} - 3)^2} \le 9$

$\therefore |2\text{س} - 3| \le 9$

$\therefore -9 \le 2\text{س} - 3 \le 9$

$\therefore -6 \le 2\text{س} \le 12$

$\therefore -3 \le \text{س} \le 6$

$\therefore$ مجموعة الحل $= [-3 ، 6]$

② الطرف الأيمن $= \dfrac{2^{\text{س}} \times 3^{2\text{س}+2}}{2 \times 2^{\text{س}} \times 3^{2\text{س}}}$

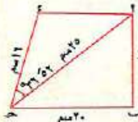
$= 3^{2\text{س}+2-1-2\text{س}} \times 2^{\text{س}-\text{س}}$

$= 3^1 \times 2^{\text{صفر}} = 3$

③ $\because (\text{أ}\text{ء})^2 = (25)^2 + (16)^2 - 2 \times 25$

$\times 16$ جتا $52^\circ\, 36'$

$\therefore$ أء = ١٦ سم



، $\because$ في Δ أ ب حـ

$\therefore (25)^2 = (15)^2 + (20)^2$

$\therefore \text{ق}(\angle \text{ب}) = 90^\circ$

$\therefore$ مساحة الشكل الرباعي أ ب حـ ء

= مساحة Δ أ ب حـ + مساحة Δ أ حـ ء

$= \frac{1}{2} \times 20 \times 15 + \frac{1}{2} \times 25 \times 16 \times$ جا $52^\circ\, 36'$

$= 270$ سم^2

④ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{س}^2 - 5\text{س}}{\sqrt{\text{س} + 4} - 2} \times \dfrac{\sqrt{\text{س} + 4} + 2}{\sqrt{\text{س} + 4} + 2}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{س}(\text{س} - 5)(\sqrt{\text{س} + 4} + 2)}{(\text{س} - 5)} = 20$

اختبار ٢

١

① (جـ)	② (أ)	③ (د)	④ (جـ)
⑤ (أ)	⑥ (ب)	⑦ (أ)	⑧ (أ)
⑨ (أ)	⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (ب)

٢

① $\because \sqrt{\text{س}^2 - 2\text{س} + 1} \ge 4$

$\therefore \sqrt{(\text{س} - 1)^2} \ge 4 \qquad \therefore |\text{س} - 1| \ge 4$

$\therefore \text{س} - 1 \ge 4 \qquad \therefore \text{س} \ge 5$

أ، $\text{س} - 1 \le -4 \qquad \therefore \text{س} \le -3$

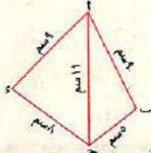
$\therefore$ م.ح $=$ ح $- \,]-3 ، 5[$

② $\because (\text{س} - 5)^{\frac{5}{2}} = 32$

$\therefore \text{س} - 5 = (32)^{\frac{2}{5}} \qquad \therefore \text{س} - 5 = 4$

$\therefore \text{س} = 9 \qquad \therefore$ م.ح $= \{9\}$

③



في Δ أ ب حـ:

$\text{جتا ب} = \dfrac{(9)^2 + (5)^2 - (11)^2}{2 \times 9 \times 5} = -\dfrac{1}{6}$

، في Δ أ ء حـ: $\text{جتا ء} = \dfrac{(9)^2 + (8)^2 - (11)^2}{2 \times 9 \times 8} = \dfrac{1}{6}$

$\therefore$ جتا ب + جتا ء = ٠

$\therefore \text{ق}(\angle \text{ب}) + \text{ق}(\angle \text{ء}) = 180^\circ$

$\therefore$ الشكل رباعي دائري.

④ $\lim\limits_{(\text{س}+2) \to 2} \dfrac{(\text{س} + 2)^4 - (2)^4}{(\text{س} + 2) - (2)}$

$= \frac{4}{1}(2)^3 = 32$

إجابات نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الجبر

النموذج الأول

١

① (ب) ② (ب) ③ (أ) ④ (جـ)

٢

(أ) * المجال = ح − {٠}

* نقطة التماثل هى : (٠ ، ٠)

* م . ح = {٤}

(ب) ارسم بنفسك.

* المدى = [−٢ ، ٢٥]

* الدالة تناقصية فى]−٥ ، ٠[،]٢ ، ٨[

، تزايدية فى]٠ ، ٢[

٣

(أ) ارسم بنفسك.

* المدى = [٠ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٣[

، تزايدية فى]٣ ، ∞[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

(ب) ① م . ح = ح −]−٢ ، ٨[

② م . ح = {٣}

٤

(أ) ① م . ح = {٢٠} ② م . ح = {١}

(ب) ① $\frac{١}{٨}$ ② ١

٥

(أ) ١

(ب) ① فردية ② ليست فردية وليست زوجية.

النموذج الثانى

١

① (أ) ② (جـ) ③ (ب) ④ (أ)

٢

(أ) أثبت بنفسك.

(ب) ارسم بنفسك.

٣

(أ) ① م . ح = {١} ② م . ح = {٢}

(ب) ① م . ح = {١} ② أثبت بنفسك.

٤

(أ) م . ح =]−١ ، ١[

(ب) ارسم بنفسك.

* المجال = ح − {٠}

* المدى = ح − {−١}

* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

٥

(أ) ارسم بنفسك ، المدى = [٠ ، ٣] ، الدالة تزايدية فى]−١ ، ٢[وتناقصية فى]٢ ، ٥[والدالة ليست زوجية أو فردية.

(ب) ① م . ح = {٤} ② م . ح = {−٢}

إجابات نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى التفاضل وحساب المثلثات

النموذج الأول

١

① (جـ) ② (جـ) ③ (د) ④ (أ)

٢

(أ) ① ٥ ② صفر

(ب) ق (د حـ) = ١٠٤° ٢٨َ ٤٩ً

٣

(أ) ① −٣ ② $\frac{١}{٤}$

(ب) المحيط = ١٩,٩٨ سم

٤

(أ) ① صفر ② ٨

(ب) ① طول القطر = ٢١,٧٤ سم

② طول القطر = ٤٢,٧٨ سم

٥

(أ) ① −١ ② ٢

(ب) حـَ = ٦,٤٤ سم

، مساحة الدائرة = ٦٥,٢ سم^{٢}

النموذج الثانى

١

① (جـ) ② (د) ③ (ب) ④ (د)

٢

(أ) ① ٨٠ ② −٤

(ب) أ حـ = ٦,٥٨ سم

، ب د = ١٢,٧ سم

٣

(أ) ① $\frac{٩}{٢}$ ② ٤

(ب) أثبت بنفسك.

٤

(أ) ① $\frac{٧}{٢}$ ② ٨٠

(ب) أثبت بنفسك.

٥

(أ) ① $\frac{١}{٢}$ ② ٤

(ب) مساحة △ أ ب حـ = ٢٦٧ سم^{٢}

، محيط △ أ ب حـ = ٧٩ سم

إجابات امتحانات مدارس المحافظات

١ محافظة القاهرة

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د) (٢) (أ) (٣) (ب) (٤) (أ) (٥) (ب)
(٦) (جـ) (٧) (ب) (٨) (د) (٩) (أ) (١٠) (ب)
(١١) (ب) (١٢) (د) (١٣) (جـ) (١٤) (أ) (١٥) (جـ)
(١٦) (د) (١٧) (ب) (١٨) (جـ) (١٩) (د) (٢٠) (ب)
(٢١) (د) (٢٢) (جـ) (٢٣) (د) (٢٤) (أ) (٢٥) (أ)
(٢٦) (د) (٢٧) (أ)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}} - \text{س}\right)$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}} - \text{س}}{١} \times \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}} + \text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}} + \text{س}}$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٥\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}} + \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٥}{\sqrt{١ + \frac{٥}{\text{س}}} + ١} = \frac{٥}{٢}$$

٢

المدى = $[-١ ، \infty[$

الدالة تناقصية

في $]-\infty ، -٢]$

وتزايدية في $]-٢ ، \infty[$

٢ محافظة الجيزة

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب) (٢) (ب) (٣) (جـ) (٤) (د) (٥) (ب)
(٦) (جـ) (٧) (د) (٨) (ب) (٩) (ب) (١٠) (ب)
(١١) (د) (١٢) (ب) (١٣) (د) (١٤) (د) (١٥) (جـ)
(١٦) (ب) (١٧) (ب) (١٨) (أ) (١٩) (د) (٢٠) (د)
(٢١) (ب) (٢٢) (د) (٢٣) (جـ) (٢٤) (ب) (٢٥) (جـ)
(٢٦) (د) (٢٧) (ب)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

المجال $[-١ ، ٥]$ ، المدى $[٢ ، ٥]$ ليست زوجية ولا فردية.

٢

$$\because \lim_{\text{س} \to ٥} \frac{\text{س} - أ}{(\text{س} - ٤)^{٣}} = ٣$$

$$\therefore \frac{٥ - أ}{(٥ - ٤)^{٣}} = ٣ \qquad \therefore أ = ٢$$

٣ محافظة الإسكندرية

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (ب) (٤) (ب)
(٥) (ب) (٦) (ب) (٧) (ب) (٨) (ب)
(٩) (ب) (١٠) (أ) (١١) (د) (١٢) (ب)
(١٣) (ب) (١٤) (جـ) (١٥) (د) (١٦) (د)
(١٧) (جـ) (١٨) (جـ) (١٩) (جـ) (٢٠) (أ)
(٢١) (جـ) (٢٢) (د) (٢٣) (ب) (٢٤) (د)
(٢٥) (أ) (٢٦) (ب) (٢٧) (أ)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

• المدى ح

• الدالة تزايدية على ح

• الدالة ليست زوجية ولا فردية.

٢

$$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\sqrt{\text{س} + ٣} - ٢}{\text{س} - ١} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ٣} + ٢}{\sqrt{\text{س} + ٣} + ٢}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س} + ٣ - ٤}{(\text{س} - ١)\left(\sqrt{\text{س} + ٣} + ٢\right)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١} \frac{١}{\sqrt{\text{س} + ٣} + ٢} = \frac{١}{٤}$$

٤ محافظة القليوبية

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب) (٢) (أ) (٣) (جـ) (٤) (ب) (٥) (د)
(٦) (أ) (٧) (ب) (٨) (د) (٩) (جـ) (١٠) (ب)
(١١) (أ) (١٢) (أ) (١٣) (د) (١٤) (أ) (١٥) (جـ)
(١٦) (ب) (١٧) (ب) (١٨) (جـ) (١٩) (جـ) (٢٠) (د)
(٢١) (ب) (٢٢) (ب) (٢٣) (جـ) (٢٤) (أ) (٢٥) (أ)
(٢٦) (ب) (٢٧) (ب)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

لكي تكون د متصلة عند أ

$$\therefore د(أ) = \lim_{\text{س} \to أ} د(\text{س})$$

$$\therefore أ^{٢} = ٢أ \qquad \therefore أ^{٢} - ٢أ = ٠$$

$$\therefore أ(أ - ٢) = ٠ \qquad \therefore أ = \text{صفر} \text{ أو } أ = ٢$$

٢

$$\because ٢^{\text{س} + ١} = ٧ \qquad \therefore لو_{٢} ٧ = \text{س} + ١$$

$$\therefore \text{س} = لو_{٢} ٧ - ١ \approx ١{,}٨$$

٥ محافظة الغربية

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د) (٢) (د) (٣) (أ) (٤) (أ) (٥) (أ)
(٦) (جـ) (٧) (جـ) (٨) (د) (٩) (جـ) (١٠) (ب)
(١١) (ب) (١٢) (ب) (١٣) (ب) (١٤) (أ) (١٥) (ب)
(١٦) (ب) (١٧) (ب) (١٨) (د) (١٩) (أ) (٢٠) (أ)
(٢١) (ب) (٢٢) (د) (٢٣) (جـ) (٢٤) (أ) (٢٥) (ب)
(٢٦) (أ) (٢٧) (ب)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

$$\because |٢\text{س} - ١| \le ٥ \qquad \therefore -٥ \le ٢\text{س} - ١ \le ٥$$

$$\therefore -٤ \le ٢\text{س} \le ٦ \qquad \therefore -٢ \le \text{س} \le ٣$$

$$\therefore م.ح = [-٢ ، ٣]$$

٢

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٢٧\text{س}^{٣} + ٥}}{٢\text{س} - ٧}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على س

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٢٧ + \frac{٥}{\text{س}^{٣}}}}{٢ - \frac{٧}{\text{س}}} = \frac{\sqrt[٣]{٢٧}}{٢} = \frac{٣}{٢}$$

٦ محافظة الدقهلية

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (أ)
(٥) (ب) (٦) (د) (٧) (ب) (٨) (ب)

(٩) (ب)　(١٠) (د)　(١١) (د)　(١٢) (جـ)
(١٣) (د)　(١٤) (د)　(١٥) (ب)　(١٦) (ب)
(١٧) (ب)　(١٨) (أ)　(١٩) (ب)　(٢٠) (ب)
(٢١) (جـ)　(٢٢) (ب)　(٢٣) (جـ)　(٢٤) (ب)
(٢٥) (جـ)　(٢٦) (جـ)　(٢٧) (جـ)

ثانيا　الأسئلة المقالية

١

$$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{(\text{س} - 3)^2 - 1}{2\text{س}^2 - 3\text{س} - 2}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 2} \frac{(\text{س} - 3 - 1)(\text{س} - 3 + 1)}{(2\text{س} + 1)(\text{س} - 2)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س} - 4}{2\text{س} + 1} = \frac{-2}{5}$$

٢

• المدى = [١ ، ∞[

• الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٣[

، وتزايدية فى]٣ ، ∞[

٧　محافظة دمياط

أولا　أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب)　(٢) (جـ)　(٣) (ب)　(٤) (جـ)　(٥) (أ)
(٦) (د)　(٧) (ب)　(٨) (جـ)　(٩) (ب)　(١٠) (جـ)
(١١) (أ)　(١٢) (أ)　(١٣) (د)　(١٤) (جـ)　(١٥) (د)
(١٦) (أ)　(١٧) (ب)　(١٨) (د)　(١٩) (أ)　(٢٠) (جـ)
(٢١) (جـ)　(٢٢) (أ)　(٢٣) (جـ)　(٢٤) (د)　(٢٥) (جـ)
(٢٦) (ب)　(٢٧) (ب)

ثانيا　الأسئلة المقالية

١

• الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[، وتناقصية]٠ ، ∞[

• الدالة زوجية

٢

$$\lim_{\text{س} \to 5} \frac{\sqrt{\text{س} - 1} - 2}{\text{س} - 5} \times \frac{\sqrt{\text{س} - 1} + 2}{\sqrt{\text{س} - 1} + 2}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 5} \frac{\text{س} - 1 - 4}{(\text{س} - 5)(\sqrt{\text{س} - 1} + 2)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 5} \frac{1}{\sqrt{\text{س} - 1} + 2} = \frac{1}{4}$$

٨　محافظة كفر الشيخ

أولا　أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)　(٢) (ب)　(٣) (جـ)　(٤) (أ)　(٥) (د)
(٦) (ب)　(٧) (أ)　(٨) (جـ)　(٩) (جـ)　(١٠) (ب)
(١١) (أ)　(١٢) (جـ)　(١٣) (ب)　(١٤) (ب)　(١٥) (ب)
(١٦) (جـ)　(١٧) (ب)　(١٨) (ب)　(١٩) (جـ)　(٢٠) (ب)
(٢١) (جـ)　(٢٢) (أ)　(٢٣) (د)　(٢٤) (أ)　(٢٥) (أ)
(٢٦) (ب)　(٢٧) (ب)

ثانيا　الأسئلة المقالية

١

$\because |\text{س} + 4| \le 2$　　$\therefore -2 \le \text{س} + 4 \le 2$

$\therefore -6 \le \text{س} \le -2$　　$\therefore$ م.ح $= [-6 ، -2]$

٢

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(\text{س} + 1)(5\text{س} - 3)}{\text{س}^2 + 3}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)\left(5 - \frac{3}{\text{س}}\right)}{1 + \frac{3}{\text{س}^2}} = \frac{1 \times 5}{1} = 5$$

٩　محافظة البحيرة

أولا　أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب)　(٢) (أ)　(٣) (أ)　(٤) (د)　(٥) (أ)
(٦) (أ)　(٧) (جـ)　(٨) (ب)　(٩) (أ)　(١٠) (جـ)
(١١) (ب)　(١٢) (د)　(١٣) (جـ)　(١٤) (ب)　(١٥) (أ)
(١٦) (أ)　(١٧) (ب)　(١٨) (أ)　(١٩) (ب)　(٢٠) (جـ)
(٢١) (د)　(٢٢) (جـ)　(٢٣) (جـ)　(٢٤) (جـ)　(٢٥) (جـ)
(٢٦) (د)　(٢٧) (ب)

ثانيا　الأسئلة المقالية

١

$|2\text{س} - 5| + |5 - 2\text{س}| < 14$

$\therefore 2|2\text{س} - 5| < 14$

$\therefore |2\text{س} - 5| < 7$　　$\therefore -7 < 2\text{س} - 5 < 7$

$\therefore -2 < 2\text{س} < 12$　　$\therefore -1 < \text{س} < 6$

$\therefore$ م.ح $=]-1 ، 6[$

٢

$$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + \text{س} + 2}{\text{س} - 2}$$

باستخدام القسمة المطولة

$$\therefore \lim_{\text{س} \to 2} \frac{(\text{س} - 2)(\text{س}^2 - \text{س} - 1)}{\text{س} - 2}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 2} (\text{س}^2 - \text{س} - 1) = 1$$

١٠　محافظة الفيوم

أولا　أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب)　(٢) (د)　(٣) (جـ)　(٤) (جـ)　(٥) (أ)
(٦) (جـ)　(٧) (جـ)　(٨) (جـ)　(٩) (جـ)　(١٠) (أ)
(١١) (جـ)　(١٢) (ب)　(١٣) (د)　(١٤) (ب)　(١٥) (ب)
(١٦) (أ)　(١٧) (جـ)　(١٨) (د)　(١٩) (ب)　(٢٠) (جـ)
(٢١) (ب)　(٢٢) (أ)　(٢٣) (د)　(٢٤) (ب)　(٢٥) (د)
(٢٦) (جـ)　(٢٧) (ب)

ثانيا　الأسئلة المقالية

١

$$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^4 - 16}{\text{س}^2 - 3\text{س} + 2}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 2} \frac{(\text{س} - 2)(\text{س} + 2)(\text{س}^2 + 4)}{(\text{س} - 2)(\text{س} - 1)}$$

$$= \frac{4 \times 8}{2 - 1} = 32$$

٢

* المجال : ح − {٣}
* المدى : ح − {٢}
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٣[و]٣ ، ∞[

١١　محافظة بنى سويف

أولا　أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د)　(٢) (ب)　(٣) (د)　(٤) (أ)　(٥) (ب)
(٦) (أ)　(٧) (أ)　(٨) (أ)　(٩) (أ)　(١٠) (ب)
(١١) (أ)　(١٢) (أ)　(١٣) (د)　(١٤) (ب)　(١٥) (جـ)

١٦ (أ)   ١٧ (ب)   ١٨ (أ)   ١٩ (ب)   ٢٠ (جـ)
٢١ (ب)   ٢٢ (جـ)   ٢٣ (ب)   ٢٤ (د)   ٢٥ (د)
٢٦ (ب)   ٢٧ (أ)

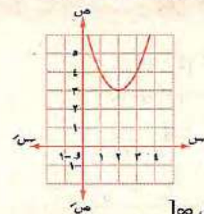
ثانيًا الأسئلة المقالية

١

$$\lim_{\text{س} \to ٦} \frac{\text{س}^{٢} - ٣٦}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} - ٦}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٦} \frac{(\text{س} - ٦)(\text{س} + ٦)}{(\text{س} - ٦)(\text{س} + ١)} = \frac{١٢}{٧}$$

٢



* المدى [٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٢[
وتزايدية فى]٢ ، ∞[

١٢ محافظة المنيا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (جـ)   ٢ (جـ)   ٣ (جـ)   ٤ (أ)   ٥ (أ)
٦ (أ)   ٧ (أ)   ٨ (د)   ٩ (أ)   ١٠ (جـ)
١١ (د)   ١٢ (أ)   ١٣ (ب)   ١٤ (جـ)   ١٥ (أ)
١٦ (جـ)   ١٧ (أ)   ١٨ (ب)   ١٩ (ب)   ٢٠ (ب)
٢١ (أ)   ٢٢ (أ)   ٢٣ (أ)   ٢٤ (ب)   ٢٥ (ب)
٢٦ (جـ)   ٢٧ (جـ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

$|٢\text{س} - ٣| \leq ٧$ ∴ $-٧ \leq ٢\text{س} - ٣ \leq ٧$

$-٤ \leq ٢\text{س} \leq ١٠$ $-٢ \leq \text{س} \leq ٥$

م.ح = [−٢ ، ٥]

٢

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٥} - ٣٢}{\text{س}^{٢} - ٤} = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٥} - (٢)^{٥}}{\text{س}^{٢} - (٢)^{٢}}$$

$$= \frac{٥}{٢} (٢)^{٥ - ٢} = ٢٠$$

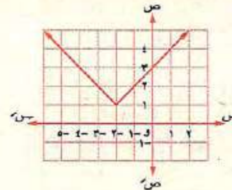
١٣ محافظة أسيوط

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (ب)   ٢ (جـ)   ٣ (جـ)   ٤ (أ)   ٥ (جـ)
٦ (أ)   ٧ (أ)   ٨ (أ)   ٩ (ب)   ١٠ (د)
١١ (د)   ١٢ (جـ)   ١٣ (أ)   ١٤ (جـ)   ١٥ (أ)
١٦ (ب)   ١٧ (د)   ١٨ (د)   ١٩ (د)   ٢٠ (ب)
٢١ (أ)   ٢٢ (د)   ٢٣ (ب)   ٢٤ (جـ)   ٢٥ (جـ)
٢٦ (ب)   ٢٧ (أ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١



* المدى [١ ، ∞[
* المنحنى لا يقطع محور السينات

∴ م.ح المعادلة : د (س) = ٠ هى ∅

٢

$$\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\sqrt{\text{س} + ١} - ٢}{\text{س} - ٣} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ١} + ٢}{\sqrt{\text{س} + ١} + ٢}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س} + ١ - ٤}{(\text{س} - ٣)\left(\sqrt{\text{س} + ١} + ٢\right)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{١}{\sqrt{\text{س} + ١} + ٢} = \frac{١}{٤}$$

١٤ محافظة سوهاج

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (ب)   ٢ (أ)   ٣ (أ)   ٤ (د)   ٥ (ب)
٦ (ب)   ٧ (جـ)   ٨ (ب)   ٩ (جـ)   ١٠ (أ)
١١ (جـ)   ١٢ (ب)   ١٣ (ب)   ١٤ (جـ)   ١٥ (د)
١٦ (ب)   ١٧ (د)   ١٨ (جـ)   ١٩ (أ)   ٢٠ (جـ)
٢١ (أ)   ٢٢ (د)   ٢٣ (د)   ٢٤ (جـ)   ٢٥ (د)
٢٦ (جـ)   ٢٧ (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

$$\lim_{\text{س} \to -٢} \frac{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٣} + ٢\text{س} - ٤}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}$$

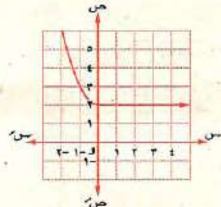
باستخدام القسمة المطولة

$$= \lim_{\text{س} \to -٢} \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٢)}{\text{س}(\text{س} + ٢)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to -٢} \frac{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٢}{\text{س}}$$

$$= \frac{-٨ - ٤ - ٤ - ٢}{-٢} = ٩$$

٢



* المجال : ح   * المدى : [٢ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[وثابتة فى]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية ولا فردية.

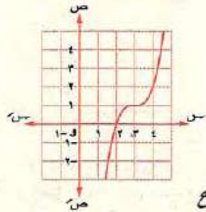
١٥ محافظة قنا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (أ)   ٢ (جـ)   ٣ (ب)   ٤ (ب)
٥ (د)   ٦ (ب)   ٧ (جـ)   ٨ (د)
٩ (أ)   ١٠ (ب)   ١١ (أ)   ١٢ (د)
١٣ (جـ)   ١٤ (د)   ١٥ (د)   ١٦ (جـ)
١٧ (ب)   ١٨ (جـ)   ١٩ (ب)   ٢٠ (ب)
٢١ (أ)   ٢٢ (ب)   ٢٣ (أ)   ٢٤ (ب)
٢٥ (أ)   ٢٦ (د)   ٢٧ (جـ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١



* المجال : ح
* المدى : ح
* الدالة تزايدية على مجالها.
* الدالة ليست زوجية ولا فردية.

٢

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\sqrt{\text{س} + ٤} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ٤} + ٢}{\sqrt{\text{س} + ٤} + ٢}$$

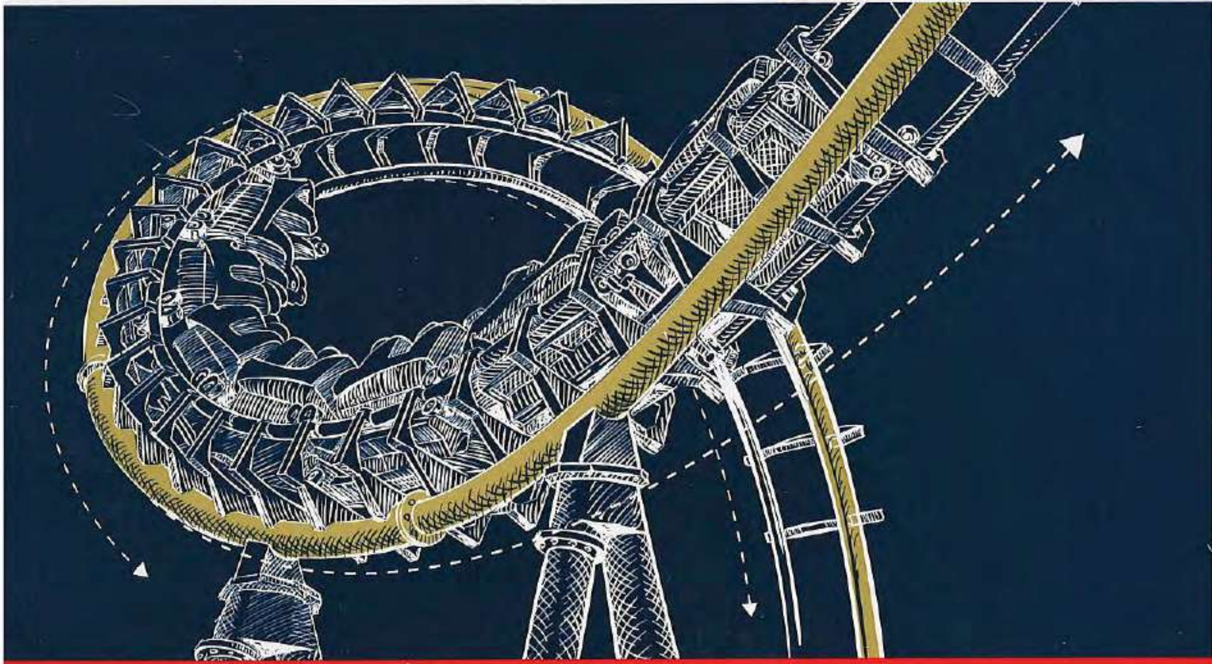
$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س} + ٤ - ٤}{\text{س}(\text{س} - ٢)\left(\sqrt{\text{س} + ٤} + ٢\right)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{١}{(\text{س} - ٢)\left(\sqrt{\text{س} + ٤} + ٢\right)}$$

$$= \frac{١}{-٢ \times ٤} = -\frac{١}{٨}$$

الرياضيات
العامة

الجزء الخاص
بالإجابات



2024
المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم الأدبى
الفصل الدراسى الأول



أولًا

إجابات تمارين

الجبر

إجابات تمارين الوحدة الأولى



الدوال الحقيقية
ورسم المنحنيات

إجابات الوحدة الأولى

إجابات تمارين المتطلبات القبلية

① (د)　② (ب)　③ (د)　④ (جـ)
⑤ (جـ)　⑥ (أ)　⑦ (جـ)

إجابات تمارين 1

أولا　أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)　② (د)　③ (أ)　④ (د)
⑤ (د)　⑥ (ب)　⑦ (أ)　⑧ (د)
⑨ (جـ)　⑩ (ب)　⑪ (جـ)　⑫ (د)
⑬ (جـ)　⑭ (ب)　⑮ (ب)　⑯ (أ)
⑰ (د)　⑱ (ب)　⑲ (جـ)　⑳ (جـ)
㉑ (د)　㉒ (ب)　㉓ (د)　㉔ (جـ)
㉕ (د)　㉖ (ب)　㉗ (جـ)　㉘ (د)
㉙ (د)　㉚ (ب)　㉛ (جـ)
㉜ أولًا : (ب)　ثانيًا : (جـ)
㉝ (د)　㉞ (د)　㉟ (جـ)

ثانيا　الأسئلة المقالية

١

① دالة　② ليست دالة　③ دالة
④ ليست دالة　⑤ دالة　⑥ ليست دالة

٢

① ليست دالة　② ليست دالة　③ دالة

٣

① ح − {١ ، ٢}　② ح − {٣}
③ ح − {١ ، $\frac{-٢}{٣}$}　④ ح − {−١}

٤

①]٠ ، ∞[　② ح − {$\frac{٥}{٢}$}
③]−٤ ، ∞[　④]−∞ ، ٣]

٥

① ح　②]−∞ ، ٤]　③ [٠ ، ٦]

٦ المدى = {٢ ، ٧ ، −١٣ ، −١٨}

٧

① المدى = {١ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧}
② ∵ ٤ ك − ٣ = ١٧　∴ ك = ٥

٨

① المجال = ح ، المدى = {−٢ ، ٣}
، الدالة ثابتة فى]−∞ ، ٠] ، [٠ ، ∞[
② المجال = ح − {٠} ، المدى = ح − [−٢ ، ٢]
، الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[
③ المجال = ح − {١} ، المدى =]−٢ ، ∞[
، الدالة تناقصية فى]−∞ ، ١[
، تزايدية فى]١ ، ∞[
④ المجال = ح − {٢} ، والمدى = ح − {٢}
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
⑤ المجال = ح − {−١ ، ٢} ، المدى = {٣}
، الدالة ثابتة على مجالها.
⑥ المجال = [−٢ ، ∞[، المدى = [٠ ، ∞[
، الدالة تزايدية فى]−٢ ، ٠]
وتناقصية فى]٠ ، ٢[،]٢ ، ∞[

ثالثا　مسائل تقيس مهارات التفكير

① (د)　② (د)　③ (د)　④ (جـ)

إرشادات الحل :

① ∵ س تدل على عدد أضلاع مضلع.
∴ س عدد صحيح أكبر من ٢
∴ المجال = $ص^{+}$ − {١ ، ٢}

② بوضع $\sqrt[٣]{س}$ − ٢ = ٠
∴ $\sqrt[٣]{س}$ = ٢　∴ س = ٨
∴ المجال = ح − {٨}
③ ∵ ٣ س ≥ ٠　∴ س ≥ ٠
∴ س ∈ [٠ ، ∞[
بوضع $\sqrt{٣س}$ − س = ٠　∴ $\sqrt{٣س}$ = س
∴ ٣ س = $س^{٢}$　∴ $س^{٢}$ − ٣ س = ٠
∴ س (س − ٣) = ٠
∴ س = ٠　أ، س = ٣
∴ المجال =]٠ ، ∞[− {٣}
④ ∵ س − ١ ≥ ٠　∴ س ≥ ١
∴ س ∈ [١ ، ∞[
وبوضع $\sqrt{س − ١}$ = ٣　∴ س − ١ = ٩
∴ س = ١٠
∴ المجال = [١ ، ∞[− {١٠}

إجابات تمارين 2

أولا　أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)　② (أ)　③ (أ)　④ (ب)
⑤ (أ)　⑥ (جـ)　⑦ (ب)　⑧ (ب)
⑨ (أ)　⑩ (جـ)　⑪ (أ)　⑫ (د)
⑬ (ب)　⑭ (د)　⑮ (جـ)　⑯ (جـ)
⑰ (أ)　⑱ (جـ)　⑲ (جـ)　⑳ (جـ)
㉑ (أ)　㉒ (أ)　㉓ (د)　㉔ (ب)

ثانيا　الأسئلة المقالية

١

شكل (١) : متماثل حول محور السينات ومحور الصادات ونقطة الأصل
شكل (٢) : متماثل حول محور السينات
شكل (٣) : متماثل حول نقطة الأصل
شكل (٤) : متماثل حول نقطة الأصل
شكل (٥) : متماثل حول محور الصادات
شكل (٦) : متماثل حول نقطة الأصل

٢

① فردية　② ليست زوجية وليست فردية
③ زوجية　④ ليست زوجية وليست فردية
⑤ فردية　⑥ فردية

٣

شكل (١) : د (س) = $س^{٣}$ + س
∵ مجال د = ح والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل.
∴ الدالة د فردية.
التحقيق الجبرى : لكل س ، −س ∈ ح
∵ د (−س) = $(−س)^{٣}$ + (−س)
= $−س^{٣}$ − س = − ($س^{٣}$ + س)
= − د (س)
∴ الدالة فردية.

شكل (٢) : د (س) = $س^{٣}$ − ٢
∵ مجال د = ح
، المنحنى ليس متماثلاً حول محور الصادات وليس متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل.
∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.
التحقيق الجبرى : لكل س ، −س ∈ ح
∵ د (−س) = $(−س)^{٣}$ − ٢ = $−س^{٣}$ − ٢
= − ($س^{٣}$ + ٢)
∴ د (−س) ≠ د (س) ≠ − د (س)
∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

شكل (٣) : د (س) = ٢ − $س^{٢}$
∵ مجال د = [−٢ ، ٢]
، المنحنى متماثل حول محور الصادات.
∴ الدالة د زوجية.
التحقيق الجبرى : لكل س ، −س ∈ [−٢ ، ٢]
∵ د (−س) = ٢ − $(−س)^{٢}$ = ٢ − $س^{٢}$ = د (س)
∴ الدالة زوجية.

٤

أولًا :

شكل (١)

شكل (٣)

ثانيًا :

شكل (٢)

ثالثًا :

شكل (١) : المجال = [−٥ ، ٥] ، المدى = [−٢ ، ٧]

، الدالة تناقصية فى كل من الفترتين

]− ٥ ، −٢[،]٠ ، ٢[وتزايدية فى كل

من الفترتين]−٢ ، ٠[،]٢ ، ٥[

شكل (٢) : المجال = ح − {٠}

، المدى = [−٢ ، ٢] − {٠}

الدالة ثابتة فى كل من الفترتين]− ∞ ، −٢[

،]٢ ، ∞[وتزايدية فى كل من الفترتين

]−٢ ، ٠[،]٠ ، ٢[

شكل (٣) : المجال = ح ، المدى = [−٣ ، ٦]

، الدالة ثابتة فى كل من الفترتين

]− ∞ ، −٣[،]٣ ، ∞[

وتناقصية فى]−٣ ، ٠[

وتزايدية فى]٠ ، ٣[

٥

(١) د (−س) = ٥ = د (س)   ∴ الدالة زوجية.

(٢) د (−س) = (−س)^{٤} + (−س)^{٢} − ١

= س^{٤} + س^{٢} − ١ = د (س)

∴ الدالة زوجية.

(٣) د (−س) = ٣ (−س) − ٤ (−س)^{٣}

= −٣ س + ٤ س^{٣}

= − (٣ س − ٤ س^{٣}) = − د (س)

∴ الدالة فردية.

(٤) د (−س) = (−س)^{٢} − ٣ (−س) + ٤

= س^{٢} + ٣ س + ٤

≠ د (س) ≠ − د (س)

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

(٥) د (−س) = (−س)^{٣} ((−س)^{٢} − ١)

= − س^{٣} (س^{٢} − ١) = − د (س)

∴ الدالة فردية.

(٦) د (−س) = (−س − ٣)^{٢} − ٧

= (س + ٣)^{٢} − ٧

≠ د (س) ≠ − د (س)

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

(٧) د (−س) = $\frac{(−س)^{٢} + ٢}{−س − ٣}$

= $\frac{س^{٢} + ٢}{−س − ٣}$ = $\frac{−(س^{٢} − ٢)}{−(س + ٣)}$

= $\frac{س^{٢} − ٢}{س + ٣}$

≠ د (س) ≠ − د (س)

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

(٨) د (−س) = $\frac{٢ (−س)^{٢} − (−س)^{٥}}{−س}$

= $\frac{−٢ س^{٢} + س^{٥}}{−س}$

= $\frac{−(٢ س^{٢} − س^{٥})}{−س}$

= $\frac{٢ س^{٢} − س^{٥}}{س}$ = د (س)

∴ الدالة زوجية.

(٩) ∵ مجال د = [−٣ ، ∞[

∴ لكل س ∈ [−٣ ، ∞[

ليس بالضرورة أن يوجد − س ∈ [−٣ ، ∞[

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

(١٠) د (−س) = $\sqrt[٣]{(−س)^{٣} + (−س)}$

= $\sqrt[٣]{−(س^{٣} + س)}$ = − $\sqrt[٣]{س^{٣} + س}$

= − د (س)

(١١) د (−س) = (−س)^{٣} − $\frac{١}{−س}$

= − س^{٣} + $\frac{١}{س}$

= − (س^{٣} − $\frac{١}{س}$) = − د (س)

∴ الدالة فردية.

(١٢) د (−س) = (−س − $\frac{٢}{−س}$)^{٣}

= (−(س − $\frac{٢}{س}$))^{٣}

= − (س − $\frac{٢}{س}$)^{٣} = − د (س)

∴ الدالة فردية.

(١٣) د (−س) = − س حتا (−س) = − س حتا س

= − د (س)

∴ الدالة فردية.

(١٤) د (−س) = $\frac{−٢ س}{طا (−س)}$ = $\frac{−٢ س}{−طا س}$ = $\frac{٢ س}{طا س}$

= د (س)

∴ الدالة زوجية.

(١٥) د (−س) = $\frac{(−س)^{٢} × جا (−٣ س)}{١ + (−س)^{٤}}$

= $\frac{س^{٢} جا ٣ س}{١ + س^{٤}}$ = د (س)

∴ الدالة زوجية.

(١٦) د (−س) = (−س)^{٢} (جا (−س))^{٣}

= س^{٢} (− جا س)^{٣} = − س^{٢} جا^{٣} س

= − د (س)

∴ الدالة فردية.

(١٧) د (−س) = − س جا (−س)^{٣}

= − س جا (−س^{٣})

= س جا س^{٣} = د (س)

∴ الدالة زوجية.

(١٨) د (−س) = $\frac{(−س)^{٢} + طا (−س)}{(−س)^{٤} + جا (−س)}$

= $\frac{س^{٢} − طا س}{س^{٤} − جا س}$ ≠ د (س) ≠ − د (س)

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

٦

∵ د$_{١}$ ، د$_{٢}$ فرديتان ، د$_{٣}$ زوجية

(١) د$_{١}$ + د$_{٢}$ فردية

(٢) د$_{١}$ + د$_{٣}$ ليست زوجية وليست فردية

(٣) د$_{١}$ × د$_{٢}$ زوجية   (٤) د$_{٣}$ × د$_{٢}$ فردية

٧

∵ د$_{١}$ ، د$_{٢}$ زوجيتان ، ر$_{١}$ ، ر$_{٢}$ فرديتان

(١) د$_{١}$ + ر$_{٢}$ ليست زوجية وليست فردية

(٢) د$_{١}$ − د$_{٢}$ زوجية   (٣) ر$_{١}$ + ر$_{٢}$ فردية

(٤) د$_{١}$. ر$_{٢}$ فردية   (٥) ر$_{١}$. ر$_{٢}$ زوجية

(٦) $\frac{د_{٢}}{د_{١}}$ زوجية

٨

من (١) : (٥) ليست زوجية وليست زوجية.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ) ② (أ) ③ (جـ) ④ (ب)

إرشادات الحل :

① ∵ الدالة فردية ∴ د(−٥) = − د(٥)

∴ المقدار = $\frac{-٧ د(٥) + ٣ د(٥)}{-٢ د(٥)} = \frac{-٤ د(٥)}{-٢ د(٥)}$

= ٢

② ∵ الدالة زوجية ∴ د(−٥) = د(٥)

∴ المقدار = $\frac{٧ د(٥) + ٣ د(٥)}{٢ د(٥)} = \frac{١٠ د(٥)}{٢ د(٥)}$

= ٥

③ ∵ د زوجية ∴ د(س) = د(−س)

∴ د(س) + س^٢ د(س) = ٣

∴ د(س) [١ + س^٢] = ٣

∴ د(س) = $\frac{٣}{١ + س^٢}$

∴ د(١) = ١$\frac{١}{٢}$

④ ∵ د فردية ، د(١) = ك ∴ د(−١) = −ك

، ∵ د(س + ٢) = د(س) + د(٢)

بوضع س = −١

∴ د(١) = د(−١) + د(٢)

∴ ك = −ك + د(٢) ∴ د(٢) = ٢ك

، بوضع س = ١

∴ د(٣) = د(١) + د(٢) = ك + ٢ك = ٣ك

إجابات تمارين 3

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ) ② (جـ) ③ (د) ④ (ب)

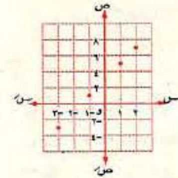
⑤ (جـ) ⑥ (جـ) ⑦ (د) ⑧ (ب)

⑨ (ب) ⑩ (ب)

ثانيًا الأسئلة المقالية

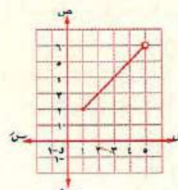
١

①



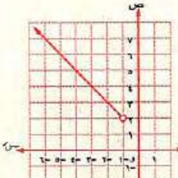
المدى = {−٣ ، ١ ، ٥ ، ٧}

②



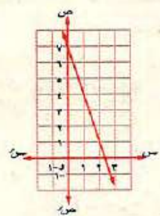
المدى = [٢ ، ٦[

③



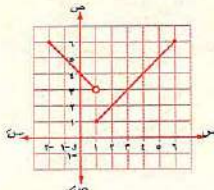
المدى =]٢ ، ∞[

④



المدى = ح

٢

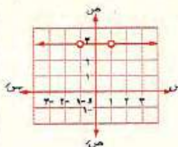


* المدى = [١ ، ٦]
* الدالة تناقصية فى]−٢ ، ١[
، وتزايدية فى]١ ، ٦[

٣

①

د(س) = $\frac{٣(س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)}$



∴ د(س) = ٣

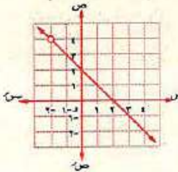
، س ≠ ±١

* المجال = ح − {١ ، −١}
* المدى = {٣}
* الدالة ثابتة على مجالها.
* الدالة زوجية.
* الدالة متماثلة حول محور الصادات.

②

د(س) = $\frac{(٢ - س)(٢ + س)}{س + ٢}$ = ٢ − س

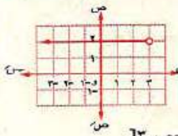
، س ≠ −٢



* المجال = ح − {−٢}
* المدى = ح − {٤}
* الدالة تناقصية على مجالها
* الدالة ليست فردية وليست زوجية.

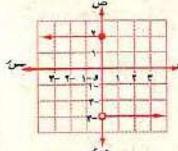
٤

①



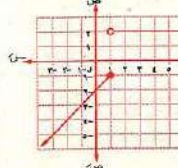
* المجال =]−∞ ، ٣]
* المدى = {٢}
* الدالة ثابتة فى الفترة]−∞ ، ٣]
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

②



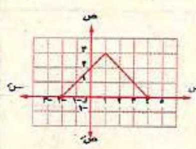
* المجال = ح
* المدى = {−٣ ، ٢}
* الدالة ثابتة فى كل من :
]−∞ ، ٠[، [٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

③



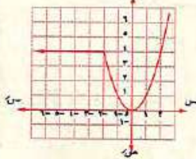
* المجال = ح
* المدى
=]−∞ ، −١] ∪ {٢}
* الدالة ثابتة فى]١ ، ∞[، وتزايدية فى]−∞ ، ١[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

④



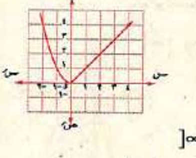
* المجال = [-٢ ، ٤]
* المدى = [٠ ، ٣]
* الدالة تزايدية
فى]-٢ ، ١[
، وتناقصية فى]١ ، ٤[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* محور التماثل هو المستقيم س = ١

⑤



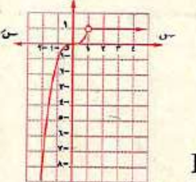
* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة ثابتة
فى]-∞ ، -٢[
، وتناقصية فى
]-٢ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑥



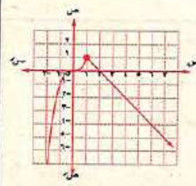
* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية
فى]-∞ ، ٠[
، وتزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑦



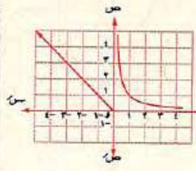
* المجال = ح - {١}
* المدى =]-∞ ، ١]
* الدالة تزايدية
فى]-∞ ، ١[
، وثابتة فى]١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑧



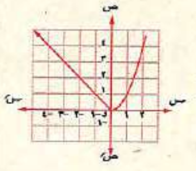
* المجال = ح
* المدى =]-∞ ، ١]
* الدالة تزايدية
فى]-∞ ، ١[
، وتناقصية فى]١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑨



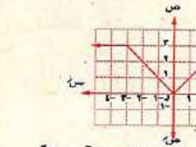
* المجال = ح
* المدى =]صفر ، ∞[
* الدالة تناقصية
فى]-∞ ، ٠[
،]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑩



* المجال = ح
* المدى = [صفر ، ∞[
* الدالة تناقصية
فى]-∞ ، ٠[
، وتزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

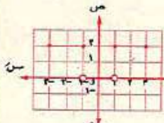
⑪



* المجال = ح * المدى = [٠ ، ٣]

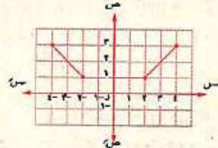
* الدالة ثابتة فى كل من]-∞ ، -٣[،]٣ ، ∞[
، وتناقصية فى]-٣ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ٣[
* الدالة زوجية.
* محور التماثل هو المستقيم : س = ٠

⑫



* المجال = [-٣ ، ٣]
* المدى = {٠ ، ٢}
* الدالة ثابتة فى كل من :
]-٣ ، -١[،]-١ ، ١[،]١ ، ٣[
* الدالة زوجية
* محور التماثل هو المستقيم س = ٠

⑬



* المجال = [-٤ ، ٤] * المدى = [١ ، ٣]
* الدالة تناقصية فى]-٤ ، -٢[
، وثابتة فى]-٢ ، ٢[
وتزايدية فى]٢ ، ٤[* الدالة زوجية.
* محور التماثل هو المستقيم س = ٠

إجابات تمارين 4

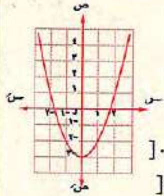
أولا أسئلة الاختيار من متعدد

①(أ)	②(ب)	③(جـ)	④(ب)
⑤(د)	⑥(جـ)	⑦(جـ)	⑧(أ)
⑨(ب)	⑩(جـ)	⑪(جـ)	⑫(ب)
⑬(جـ)	⑭(ب)	⑮(أ)	⑯(ب)
⑰(ب)	⑱(ب)	⑲(ب)	⑳(جـ)
㉑(جـ)	㉒(جـ)	㉓(جـ)	㉔(أ)
㉕(د)	㉖(ب)	㉗(جـ)	㉘(د)
㉙(جـ)	㉚(د)	㉛(أ)	㉜(ب)
㉝(ب)	㉞(جـ)	㉟(أ)	㊱(د)
㊲(ب)	㊳(د)	㊴(جـ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

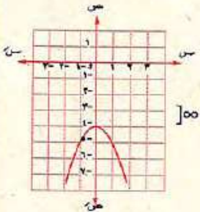
١

①



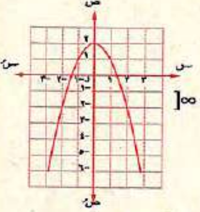
* المجال = ح
* المدى = [-٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٠[
، الدالة تزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة زوجية
* معادلة محور التماثل هى : س = صفر

②



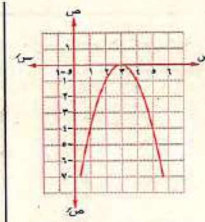
* المجال = ح
* المدى =]-∞ ، -٤]
* الدالة تناقصية فى]٠ ، ∞[
، الدالة تزايدية
فى]-∞ ، ٠[
* الدالة زوجية
* معادلة محور التماثل هى : س = صفر

③



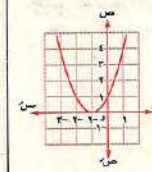
* المجال = ح
* المدى =]-∞ ، ٢]
* الدالة تناقصية فى]٠ ، ∞[
، الدالة تزايدية
فى]-∞ ، ٠[
* الدالة زوجية
* معادلة محور التماثل هى : س = صفر

(٤)



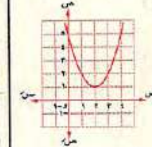
* المجال = ح
* المدى =]-∞ ، ٠]
* الدالة تناقصية في]٣ ، ∞[
، الدالة تزايدية في]-∞ ، ٣[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية
* معادلة محور التماثل هي : س = ٣

(٥)



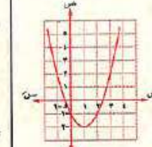
* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية في]-∞ ، -١[
، الدالة تزايدية في]-١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هي : س = -١

(٦)



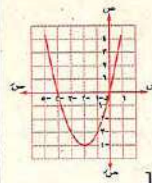
* المجال = ح
* المدى = [١ ، ∞[
* الدالة تناقصية في]-∞ ، ٢[
، الدالة تزايدية في]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية
* معادلة محور التماثل هي : س = ٢

(٧)



* المجال = ح
* المدى = [-٢ ، ∞[
* الدالة تناقصية في]-∞ ، ١[
، الدالة تزايدية في]١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هي : س = ١

(٨)



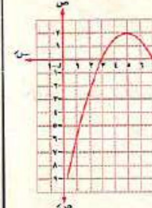
* المجال = ح
* المدى = [-٤ ، ∞[
* الدالة تناقصية في]-∞ ، -٢[
، الدالة تزايدية في]-٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هي : س = -٢

(٩)



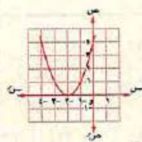
* المجال = ح
* المدى =]-∞ ، ٠]
* الدالة تناقصية في]٠ ، ∞[
، الدالة تزايدية في]-∞ ، ٠[
* الدالة زوجية
* معادلة محور التماثل هي : س = صفر

(١٠)



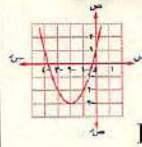
* المجال = ح
* المدى =]-∞ ، ٢]
* الدالة تناقصية في]٥ ، ∞[
، الدالة تزايدية في]-∞ ، ٥[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هي : س = ٥

(١١)



د (س) = (س + ٢)^{2}
* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية في]-∞ ، -٢[
، الدالة تزايدية في]-٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هي : س = -٢

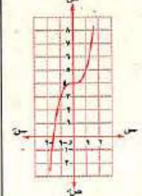
(١٢)



د (س) = (س + ٢)^{2} - ٣
* المجال = ح
* المدى = [-٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية في]-∞ ، -٢[
، الدالة تزايدية في]-٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية
* معادلة محور التماثل هي : س = -٢

٢

(١)



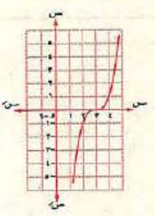
* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية
وليست فردية
* نقطة التماثل هي : (٠ ، ٤)

(٢)



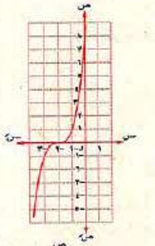
* المجال = ح
* المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية
وليست فردية.
* نقطة التماثل هي : (٠ ، -٥)

(٣)



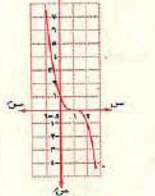
* المجال = ح
* المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية
وليست فردية
* نقطة التماثل هي : (٣ ، ٠)

(٤)



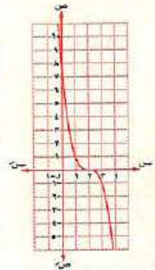
* المجال = ح
* المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية
وليست فردية
* نقطة التماثل هي : (-٢ ، ٠)

(٥)



* المجال = ح
* المدى = ح
* الدالة تناقصية على ح
* الدالة ليست زوجية
وليست فردية.
* نقطة التماثل هي : (١ ، ٠)

(٦)



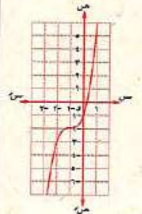
د (س) = -(س - ٢)^{3}
* المجال = ح
* المدى = ح
* الدالة تناقصية على ح
* الدالة ليست زوجية
وليست فردية.
* نقطة التماثل هي : (٢ ، ٠)

⑦



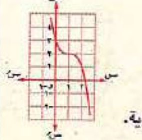
* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (١ ، -٢)

⑧



* المجال = ح
* المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (-١ ، -٢)

⑨



* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تناقصية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (١ ، ٢)

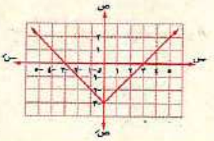
⑩



* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٠ ، -١)

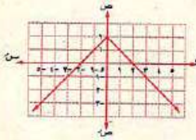
٣

①



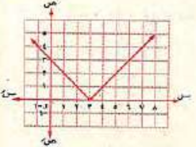
* المجال = ح
* المدى = [-٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٠[، الدالة تزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة زوجية. * معادلة محور التماثل هى : س = ٠

②



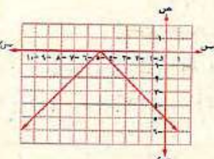
* المجال = ح
* المدى =]-∞ ، ٢]
* الدالة تناقصية فى]٠ ، ∞[، الدالة تزايدية فى]-∞ ، ٠[
* الدالة زوجية
* معادلة محور التماثل هى : س = ٠

③



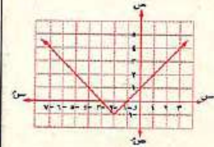
* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٣[، الدالة تزايدية فى]٣ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٣

④



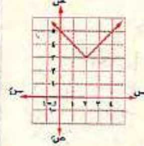
* المجال = ح
* المدى =]-∞ ، ٠]
* الدالة تناقصية فى]-٥ ، ∞[، الدالة تزايدية فى]-∞ ، -٥[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية
* معادلة محور التماثل هى : س = -٥

⑤



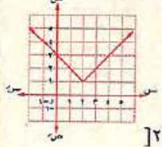
* المجال = ح
* المدى = [-١ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]-∞ ، -٢[، الدالة تزايدية فى]-٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية
* معادلة محور التماثل هى : س = -٢

⑥



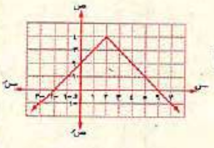
* المجال = ح
* المدى = [٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٢[، الدالة تزايدية فى]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية
* معادلة محور التماثل هى : س = ٢

⑦



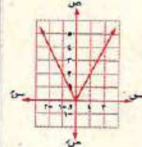
د(س) = |س - ٢| + ١
* المجال = ح
* المدى = [١ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٢[، الدالة تزايدية فى]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية
* معادلة محور التماثل هى : س = ٢

⑧



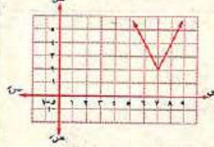
* المجال = ح
* المدى =]-∞ ، ٤]
* الدالة تناقصية فى]٢ ، ∞[، الدالة تزايدية فى]-∞ ، ٢[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية
* معادلة محور التماثل هى : س = ٢

⑨



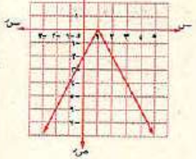
* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٠[، الدالة تزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة زوجية
* معادلة محور التماثل هى : س = ٠

⑩



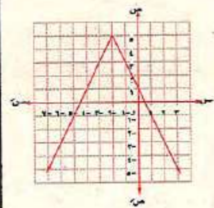
* المجال = ح
* المدى = [٢ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٧[، الدالة تزايدية فى]٧ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية
* معادلة محور التماثل هى : س = ٧

⑪



* المجال = ح
* المدى =]-∞ ، ٠]
* الدالة تناقصية فى]١ ، ∞[، الدالة تزايدية فى]-∞ ، ١[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية
* معادلة محور التماثل هى : س = ١

(١٢)



* المجال = ح
* المدى =]-∞ ، ٥]
* الدالة تناقصية

في]-٢ ، ∞[

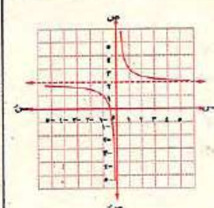
، الدالة تزايدية

في]-∞ ، -٢[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية
* معادلة محور التماثل هى : س = -٢

٤

(١)



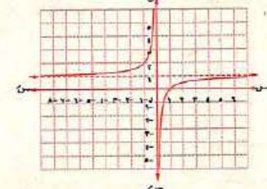
* المجال = ح - {٠}
* المدى = ح - {٢}
* الدالة تناقصية

في]٠ ، ∞[

،]-∞ ، ٠[

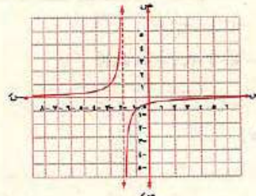
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٠ ، ٢)

(٢)



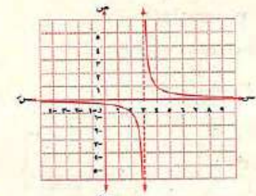
* المجال = ح - {٠}   * المدى = ح - {١}
* الدالة تزايدية في]-∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٠ ، ١)

(٣)



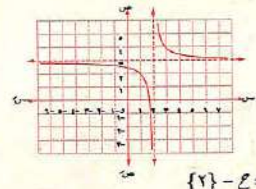
* المجال = ح - {-٢}   * المدى = ح - {٠}
* الدالة تزايدية فى]-∞ ، -٢[،]-٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية
* نقطة التماثل هى : (-٢ ، ٠)

(٤)



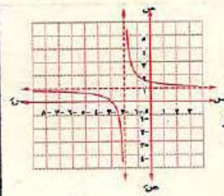
* المجال = ح - {٣}   * المدى = ح - {٠}
* الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٣[،]٣ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٣ ، ٠)

(٥)



* المجال = ح - {٢}
* المدى = ح - {٣}
* الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ٣)

(٦)



* المجال

= ح - {-٢}

* المدى = ح - {١}
* الدالة تناقصية

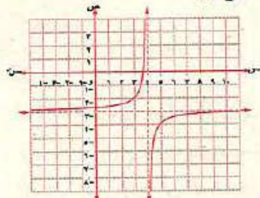
فى]-∞ ، -٢[

،]-٢ ، ∞[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (-٢ ، ١)

(٧)

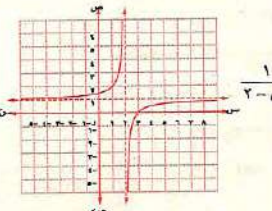
$\text{د(س)} = \frac{-١}{\text{س} - ٤} - ٣$



* المجال = ح - {٤}   * المدى = ح - {-٣}
* الدالة تزايدية فى]-∞ ، ٤[،]٤ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٤ ، -٣)

(٨)

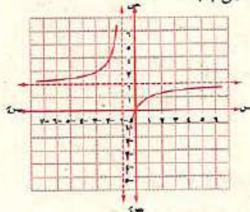
$\text{د(س)} = ١ - \frac{١}{\text{س} - ٢}$



* المجال = ح - {٢}
* المدى = ح - {١}
* الدالة تزايدية فى]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ١)

(٩)

$\text{د(س)} = ٢ - \frac{٢}{\text{س} + ١}$

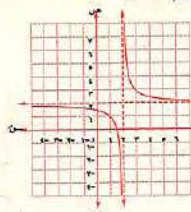


* المجال = ح - {-١}   * المدى = ح - {٢}
* الدالة تزايدية فى]-∞ ، -١[،]-١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (-١ ، ٢)

(١٠)

$\text{د(س)} = \frac{(٢\text{س} - ٤) + ١}{\text{س} - ٢} = \frac{٢(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)} + \frac{١}{\text{س} - ٢}$

$= \frac{١}{\text{س} - ٢} + ٢$



* المجال = ح - {٢}   * المدى = ح - {٢}
* الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ٢)

٥

① د (س) = (س − ٢)^{٢}

② ر (س) = س^{٣} + ٢

③ ق (س) = $\frac{١}{س − ١}$ + ٢

④ [٠ ، ∞[

⑤ (٢)

⑥ (١ ، ٢)

⑦ س = ٢

٦

① د (س) = س − ٢

② د (س) = (س + ٢)^{٢} − ٣

③ د (س) = − (س − ١)^{٢} + ٢

④ د (س) = (س − ٢)^{٣}

⑤ د (س) = (س + ١)^{٢} − ٣

⑥ د (س) = | س − ٢ | − ٣

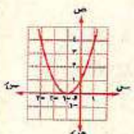
⑦ د (س) = − | س − ١ | + ٣

⑧ د (س) = $\frac{١}{س}$ + ٢

⑨ د (س) = $\frac{−١}{س + ٢}$ − ٢

٧

①



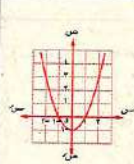
د$_{١}$ (س) = د (س + ١)

= (س + ١)^{٢}

* المجال = ح

* المدى = [٠ ، ∞[

②



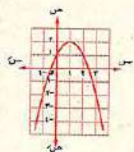
د$_{٢}$ (س) = د (س) − ١

= س^{٢} − ١

* المجال = ح

* المدى = [−١ ، ∞[

③



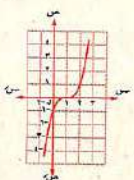
د$_{٣}$ (س) = ٢ − د (س − ١)

= ٢ − (س − ١)^{٢}

* المجال = ح

* المدى =]−∞ ، ٢]

④



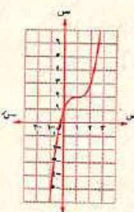
ر$_{١}$ (س) = ر (س − ١)

= (س − ١)^{٣}

* المجال = ح

* المدى = ح

⑤



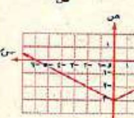
ر$_{٢}$ (س) = ر (س − ١) + ٢

= (س − ١)^{٣} + ٢

* المجال = ح

* المدى = ح

⑥

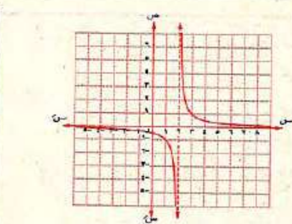


ق$_{١}$ (س) = $\frac{١}{٢}$ ق (س) − ٣ = $\frac{١}{٢}$ | س | − ٣

* المجال = ح

* المدى = [−٣ ، ∞[

⑦

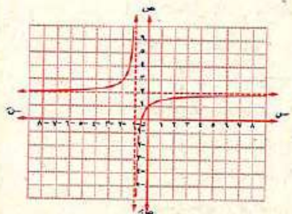


هـ$_{١}$ (س) = هـ (س − ٢) = $\frac{١}{س − ٢}$

* المجال = ح − {٢}

* المدى = ح − {٠}

⑧



هـ$_{٢}$ (س) = ٢ − هـ (س + ١) = ٢ − $\frac{١}{س + ١}$

* المجال = ح − {−١}

* المدى = ح − {٢}

٨

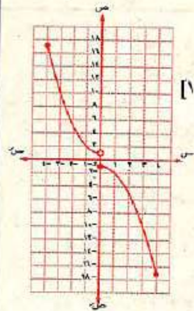
①



* المدى = ح − [−١ ، ١]

* الدالة تزايدية فى ح − {٠}

②



* المدى

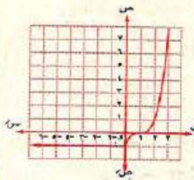
= [−١٧ ، ١٧] −]−١ ، ١[

* الدالة تناقصية

فى]−٤ ، ٠[

،]٠ ، ٤[

③



* المدى = [−١ ، ∞[

* الدالة ثابتة

فى]−∞ ، ٠]

، الدالة تزايدية

فى]٠ ، ∞[

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ) ② (ب) ③ (جـ) ④ (جـ)

إرشادات الحل :

① ∵ المنحنى ر (س) هو نفسه منحنى د (س) بالانتقال ٣ وحدات يمينًا.

∴ كل نقطة من نقاط تقاطع المنحنى د (س) مع محور السينات تنتقل ٣ وحدات يمينًا أيضًا.

∴ س ∈ {−٣ + ٣ ، ١ + ٣ ، ٠ + ٣}

أى س ∈ {٠ ، ٤ ، ٢}

② ∵ مدى الدالة التربيعية = [١ ، ∞[

∴ ب − ٢ = ١ ∴ ب = ٣

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٢)

∴ د (٣) = ٢

∴ (٣ − أ + ١)^٢ + ١ = ٢

∴ (٤ − أ)^٢ = ١   ∴ ٤ − أ = ±١

∴ أ = ٤ ± ١   ∴ أ = ٣ أ، ٥

③ المنحنى ص = ٣ (س − ٥)^٢ + ٧ تحت تأثير انتقال ٣ وحدات يمينًا ووحدة لأسفل.

∴ ص = ٣ (س − ٥ − ٣)^٢ + ٧ − ١

∴ ص = ٣ (س − ٨)^٢ + ٦

④ ∵ الدالة متماثلة حول محور الصادات

∴ ر (س) = −س^٣ + ٢

إجابات تمارين 5

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب) ② (جـ) ③ (أ) ④ (جـ)

⑤ (أ) ⑥ (جـ) ⑦ (جـ) ⑧ (د)

⑨ (أ) ⑩ (ب) ⑪ (جـ) ⑫ (جـ)

⑬ (ب) ⑭ (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

1

① |س| = ٧   ∴ س = ±٧

∴ مجموعة الحل = {٧، −٧}

② |س| = −٣ (مرفوض)   ∴ مجموعة الحل = ∅

③ ٤|س| = ٢٠   ∴ |س| = ٥

∴ س = ±٥   ∴ مجموعة الحل = {٥، −٥}

④ |س − ٢| = ٢   ∴ س − ٢ = ±٢

∴ س = ٤ أ، س = ٠

∴ مجموعة الحل = {٤، ٠}

⑤ |س − ٣| = ٠   ∴ س − ٣ = ٠

∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

⑥ |س + ٣| = ٦   ∴ س + ٣ = ±٦

∴ س = ٣ أ، س = −٩

∴ مجموعة الحل = {٣، −٩}

⑦ |٢س − ٧| = ٥   ∴ ٢س − ٧ = ±٥

∴ ٢س − ٧ = ٥ ومنها س = ٦

أ، ٢س − ٧ = −٥ ومنها س = ١

∴ مجموعة الحل = {٦، ١}

⑧ |٢س − ٣| = ٧   ∴ ٢س − ٣ = ±٧

∴ ٢س − ٣ = ٧ ومنها ٢س = ١٠

∴ س = ٥

أ، ٢س − ٣ = −٧   ومنها ٢س = −٤

∴ س = −٢

∴ مجموعة الحل = {٥، −٢}

⑨ |س + ٢| = ١   ∴ س + ٢ = ±١

∴ س = −١ أ، س = −٣

∴ مجموعة الحل = {−١، −٣}

⑩ ٣|س| = ٣   ∴ |س| = ١

∴ س = ±١

∴ مجموعة الحل = {١، −١}

⑪ |س − ٣| = |س + ١|

∴ س − ٣ = ±(س + ١)

∴ س − ٣ = س + ١ (مرفوض)

أ، س − ٣ = −س − ١

∴ ٢س = ٢   ∴ س = ١ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١}

⑫ |س + ٥| = |س − ٣|

∴ س + ٥ = ±(س − ٣)

∴ س + ٥ = س − ٣ (مرفوض)

أ، س + ٥ = −س + ٣   ∴ ٢س = −٢

∴ س = −١ (تحقق)   ∴ مجموعة الحل = {−١}

⑬ |س − ١| = |٢س + ٣|

∴ س − ١ = ±(٢س + ٣)

∴ س − ١ = ٢س + ٣

ومنها س = −٤ (تحقق)

أ، س − ١ = −٢س − ٣

ومنها ٣س = −٢

∴ س = −٢/٣ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {−٤، −٢/٣}

⑭ ∵ |٢ (س − ٣)| = |س − ٣|

∴ ٢|س − ٣| = |س − ٣|

∴ |س − ٣| = ٠   ∴ س − ٣ = ٠

∴ س = ٣   ∴ مجموعة الحل = {٣}

⑮ |٢س + ١| = |س − ٣|

∴ ٢س + ١ = ±(س − ٣)

∴ ٢س + ١ = س − ٣

ومنها س = −٤ (تحقق)

أ، ٢س + ١ = −س + ٣

ومنها س = ٢/٣ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {−٤، ٢/٣}

⑯ |س − ١| = ٢|س − ٢|

∴ س − ١ = ±٢ (س − ٢)

∴ س − ١ = ٢س − ٤   ∴ س = ٣ (تحقق)

أ، س − ١ = −٢س + ٤   ∴ ٣س = ٥

∴ س = ٥/٣ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٣، ٥/٣}

⑰ ∵ √(س^٢ − ٤س + ٤) = ٤

∴ √((س − ٢)^٢) = ٤   ∴ |س − ٢| = ٤

∴ س − ٢ = ±٤

∴ س − ٢ = ٤   ∴ س = ٦

أ، س − ٢ = −٤   ∴ س = −٢

∴ مجموعة الحل = {−٢، ٦}

⑱ |س − ٣| (|س − ٣| − ١) = ٠

∴ |س − ٣| = ٠ ومنها س = ٣

أ، |س − ٣| − ١ = ٠   ∴ |س − ٣| = ١

∴ س − ٣ = ±١ ومنها س = ٢ أ، س = ٤

∴ مجموعة الحل = {٣، ٢، ٤}

⑲ √(٤س^٢ − ١٢س + ٩) = |س + ١|

∴ √((٢س − ٣)^٢) = |س + ١|

∴ |٢س − ٣| = |س + ١|

∴ ٢س − ٣ = ±(س + ١)

∴ ٢س − ٣ = س + ١

ومنها س = ٤ (تحقق)

أ، ٢س − ٣ = −س − ١

ومنها س = ٢/٣ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٤، ٢/٣}

⑳ |س − ١| |س + ١| = |س − ١|

∴ |س − ١| (|س + ١| − ١) = ٠

∴ |س − ١| = ٠ ومنها س = ١

أ، |س + ١| − ١ = ٠   ∴ |س + ١| = ١

∴ س + ١ = ±١

ومنها س = ٠ أ، س = −٢

∴ مجموعة الحل = {١، ٠، −٢}

㉑ |س^٢ − ١| = ٢٦   ∴ س^٢ − ١ = ±٢٦

∴ س^٢ = −٢٥ (مرفوض) أ، س^٢ = ٢٧

ومنها س = ±٣√٣

∴ مجموعة الحل = {٣√٣، −٣√٣}

㉒ (|س + ١| + ٢) (|س + ١| − ٥) = ٠

∴ |س + ١| + ٢ = ٠

∴ |س + ١| = −٢ (مرفوض)

أ، |س + ١| − ٥ = ٠   ∴ |س + ١| = ٥

∴ س + ١ = ±٥ ومنها س = ٤ أ، س = −٦

∴ مجموعة الحل = {٤، −٦}

(٢٣) |س − ٥|^{٢} = ٢ |س − ٥|

∴ |س − ٥| (|س − ٥| − ٢) = ٠

∴ |س − ٥| = ٠ ، ومنها س = ٥

أ، |س − ٥| − ٢ = ٠ ∴ |س − ٥| = ٢

ومنها س − ٥ = ± ٢

∴ س = ٧ أ، س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٥ ، ٧ ، ٣}

(٢٤) س^{٢} + س − ١٠ = ± ١٠

∴ س^{٢} + س − ١٠ = −١٠

∴ س^{٢} + س = ٠ ∴ س (س + ١) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = −١

أ، س^{٢} + س − ١٠ = ١٠

∴ س^{٢} + س − ٢٠ = ٠

∴ (س + ٥) (س − ٤) = ٠

∴ س = −٥ أ، س = ٤

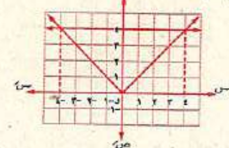
∴ مجموعة الحل = {٠ ، −١ ، −٥ ، ٤}

٢

* تم الحل بيانيًا وعليك التحقق جبريًا بنفسك.
* ترسم منحنى الدالتين د ، ر فتكون الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين هى مجموعة حل المعادلة.

(١) ∵ |س| = ٤ ∴ د(س) = |س|

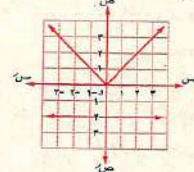
، ر(س) = ٤



من الرسم : مجموعة الحل = {٤ ، −٤}

(٢) ∵ |س| = −٢ ∴ د(س) = |س|

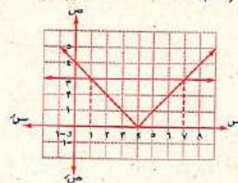
، ر(س) = −٢



من الرسم : مجموعة الحل = ∅

(٣) ∵ |س − ٤| = ٣

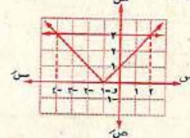
∴ د(س) = |س − ٤| ، ر(س) = ٣



من الرسم : مجموعة الحل = {١ ، ٧}

(٤) ∵ |س + ١| = ٣ ∴ د(س) = |س + ١|

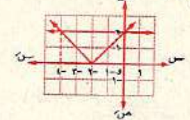
، ر(س) = ٣



من الرسم : مجموعة الحل = {٢ ، −٤}

(٥) ∵ |س + ٢| = ٢ ∴ د(س) = |س + ٢|

، ر(س) = ٢

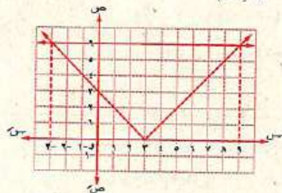


من الرسم : مجموعة الحل = {٠ ، −٤}

(٦) ∵ |س − ٣| = ٦

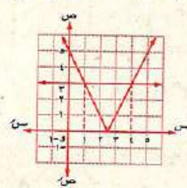
∴ د(س) = |س − ٣|

، ر(س) = ٦



من الرسم : مجموعة الحل = {٩ ، −٣}

(٧) د(س) = |٢س − ٥| ، ر(س) = ٣

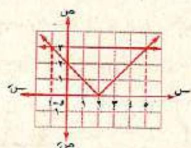


من الرسم : مجموعة الحل = {١ ، ٤}

(٨) ∵ $\sqrt{(س − ٢)^{٢}}$ = ٣

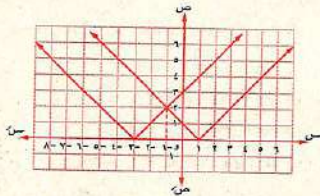
∴ |س − ٢| = ٣

∴ د(س) = |س − ٢| ، ر(س) = ٣



من الرسم : مجموعة الحل = {٥ ، −١}

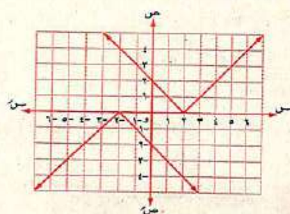
(٩) د(س) = |س − ١| ، ر(س) = |س + ٣|



من الرسم : مجموعة الحل = {−١}

(١٠) د(س) = |س − ٢|

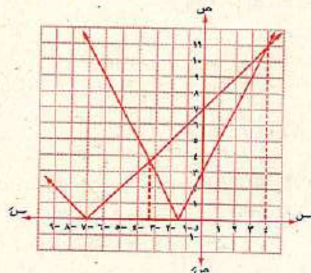
، ر(س) = −|س + ٢|



من الرسم : مجموعة الحل = ∅

(١١) د(س) = |س + ٧|

، ر(س) = ٢ |س + $\frac{٣}{٢}$|



من الرسم : مجموعة الحل = {−٣ $\frac{١}{٣}$ ، ٤}

(١٢) ∵ |س − ٢| = −|س − ١|

∴ د(س) = |س − ٢| ، ر(س) = −|س − ١|

من الرسم : مجموعة الحل = ∅

(١٣) د(س) = |س − ٢| ، ر(س) = |٢س + ١|

من الرسم : مجموعة الحل = {−٤ ، $\frac{٢}{٣}$}

٣

(١) د(−س) = −س |−س| = −س |س|

= −د(س) ∴ الدالة فردية.

(٢) د(−س) = (−س)^{٢} − |−س| − ١

= س^{٢} − |س| − ١ = د(س) ∴ الدالة زوجية.

(٣) د(−س) = −س − |−س − ٢| + ٤

= −س − |س + ٢| + ٤ ≠ د(س) ≠ −د(س)

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

(٤) د(−س) = $\frac{(−س)^{٢} ظا(−٢س)}{٥ + |−٢س|}$

= $\frac{س^{٢} ظا ٢س}{٥ + |٢س|}$ = د(س)

∴ الدالة زوجية.

(٥) د(−س)

= ٢|−س| ظا(−س) + ٢(−س) |ظا(−س)|

= ٢|س| (−ظا س) − ٢س |−ظا س|

= −٢|س| ظا س − ٢س |ظا س|

= −د(س) ∴ الدالة فردية.

٤

من الرسم :

* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٣[

، وتزايدية فى]٣ ، ∞[

* مجموعة الحل = {٠ ، ٦}

٥

د(س) = ٢|س + $\frac{٥}{٢}$| − ٣

من الرسم :

* المدى = [−٣ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى]−∞ ، −$\frac{٥}{٢}$[

، وتزايدية فى]−$\frac{٥}{٢}$ ، ∞[

* مجموعة الحل = {−١ ، −٤}

الحل الجبرى : ∵ |٢س + ٥| = ٣

∴ ٢س + ٥ = ±٣

∴ ٢س + ٥ = ٣ ومنها س = −١

أ، ٢س + ٥ = −٣ ومنها س = −٤

٦

من الرسم :

* المدى =]−∞ ، ١]

* الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠[

، وتناقصية فى]٠ ، ∞[

* الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.

* مجموعة الحل = {−٢ ، ٢} ويمكنك التحقق منها جبريًا.

٧

مجال الدالة د هو ح

من الرسم :

* المدى = [٠ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢[

، وتزايدية فى]٢ ، ∞[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

* مجموعة الحل = {−١ ، ٥}

الحل الجبرى : ∵ |س − ٢| = ٣

∴ س − ٢ = ±٣

∴ س − ٢ = ٣ ومنها س = ٥

أ، س − ٢ = −٣ ومنها س = −١

٨

د$_{١}$(س) = |س − ١|

، د$_{٢}$(س) = ٢|س − $\frac{٥}{٢}$|

من الرسم :

مجموعة الحل = {٢ ، ٤}

٩

∵ د(−س) = (−س)^{٢} |−س|

= س^{٢} |س| = د(س)

∴ د دالة زوجية

من تعريف دالة المقياس

∴ د(س) = { س^{٢} (س) ، س ≥ ٠ ؛ س^{٢} (−س) ، س < ٠ }

= { س^{٣} ، س ≥ ٠ ؛ −س^{٣} ، س < ٠ }

عندما س ≥ ٠ ∴ س^{٣} = ١

∴ س = ١ ∈ [٠ ، ∞[

، عندما س < ٠ ∴ −س^{٣} = ١

∴ س^{٣} = −١ ∴ س = −١ ∈]−∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {١ ، −١}

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (ب) (٢) (ب) (٣) (جـ)

(٤) (جـ) (٥) (د) (٦) (د)

إرشادات الحل :

(١) ∵ المجال ح − {−٢ ، ٢}

∴ |س| + أ = ٠

عندما س = ±٢ ∴ أ = −٢

(٢) ∵ د(س + ٢) = |س + ٢ − ٢| + ٤

= |س| + ٤

، ∵ د(س + ٢) = ٦ ∴ |س| + ٤ = ٦

∴ |س| = ٢ ∴ س = ±٢

∴ مجموعة الحل = {٢ ، −٢}

(٣) ∵ د(س + ٢) = |س + ٢ − ٢| + ٤

= |س| + ٤

، ∵ د(س + ٢) = ٣ ∴ |س| + ٤ = ٣

∴ |س| = −١ ∴ مجموعة الحل = ∅

④ ∵ |س − ٢| = |٢ − س| لجميع قيم س

∴ مجموعة الحل = ح

⑤ ∵ $|س + ١|^{٢} + |٢س + ٣| = ٠$

∴ س + ١ = ٠ ومنها س = −١

وفي نفس الوقت يكون ٢س + ٣ = ٠

ومنها س = $\frac{-٣}{٢}$ وهذا تعارض.

∴ مجموعة الحل = ∅

⑥ ∵ |(س − ١)(س − ٢)| = |س − ٢|

∴ |س − ٢||س − ١| − |س − ٢| = ٠

∴ |س − ٢|(|س − ١| − ١) = ٠

∴ |س − ٢| = ٠ ومنها س = ٢

أو |س − ١| = ١

∴ س − ١ = ±١ ومنها س = ٠ أو ٢

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٢ ، ٣}

إجابات تمارين 6

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (جـ)	③ (ب)	④ (جـ)
⑤ (جـ)	⑥ (أ)	⑦ (ب)	⑧ (د)
⑨ (د)	⑩ (د)	⑪ (ب)	⑫ (جـ)
⑬ (ب)	⑭ (ب)	⑮ (أ)	⑯ (جـ)
⑰ (د)			

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① −٥ ≤ س − ٣ ≤ ٥ ∴ −٢ ≤ س ≤ ٨

∴ مجموعة الحل = [−٢ ، ٨]

② س − ٣ ≥ ٥ ومنها س ≥ ٨

أو س − ٣ ≤ −٥ ومنها س ≤ −٢

∴ مجموعة الحل = ح −]−٢ ، ٨[

③ −٥ < ٢س − ٣ < ٥ ∴ −٢ < ٢س < ٨

∴ −١ < س < ٤

∴ مجموعة الحل =]−١ ، ٤[

④ ٢س + ٥ > ٣ ومنها س > −١

أو ٢س + ٥ < −٣ ومنها س < −٤

مجموعة الحل = ح − [−٤ ، −١]

⑤ −٤ ≤ ٢س + ٦ ≤ ٤

∴ −١٠ ≤ ٢س ≤ −٢ ∴ −٥ ≤ س ≤ −١

∴ مجموعة الحل = [−٥ ، −١]

⑥ |س − ٥| > ٣

∴ س − ٥ > ٣ ومنها س > ٨

، س − ٥ < −٣ ومنها س < ٢

∴ مجموعة الحل = ح − [٢ ، ٨]

⑦ −٧ ≤ ٢س + ٣ ≤ ٧

∴ −١٠ ≤ ٢س ≤ ٤ ∴ −٥ ≤ س ≤ ٢

∴ مجموعة الحل = [−٥ ، ٢]

⑧ |٢س + ٣| ≤ −١ ∴ مجموعة الحل = ∅

⑨ $\sqrt{(س - ٣)^{٢}}$ ≤ ٣ ∴ |س − ٣| ≤ ٣

∴ −٣ ≤ س − ٣ ≤ ٣ ∴ ٠ ≤ س ≤ ٦

∴ مجموعة الحل = [٠ ، ٦]

⑩ ∵ $\sqrt{(س - ١)^{٢}}$ ≥ ٤ ∴ |س − ١| ≥ ٤

∴ س − ١ ≥ ٤ ومنها س ≥ ٥

أو س − ١ ≤ −٤ ومنها س ≤ −٣

∴ مجموعة الحل = ح −]−٣ ، ٥[

⑪ ٢|س − ٢| < ٦ ∴ |س − ٢| < ٣

∴ −٣ < س − ٢ < ٣ ∴ −١ < س < ٥

∴ مجموعة الحل =]−١ ، ٥[

٢

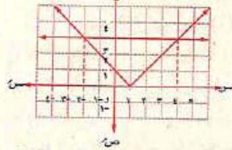
①]−٤ ، ٠[② ح − [−١ ، ٥]

③ [−٥ ، −١]

٣

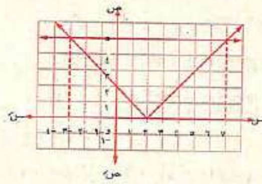
تم الحل بيانيًا وعليك التحقق جبريًا بنفسك

① د(س) = |س − ١| ، ر(س) = ٣



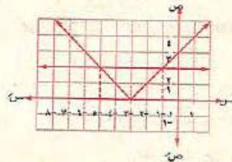
من الرسم : مجموعة الحل =]−٢ ، ٤[

② د(س) = |س − ٢| ، ر(س) = ٥



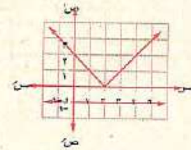
من الرسم : مجموعة الحل = [−٣ ، ٧]

③ د(س) = |س + ٣| ، ر(س) = ٢



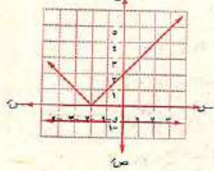
من الرسم : مجموعة الحل = ح −]−٥ ، −١[

④ د(س) = |٢ − س| ، ر(س) = −١



من الرسم : مجموعة الحل = ∅

⑤ د(س) = |س + ٢| ، ر(س) = −١

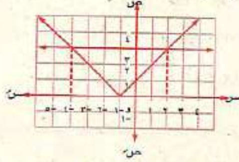


من الرسم : مجموعة الحل = ح

⑥ ∵ $\sqrt{س^{٢} + ٢س + ١} = \sqrt{(س + ١)^{٢}}$

= |س + ١|

∴ د(س) = |س + ١| ، ر(س) = ٣



من الرسم : مجموعة الحل = ح −]−٤ ، ٢[

٤

① ∵ −٤ ≤ س ≤ ٤ ∴ |س| ≤ ٤

② ∵ ٠ < س < ٦

بإضافة (−٣) إلى أطراف المتباينة

∴ −٣ < س − ٣ < ٣ ∴ |س − ٣| < ٣

③ ∵ س ≤ −٢ أو س ≥ ٢

∴ |س| ≥ ٢

٥

① نفرض أن درجة الطالب = س درجة

∴ ٦٠ < س < ١٠٠

وبإضافة (−٨٠) إلى أطراف المتباينة

∴ −٢٠ < س − ٨٠ < ٢٠

∴ |س − ٨٠| < ٢٠

(٢) نفرض أن درجة الحرارة = س درجة

∴ ٣٥ < س < ٤٢

وبإضافة (− ٣٨,٥) إلى أطراف المتباينة

∴ − ٣,٥ < س − ٣٨,٥ < ٣,٥

∴ |س − ٣٨,٥| < ٣,٥

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (جـ)	(٢) (أ)	(٣) (جـ)
(٤) (جـ)	(٥) (د)	

إرشادات الحل :

(١) ∵ س ∈ [−١ ، ٤]   ∴ −١ ≤ س ≤ ٤

∴ −٢ ≤ ٢س ≤ ٨

∴ −٥ ≤ ٢س − ٣ ≤ ٥

∴ |٢س − ٣| ≤ ٥

(٢) ∵ $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$ > ٠

∴ $\sqrt{(س - ٢)^{٢}}$ > ٠   ∴ |س − ٢| > ٠

∴ متحققة لجميع قيم س ∈ ح − {٢}

(٣) ∵ |س| + |ص| ≥ |س + ص|

∴ $\frac{|س| + |ص|}{|س + ص|}$ ≥ ١

∴ أصغر قيمة للمقدار $\frac{|س| + |ص|}{|س + ص|}$ هى ١

(٤) ∵ ٣٢ < ٦١ < ٦٤

∴ $٢^{٥} < ٢^{س} < ٢^{٦}$ ∴ ٥ < س < ٦

∴ |س − ٦| = − س + ٦

، |س − ٥| = س − ٥

∴ |س − ٦| + |س − ٥|

= − س + ٦ + س − ٥ = ١

(٥) ∵ $أ^{٢}$ ب > ٠   ∴ ب موجبة.

، ∵ $\frac{أ}{ب}$ < ٠   ∴ أ سالبة.

∴ $\sqrt{أ^{٢}}$ = |أ| = −أ ، $\sqrt{ب^{٢}}$ = |ب| = ب

∴ $\sqrt{أ^{٢}}$ + $\sqrt{ب^{٢}}$ − (ب − أ)

= −أ + ب − ب + أ = صفر

إجابات التطبيقات الحياتية على الوحدة الأولى

١

(١) د (٥٠٠٠) = $\frac{٥}{٢}$ × ٥٠٠٠ = ١٢٥٠٠ جنيه

(٢) د (١٠٠٠٠) = ٢ × ١٠٠٠٠ + ٢٥٠٠

= ٢٢٥٠٠ جنيه

(٣) د (٥٠٠٠٠) = $\frac{٣}{٢}$ × ٥٠٠٠٠ + ١٠٠٠٠

= ٨٥٠٠٠ جنيه

٢

ح (ل) = ٤ ل

(١) ح (٣) = ٤ × ٣ = ١٢ وحدة طول.

(٢) ح ($\frac{١٥}{٤}$) = ٤ × $\frac{١٥}{٤}$ = ١٥ وحدة طول.

٣

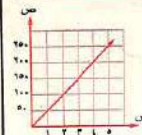
م (نق) = π $نق^{٢}$

(١) م ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٤}$ π وحدة مربعة.

(٢) م (٥) = ٢٥ π وحدة مربعة.

٤

د (س) = ٥٠ س



٥

نفرض أن عرض كل قطعة = ص مترًا

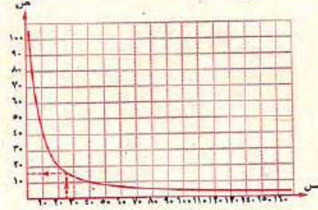
(١) ∵ طول كل منها = س مترًا

، ومساحة كل منها ٤٠٠ متر مربع

∴ س ص = ٤٠٠   ∴ س = $\frac{٤٠٠}{ص}$

∴ س ∝ $\frac{١}{ص}$

(٢) ص = $\frac{٤٠٠}{س}$



(٣) عندما س = ٢٥ مترًا

∴ ص = $\frac{٤٠٠}{٢٥}$ = ١٦ مترًا

٦

(١) ∵ النقطة (٠ ، ٣) تنتمى لمنحنى الدالة

∴ (٠ ، ٣) تحقق معادلة الدالة

د (س) = أ $(س - ٢)^{٢}$ + ٤

∴ ٣ = أ $(٠ - ٢)^{٢}$ + ٤   ∴ ٣ = ٤أ + ٤

∴ ٤أ = −١   ∴ أ = −$\frac{١}{٤}$

(٢) ∵ نقطة رأس المنحنى هى : (٢ ، ٤)

∴ أقصى ارتفاع للبوابة = ٤ أمتار.

(٣) عرض البوابة = ٢ + ٢ = ٤ أمتار.

٧

يتقاطع الطريقان عندما د (س) = ر (س)

∴ |س − ٤| = ٣   ∴ س − ٤ = ± ٣

∴ س − ٤ = ٣   ومنها س = ٧

أ، س − ٤ = −٣   ومنها س = ١

، ∵ ر (٧) = ٣ ، ر (١) = ٣

∴ أ (١ ، ٣) ، ب (٧ ، ٣)

∴ طول $\overline{أب}$ = ٧ − ١ = ٦

∴ المسافة بين أ ، ب = ٦ كيلو متر.

٨

بفرض أن درجة الحرارة المحتملة فى هذا اليوم = س°

∴ |س − ٣٢| = ٧   ∴ س − ٣٢ = ± ٧

∴ س − ٣٢ = ٧   ومنها س = ٣٩

أ، س − ٣٢ = −٧   ومنها س = ٢٥

∴ درجة الحرارة فى المعدل الطبيعى لمدينة القاهرة فى ذلك اليوم هى ٢٥° أ، ٣٩°

٩

بفرض أن الوزن المحتمل لباسم = س كيلو جرام

∴ |س − ٦٠| = ٥   ∴ س − ٦٠ = ± ٥

∴ س − ٦٠ = ٥   ومنها س = ٦٥

أ، س − ٦٠ = −٥   ومنها س = ٥٥

∴ الوزن المحتمل لباسم = ٥٥ كيلو جرام

أ، ٦٥ كيلو جرام.

١٠

∵ ب = (٨ ، ٤)

، ∵ د (٨) = $\frac{٤}{٣}$ |٨ − ٥| = ٤

∴ ب تقع على منحنى الدالة د

∴ الكرة السوداء سوف تسقط فى الجيب ب

١١

بفرض أن طول المتقدم لشغل الوظيفة = س سم

∴ ١٧٨ ≤ س ≤ ١٩٢

وبإضافة (− ١٨٥) إلى أطراف المتباينة.

∴ −٧ ≤ س − ١٨٥ ≤ ٧

∴ |س − ١٨٥| ≤ ٧

إجابات تمارين الوحدة الثانية



الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

إجابات الوحدة الثانية

إجابات تمارين 7

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (د)	③ (جـ)	④ (ب)
⑤ (جـ)	⑥ (ب)	⑦ (د)	⑧ (د)
⑨ (جـ)	⑩ (د)	⑪ (جـ)	⑫ (ب)
⑬ (أ)	⑭ (جـ)	⑮ (د)	⑯ (ب)
⑰ (د)	⑱ (ب)	⑲ (جـ)	⑳ (جـ)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (أ)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (أ)
(٢٥) (ب)	(٢٦) (ب)	(٢٧) (ب)	(٢٨) (د)
(٢٩) (جـ)	(٣٠) (أ)	(٣١) (أ)	(٣٢) (جـ)
(٣٣) (أ)	(٣٤) (ب)	(٣٥) (جـ)	(٣٦) (أ)
(٣٧) (د)	(٣٨) (ب)	(٣٩) (ب)	(٤٠) (د)
(٤١) (أ)	(٤٢) (أ)	(٤٣) (جـ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

1

① $أ^{\frac{3}{4}}$ ② $2\,ل^{\frac{1}{3}}$

③ $أ^{\frac{1}{2}}ب^{\frac{3}{4}}$ ④ $س^{\frac{4}{3}}$

⑤ $س^{\frac{1}{3}-\frac{3}{5}} = س^{\frac{-4}{15}}$ ⑥ $أ^{3-\frac{1}{2}} = أ^{\frac{5}{2}}$

2

① $\sqrt{أ}$ ② $\sqrt[3]{ب^2}$ ③ $5\sqrt[5]{أ^4}$

④ $8\sqrt[3]{ب^4}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt[3]{9س^2}}$ ⑥ $\sqrt[6]{س^5}$

3

① $س^5 = 0$ $\therefore س = 0$

② $س^4 = 81$ $\therefore س = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$

③ $س^2 = -4$ ∴ لا يوجد قيمة فى ح

④ $س^3 = -8$ $\therefore س = \sqrt[3]{-8} = -2$

4

① $\left(\frac{16}{625}\right)^{\frac{-3}{4}} = \left(\frac{625}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{4\times\frac{3}{4}} = \frac{125}{8}$

② $\sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

③ $\left(\sqrt[3]{10^{-2}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(10^{\frac{-2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 10^{-1} = 0.1$

④ $\sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^4} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$

⑤ $\sqrt[6]{(1-\sqrt{7})^6} = |1-\sqrt{7}| = \sqrt{7}-1$

⑥ $\sqrt[5]{(2-\sqrt{5})^5} = 2-\sqrt{5}$

⑦ $\sqrt[5]{243} + \sqrt[9]{512} = 3+2 = 5$

⑧ $(27)^{\frac{2}{3}} - (64)^{\frac{5}{6}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} - (2^6)^{\frac{5}{6}} = 3^2 - 2^5$

$= 9 - 32 = -23$

⑨ $(16)^{\frac{3}{2}} \div (8)^{\frac{2}{3}} = (2^4)^{\frac{3}{2}} \div (2^3)^{\frac{2}{3}}$

$= 2^6 \div 2^2 = 2^4 = 16$

⑩ $\sqrt{16س^2} = 4\,|س|$

⑪ $\sqrt[5]{-32س^5} = -2س$

⑫ $-\sqrt[3]{8أ^6ب^9} = -2أ^2ب^3$

⑬ $\pm\sqrt{64(أ^2+3)^6} = \pm 8(أ^2+3)^3$

⑭ $\sqrt[4]{81أ^{12}} = 3\,|أ^3|$

⑮ $\sqrt[7]{128(أ+ب)^7} = 2(أ+ب)$

5

① $\left(أ^{\frac{-2}{3}}\right)^{-3} = أ^{\frac{-2}{3}\times(-3)} = أ^2$

② $\sqrt[3]{س} \times س^{\frac{1}{2}} = س^{\frac{1}{3}} \times س^{\frac{1}{2}} = س^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{س^5}$

③ $\left(س^{\frac{1}{2}} - س^{\frac{-1}{2}}\right)\left(س^{\frac{1}{2}} + س^{\frac{-1}{2}}\right) = س - س^{-1}$

④ $\left(أ^{\frac{1}{3}} - ب^{\frac{1}{3}}\right)\left(أ^{\frac{2}{3}} + أ^{\frac{1}{3}}ب^{\frac{1}{3}} + ب^{\frac{2}{3}}\right) = أ - ب$

⑤ $\left(س^{\frac{1}{2}} + س^{\frac{-1}{2}}\right)^2 = س + 2 + س^{-1}$

⑥ $\frac{\sqrt{أ}}{أ\sqrt[3]{أ}} = \frac{أ^{\frac{1}{2}}}{أ \times أ^{\frac{1}{3}}} = أ^{\frac{1}{2}-1-\frac{1}{3}} = أ^{\frac{-5}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{أ^5}}$

6

① $\frac{6^2 \times 9^2 \times 8}{(12)^2 \times 3^5} = \frac{(2\times3)^2 \times (3^2)^2 \times 2^3}{(2^2\times3)^2 \times 3^5}$

$= \frac{2^2 \times 3^2 \times 3^4 \times 2^3}{2^4 \times 3^2 \times 3^5}$

$= 2^{2+3-4} \times 3^{2+4-2-5}$

$= 2 \times 3^{-1} = \frac{2}{3}$

② $\frac{6^{4ن} \times (30)^{-2ن} \times 2^{2ن}}{(18)^{2ن} \times (15)^{-2ن}}$

$= \frac{(2\times3)^{4ن} \times (2\times3\times5)^{-2ن} \times 2^{2ن}}{(2\times3^2)^{2ن} \times (5\times3)^{-2ن}}$

$= \frac{2^{4ن} \times 3^{4ن} \times 2^{-2ن} \times 3^{-2ن} \times 5^{-2ن} \times 2^{2ن}}{2^{2ن} \times 3^{4ن} \times 5^{-2ن} \times 3^{-2ن}}$

$= 2^{4ن-2ن+2ن-2ن} \times 3^{4ن-2ن-4ن+2ن}$

$\times 5^{-2ن+2ن} = 2^{2ن} \times 3^0 \times 5^0$

$= 2^{2ن} \times 1 \times 1 = 2^{2ن}$

③ $\frac{(27)^{-3} \times (12)^2}{16 \times (81)^{-2}} = \frac{(3^3)^{-3} \times (3)^2 \times (2^2)^2}{2^4 \times (3^4)^{-2}}$

$= \frac{3^{-9} \times 3^2 \times 2^4}{3^{-8} \times 2^4} = 3^{-9+2+8} = 3$

④ $\frac{9^{4ن+1} \times 4^{2-2ن}}{3^{9ن+1} \times 48^{1-ن}}$

$= \frac{(3^2)^{4ن+1} \times (2^2)^{2-2ن}}{3^{9ن+1} \times 3^{1-ن} \times (2^4)^{1-ن}}$

$= \frac{3^{8ن+2} \times 2^{4-4ن}}{3^{9ن+1} \times 3^{1-ن} \times 2^{4-4ن}}$

$= 3^{8ن+2-9ن-1-1+ن} \times 2^{4-4ن-4+4ن}$

$= 3^0 \times 2^0 = 1 \times 1 = 1$

⑤ $\frac{16^{س-\frac{1}{4}} \times 9^{س+\frac{1}{2}}}{8^{س-1} \times 18^{س+2}}$

$= \frac{(2^4)^{س-\frac{1}{4}} \times (3^2)^{س+\frac{1}{2}}}{(2^3)^{س-1} \times (2\times3^2)^{س+2}}$

$= \frac{2^{4س-1} \times 3^{2س+1}}{2^{3س-3} \times 2^{س+2} \times 3^{2س+4}}$

$= 2^{4س-1-3س+3-س-2} \times 3^{2س+1-2س-4}$

$= 2^0 \times 3^{-3} = \frac{1}{27}$

⑥ $\frac{25}{27} \times \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \times (81)^{\frac{3}{4}}$

$= \frac{5^2}{3^3} \times (5^{-2})^{\frac{1}{2}} \times (3^4)^{\frac{3}{4}}$

$= 5^2 \times 3^{-3} \times 5^{-1} \times 3^3 = 5^1 \times 3^0 = 5$

⑦ $(125)^{\frac{2}{3}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times (15)^{-1}$

$= (5^3)^{\frac{2}{3}} \times (3^4)^{\frac{1}{4}} \times (3\times5)^{-1}$

$= 5^2 \times 3 \times 3^{-1} \times 5^{-1}$

$= 5^{2-1} \times 3^{1-1} = 5 \times 1 = 5$

⑧ $\frac{8^{\frac{3}{8}} \times 64^{\frac{-3}{16}}}{2^{\frac{-5}{4}}} = \frac{(2^3)^{\frac{3}{8}} \times (2^6)^{\frac{-3}{16}}}{2^{\frac{-5}{4}}} = \frac{2^{\frac{9}{8}} \times 2^{\frac{-3}{8}}}{2^{\frac{-5}{4}}}$

$= 2^{\frac{9}{8}-\frac{3}{8}+\frac{5}{4}} = 2^2 = 4$

7

① الطرف الأيمن

$= \frac{2^س \times (3^2)^{س+1}}{3 \times (3^2 \times 2)^س} = \frac{2^س \times 3^{2س+2}}{3 \times 3^{2س} \times 2^س}$

$= 3^{2س+2-1-2س} \times 2^{س-س}$

$= 3 \times 2^0 = 3 \times 1 = 3$

② الطرف الأيمن $= \frac{(7^2)^{3س-\frac{1}{2}} \times (2^2)^{3س+1}}{(2^2)^{3س} \times (7^2)^{3س} \times 2^2}$

$= \frac{7^{6س-1} \times 2^{6س+2}}{2^{6س} \times 7^{6س} \times 2^2}$

$= 2^{6س+2-6س-2}$

$\times 7^{6س-1-6س}$

$= 2^{صفر} \times 7^{-1} = \frac{1}{7}$

8

① خطأ لأن : $\sqrt[4]{س^4} = |س|$

② خطأ لأن : $س = \pm(4)^{\frac{3}{2}} = \pm 8$

9

① $\because س^2 = 36$ $\therefore س = \pm 6$

∴ م.ح $= \{6 ، -6\}$

(٢) ∵ $س^{٢} = -٤٩$ ∴ $م.ح = \emptyset$
(٣) ∵ $س^{٣} = ١٢٥$ ∴ $س = (٥^{٣})^{\frac{١}{٣}}$
∴ $س = ٥$ ∴ $م.ح = \{٥\}$
(٤) ∵ $س^{٥} = -٣٢$ ∴ $س = ((-٢)^{٥})^{\frac{١}{٥}}$
∴ $س = -٢$ ∴ $م.ح = \{-٢\}$
(٥) ∵ $س^{٧} = -١٢٨$ ∴ $س = ((-٢)^{٧})^{\frac{١}{٧}}$
∴ $س = -٢$ ∴ $م.ح = \{-٢\}$
(٦) ∵ $س^{٤} = ١٢٩٦$ ∴ $س = \pm(٦^{٤})^{\frac{١}{٤}}$
∴ $س = \pm ٦$ ∴ $م.ح = \{٦ ، -٦\}$
(٧) ∵ $س^{-٤} = \frac{١}{١٦}$ ∴ $س^{٤} = ١٦$
∴ $س = \pm(٢^{٤})^{\frac{١}{٤}}$ ∴ $س = \pm ٢$
∴ $م.ح = \{٢ ، -٢\}$
(٨) ∵ $س^{\frac{٧}{٢}} = ٢^{٧}$ ∴ $س = (٢^{٧})^{\frac{٢}{٧}} = ٤$
∴ $م.ح = \{٤\}$
(٩) ∵ $س^{-\frac{٥}{٣}} = ٢^{\frac{٥}{٣}}$ ∴ $س = (٢^{\frac{٥}{٣}})^{-\frac{٣}{٥}}$
∴ $س = ٢^{-١} = \frac{١}{٢}$ ∴ $م.ح = \{\frac{١}{٢}\}$
(١٠) ∵ $٣س^{-\frac{٣}{٤}} = \frac{٣}{٨}$ ∴ $س^{-\frac{٣}{٤}} = \frac{٣}{٨} \times \frac{١}{٣}$
∴ $س^{-\frac{٣}{٤}} = \frac{١}{٨}$ ∴ $س^{\frac{٣}{٤}} = ٨$
∴ $س = (٢^{٣})^{\frac{٤}{٣}}$ ∴ $س = ٢^{٤} = ١٦$
∴ $م.ح = \{١٦\}$
(١١) ∵ $س^{-\frac{٥}{٢}} = ٣^{٥}$ ∴ $س = (٣^{٥})^{-\frac{٢}{٥}} = ٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$
∴ $م.ح = \{\frac{١}{٩}\}$
(١٢) ∵ $س^{\frac{٢}{٣}} = ٥^{-٢}$ ∴ $س = \pm(٥^{-٢})^{\frac{٣}{٢}}$
∴ $س = \pm ٥^{-٣} = \pm\frac{١}{١٢٥}$
∴ $م.ح = \{\frac{١}{١٢٥} ، \frac{-١}{١٢٥}\}$
(١٣) ∵ $(س + ١)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$ ∴ $س + ١ = (٢^{٣})^{\frac{٤}{٣}}$
∴ $س + ١ = ١٦$ ∴ $س = ١٥$
∴ $م.ح = \{١٥\}$

(١٤) ∵ $(س - ٥)^{\frac{٥}{٢}} = ٣٢$ ∴ $س - ٥ = (٢^{٥})^{\frac{٢}{٥}}$
∴ $س - ٥ = ٤$ ∴ $س = ٩$
∴ $م.ح = \{٩\}$
(١٥) ∵ $(س - ١)^{\frac{٥}{٣}} = ٢^{٥}$
∴ $س - ١ = (٢^{٥})^{\frac{٣}{٥}} = ٢^{٣} = ٨$
∴ $س = ٩$ ∴ $م.ح = \{٩\}$
(١٦) ∵ $٢س + ٣ = \pm(٣^{٤})^{\frac{٣}{٤}}$
∴ $٢س + ٣ = \pm ٢٧$
∴ $٢س = ٢٤$ ، أ $٢س = -٣٠$
∴ $س = ١٢$ ، أ $س = -١٥$
∴ $م.ح = \{١٢ ، -١٥\}$
(١٧) ∵ $\sqrt{س} + ٢ = ٩$ ∴ $\sqrt{س} = ٧$
∴ $س = ٤٩$ ∴ $م.ح = \{٤٩\}$
(١٨) ∵ $(س^{\frac{٢}{٥}} - ١)(س^{\frac{٢}{٥}} - ٤) = ٠$
∴ $س^{\frac{٢}{٥}} = ١$ ومنها $س = \pm ١$
أ، $س^{\frac{٢}{٥}} = ٤$ ومنها $س = \pm(٢^{٢})^{\frac{٥}{٢}} = \pm ٣٢$
∴ $م.ح = \{١ ، -١ ، ٣٢ ، -٣٢\}$

١٠

(١) $٣^{س+٤} = ٩$ ∴ $٣^{س+٤} = ٣^{٢}$
∴ $س + ٤ = ٢$ ∴ $س = -٢$
∴ $م.ح = \{-٢\}$
(٢) $٢^{س-٥} = \frac{١}{٣٢}$ ∴ $٢^{س-٥} = ٢^{-٥}$
∴ $س - ٥ = -٥$ ∴ $س = ٠$
∴ $م.ح = \{٠\}$
(٣) $٧^{س-٢} = ١$ ∴ $س - ٢ = ٠$
∴ $س = ٢$ ∴ $م.ح = \{٢\}$
(٤) ∵ $٤^{١-س} = \frac{١}{٤}$ ∴ $٤^{١-س} = ٤^{-١}$
∴ $١ - س = -١$ ∴ $س = ٢$
∴ $م.ح = \{٢\}$

(٥) $٥^{س+٣} = ٤^{س+٣}$ ∴ $س + ٣ = ٠$
∴ $س = -٣$ ∴ $م.ح = \{-٣\}$
(٦) $٥^{س+٢} = س^{س+٢}$ ∴ إما $س = ٥$
أ، $س + ٢ = ٠$ ∴ $س = -٢$
∴ $م.ح = \{-٢ ، ٥\}$
(٧) ∵ $٢ \times ٣^{س-٢} = ٥٤$ ∴ $٣^{س-٢} = ٢٧$
∴ $٣^{س-٢} = ٣^{٣}$ ∴ $س - ٢ = ٣$
∴ $س = ٥$ ∴ $م.ح = \{٥\}$
(٨) ∵ $٢^{٣س-٦} = ٥^{س-٢}$
∴ $٢^{٣(س-٢)} = ٥^{س-٢}$
∴ $٨^{س-٢} = ٥^{س-٢}$
∴ $س - ٢ = ٠$ ∴ $س = ٢$
∴ $م.ح = \{٢\}$
(٩) $٢^{س^{٢}-٩} = ١$
∴ $س^{٢} - ٩ = ٠$ ∴ $س^{٢} = ٩$
∴ $س = \pm ٣$ ∴ $م.ح = \{٣ ، -٣\}$
(١٠) $(\frac{٣}{٥})^{٢س-١} = \frac{٢٧}{١٢٥}$
∴ $(\frac{٣}{٥})^{٢س-١} = (\frac{٣}{٥})^{٣}$
∴ $٢س - ١ = ٣$ ∴ $٢س = ٤$
∴ $س = ٢$ ∴ $م.ح = \{٢\}$
(١١) ∵ $(\frac{٣}{٢})^{س-٢} = \frac{٨}{٢٧}$
∴ $(\frac{٣}{٢})^{س-٢} = (\frac{٣}{٢})^{-٣}$
∴ $س - ٢ = -٣$ ∴ $س = -١$
∴ $م.ح = \{-١\}$
(١٢) ∵ $٢^{س} \times ٥^{-س} = \frac{٤}{٢٥}$
∴ $(\frac{٢}{٥})^{س} = (\frac{٢}{٥})^{٢}$
∴ $س = ٢$ ∴ $م.ح = \{٢\}$
(١٣) $(\sqrt{٧})^{|س+٢|} = ٤٩$
∴ $(\sqrt{٧})^{|س+٢|} = (\sqrt{٧})^{٤}$

∴ $|س + ٢| = ٤$ ∴ $س + ٢ = \pm ٤$
∴ إما $س + ٢ = ٤$ ومنها $س = ٢$
أ، $س + ٢ = -٤$ ومنها $س = -٦$
∴ $م.ح = \{٢ ، -٦\}$
(١٤) $٥^{س^{٢}} = ٢٥^{س+٤}$ ∴ $٥^{س^{٢}} = ٥^{٢س+٨}$
∴ $س^{٢} = ٢س + ٨$ ∴ $س^{٢} - ٢س - ٨ = ٠$
∴ $(س + ٢)(س - ٤) = ٠$
∴ $س = -٢$ أ، $س = ٤$ ∴ $م.ح = \{-٢ ، ٤\}$

١١

(١) ∵ $٣^{س} + ٣^{س+١} = ٣٦$
∴ $٣^{س}(١ + ٣) = ٣٦$
∴ $٣^{س} \times ٤ = ٣٦$ ∴ $٣^{س} = ٩$
∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$ ∴ $س = ٢$
∴ مجموعة الحل = $\{٢\}$
(٢) $٥^{س+١} + ٥^{س-١} = ٢٦$
∴ $٥^{س-١}(٥^{٢} + ١) = ٢٦$
∴ $٥^{س-١} = ١$
∴ $س - ١ = ٠$ ∴ $س = ١$
∴ مجموعة الحل = $\{١\}$
(٣) $٣^{س+٢} - ٣^{س+٢} = ١٦٢$
∴ $٣^{س}(٣^{٢} - ٣^{٢}) = ١٦٢$
∴ $٣^{س} \times ١٨ = ١٦٢$
∴ $٣^{س} = ٩$ ∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$
∴ $س = ٢$ ∴ $م.ح = \{٢\}$
(٤) $٢^{٣س+١} - ٢^{٣س-٢} = ٥٦$
∴ $٢^{٣س-٢}(٨ - ١) = ٥٦$
∴ $٢^{٣س-٢} \times ٧ = ٥٦$ ∴ $٢^{٣س-٢} = ٨$
∴ $٢^{٣س-٢} = ٢^{٣}$ ∴ $٣س - ٢ = ٣$
∴ $٣س = ٥$ ∴ $س = \frac{٥}{٣}$
∴ مجموعة الحل = $\{\frac{٥}{٣}\}$

(٥) $\because ٩^{س} - ٣ \times ٣^{س} = ٠$

$\therefore ٣^{٢س} - ٣ \times ٣^{س} = ٠$

$\therefore ٣^{س}(٣^{س} - ٣) = ٠$

$\therefore ٣^{س} = ٠$ (مرفوض)

أ، $٣^{س} - ٣ = ٠$ ومنها $٣^{س} = ٣$

$\therefore س = ١$ $\therefore$ مجموعة الحل $= \{١\}$

(٦) $٢^{س} + ٢^{٥ - س} = ١٢$

$\therefore ٢^{س} + \frac{٢^{٥}}{٢^{س}} = ١٢$ بالضرب × $٢^{س}$

$\therefore ٢^{٢س} + ٣٢ = ١٢ \times ٢^{س}$

$\therefore ٢^{٢س} - ١٢ \times ٢^{س} + ٣٢ = ٠$

$\therefore (٢^{س} - ٤)(٢^{س} - ٨) = ٠$

$\therefore ٢^{س} = ٤$ ومنها $س = ٢$

أ، $٢^{س} = ٨$ ومنها $س = ٣$

$\therefore م.ح = \{٢ ، ٣\}$

(٧) بالضرب × $٢^{س}$

$\therefore ٢^{٢س} - ٦ \times ٢^{س} + ٨ = ٠$

$\therefore (٢^{س} - ٢)(٢^{س} - ٤) = ٠$

$\therefore ٢^{س} = ٢$ ومنها $س = ١$

أ، $٢^{س} = ٤$ ومنها $س = ٢$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{١ ، ٢\}$

(٨) $٤^{س} + ٢^{س+١} = ٨$

$\therefore ٢^{٢س} + ٢(٢)^{س} - ٨ = ٠$

$\therefore (٢^{س} + ٤)(٢^{س} - ٢) = ٠$

$\therefore$ إما $٢^{س} = -٤$ (مرفوض) أ، $٢^{س} = ٢$

$\therefore س = ١$ $\therefore$ مجموعة الحل $= \{١\}$

ثالثا **مسائل تقيس مهارات التفكير**

(١) (جـ)	(٢) (ب)	(٣) (د)
(٤) (أ)	(٥) (أ)	(٦) (د)

إرشادات الحل :

(١) $\because \sqrt{٢} \times \sqrt[٣]{٣} = \sqrt[٦]{س}$

$\therefore (\sqrt[٦]{س})^{٦} = (\sqrt{٢})^{٦} \times (\sqrt[٣]{٣})^{٦}$

$\therefore س = ٨ \times ٩ = ٧٢$

(٢) $٥^{س+١} + ٥^{س} = ٥^{س}(٥^{١} + ١) = ٥^{س} \times ٦$

$\therefore$ العدد $(٥^{س+١} + ٥^{س})$ يقبل القسمة على ٦

(٣) $\because ٣^{أ} = ٤^{ب}$ $\therefore ٣^{\frac{أ}{ب}} = ٤$ $\therefore ٩^{\frac{أ}{ب}} = ١٦$

، $\because ٣^{أ} = ٤^{ب}$ $\therefore ٤^{\frac{ب}{أ}} = ٣$ $\therefore ١٦^{\frac{ب}{أ}} = ٩$

$\therefore ٩^{\frac{أ}{ب}} + ١٦^{\frac{ب}{أ}} = ١٦ + ٩ = ٢٥$

(٤) $\because ٢^{أ} = ٣$ $\therefore ٢^{أب} = ٣^{ب} = ٧$

$\therefore ٢^{أبجـ} = ٧^{جـ} = ١١$

(٥) $\because$ ن عدد صحيح زوجي

$\therefore س^{ن} > ٠$ لكل $س \in ح^{*}$

(٦) $\because س^{\frac{٢}{٣}} = أ$ $\therefore س = أ^{\frac{٣}{٢}} = (\sqrt{أ})^{٣}$

$\therefore$ لابد وأن تكون $أ \geq ٠$

أى أن : $أ \in ح^{+} \cup \{٠\}$

نشاط

(١) ٤٥٨,٦٩ (٢) ١,٩

إجابات تمارين 8

أولا **أسئلة الاختيار من متعدد**

(١) (د)	(٢) (د)	(٣) (أ)	(٤) (ب)
(٥) (جـ)	(٦) (جـ)	(٧) (جـ)	(٨) (جـ)
(٩) (أ)	(١٠) (جـ)	(١١) (أ)	(١٢) (جـ)
(١٣) (ب)	(١٤) (جـ)	(١٥) (جـ)	(١٦) (أ)
(١٧) (د)	(١٨) (جـ)	(١٩) (د)	(٢٠) (جـ)
(٢١) (أ)	(٢٢) (د)	(٢٣) (أ)	(٢٤) (أ)
(٢٥) (ب)	(٢٦) (ب)	(٢٧) (جـ)	(٢٨) (جـ)

(٢٩) (ب)	(٣٠) (د)	(٣١) (جـ)	(٣٢) (د)
(٣٣) (أ)	(٣٤) (جـ)	(٣٥) (د)	(٣٦) (ب)
(٣٧) (ب)	(٣٨) (ب)		

ثانيا **الأسئلة المقالية**

١

(١) ليست دالة أسية

(٢) دالة أسية ، أساسها = ٥ ، أسها = س

(٣) ليست دالة أسية (٤) ليست دالة أسية

(٥) دالة أسية ، أساسها = $\frac{٢}{٣}$ ، أسها = س − ١

(٦) ليست دالة أسية

٢

$$\frac{د(س + ٤) - د(س + ٣)}{د(س + ٥) - د(س + ٤)} = \frac{٥^{س+٤} - ٥^{س+٣}}{٥^{س+٥} - ٥^{س+٤}}$$

$$= \frac{٥^{س+٣}(٥ - ١)}{٥^{س+٤}(٥ - ١)} = \frac{١}{٥}$$

٣

الطرف الأيمن = د (أ) × د (ب) $= ٣^{أ} \times ٣^{ب} = ٣^{أ+ب}$

الطرف الأيسر = د (أ + ب) $= ٣^{أ+ب}$

$\therefore$ الطرفان متساويان.

٤

الطرف الأيمن $= \frac{٥^{س+١} \times ٥^{س-١+١}}{٥^{س-٢+١} \times ٥^{س+١+١}}$

$= \frac{٥^{س+١} \times ٥^{س}}{٥^{س-١} \times ٥^{س+٢}}$

$= ٥^{س+١+س-س+١-س-٢}$

$= ٥^{٠} = ١$

٥

الطرف الأيمن $= \frac{٢^{س+١}}{٢^{س-١}} + \frac{٢^{س-١}}{٢^{س+١}} = ٢^{٢} + \frac{١}{٢^{٢}} = \frac{١٧}{٤}$

٦

(١) $\because د(س) = ٨$ $\therefore ٢^{س} = ٨$

$\therefore ٢^{س} = ٢^{٣}$ $\therefore س = ٣$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{٣\}$

(٢) $\because د(س + ١) = \frac{١}{٣٢}$ $\therefore ٢^{س+١} = \frac{١}{٣٢}$

$\therefore ٢^{س+١} = ٢^{-٥}$ $\therefore س + ١ = -٥$

$\therefore س = -٦$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{-٦\}$

٧

(١) $\because د(س) = ٢٧$ $\therefore ٣^{س+١} = ٢٧$

$\therefore ٣^{س+١} = ٣^{٣}$ $\therefore س + ١ = ٣$

$\therefore س = ٢$ $\therefore م.ح = \{٢\}$

(٢) $\because د(س - ١) = \frac{١}{٩}$ $\therefore ٣^{س-١+١} = \frac{١}{٩}$

$\therefore ٣^{س} = ٣^{-٢}$

$\therefore س = -٢$ $\therefore م.ح = \{-٢\}$

٨

(١) $\because د(س) = ٣٤٣$ $\therefore ٧^{س-٢} = ٣٤٣$

$\therefore ٧^{س-٢} = ٧^{٣}$ $\therefore س - ٢ = ٣$

$\therefore س = ٥$ $\therefore م.ح = \{٥\}$

(٢) $\because د(٢س) = \frac{١}{٤٩}$ $\therefore ٧^{٢س-٢} = \frac{١}{٤٩}$

$\therefore ٧^{٢س-٢} = ٧^{-٢}$

$\therefore ٢س - ٢ = -٢$ $\therefore ٢س = ٠$

$\therefore س = ٠$ $\therefore م.ح = \{٠\}$

٩

$\because د(٢س - ١) + د(س - ٢) = ٥٠$

$\therefore ٧^{(٢س-١)+١} + ٧^{(س-٢)+١} = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢س} + ٧^{س-١} = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢س} + ٧^{-١} \times ٧^{س} = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢س} + \frac{١}{٧} \times ٧^{س} = ٥٠$ (بالضرب × ٧)

$\therefore ٧ \times ٧^{٢س} + ٧^{س} - ٣٥٠ = ٠$

$\therefore (٧ \times ٧^{س} + ٥٠)(٧^{س} - ٧) = ٠$

$\therefore ٧ \times ٧^{س} + ٥٠ = ٠$ ومنها $٧^{س} = \frac{-٥٠}{٧}$ (مرفوض)

أ، $٧^{س} - ٧ = ٠$ $\therefore ٧^{س} = ٧$ $\therefore س = ١$

١٠

$\because ٣^{س+١} + ٣^{س-١} = ٩٠$

$\therefore ٣^{س-١}(٩ + ١) = ٩٠$ $\therefore ٣^{س-١} = ٣^{٢}$

$\therefore س - ١ = ٢$ $\therefore س = ٣$

١١

$\because ٤^{س+١} + ٤^{س-١} = ٦٨$

$\therefore ٤^{س-١}(١٦ + ١) = ٦٨$ $\therefore ٤^{س-١} = ٤$

$\therefore س - ١ = ١$ $\therefore س = ٢$

١٢

$\because د_{١}(٢س - ١) + د_{٢}(س + ١) = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢س-١} + ٩^{س+١} = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢س-١} + ٣^{٢س+٢} = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢س}(٣^{-١} + ٣^{٢}) = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢س} \times \frac{٢٨}{٣} = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢س} = ٧٥٦ \times \frac{٣}{٢٨}$

$\therefore ٣^{٢س} = ٨١$ $\therefore ٣^{٢س} = ٣^{٤}$

$\therefore ٢س = ٤$ $\therefore س = ٢$

١٣

$\because ٧^{٢س-١} + ٧^{٢س+١} = \frac{٥٠}{٤٩}$

$\therefore ٧^{٢س-١}(١ + ٤٩) = \frac{٥٠}{٤٩}$

$\therefore ٧^{٢س-١} = ٧^{-٢}$ $\therefore ٢س - ١ = -٢$

$\therefore ٢س = -١$ $\therefore س = -\frac{١}{٢}$

١٤

$\because ٣^{س+١} + ٣^{٢-س} = ٣٠$ وبالضرب × $٣^{س-١}$

$\therefore ٣^{٢س} + ٣^{٢} - ١٠ \times ٣ \times ٣^{س-١} = ٠$

$\therefore ٣^{٢س} - ١٠ \times ٣^{س} + ٩ = ٠$

$\therefore (٣^{س} - ١)(٣^{س} - ٩) = ٠$

$\therefore ٣^{س} = ١$ ومنها س = ٠ أ، $٣^{س} = ٩$ ومنها س = ٢

١٥

$\because ٢^{٢س} - ٦ \times ٢^{س} + ٨ = ٠$

$\therefore (٢^{س} - ٢)(٢^{س} - ٤) = ٠$

$\therefore ٢^{س} = ٢$ ومنها س = ١ أ، $٢^{س} = ٤$ ومنها س = ٢

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}

١٦

الطرف الأيمن $= \frac{٣^{٢س+٢} + ٣^{٢س-١}}{٥ \times ٣^{٢س} - ٧ \times ٣^{٢س-١}}$

$= \frac{٣^{٢س-١}(٣^{٣} + ١)}{٣^{٢س-١}(٥ \times ٣ - ٧)} = \frac{٢٨}{٨} = \frac{٧}{٢}$

١٧

الطرف الأيمن $= \frac{٣^{٣(س+١)-١} \times ٣^{٢(س+٣)-١}}{٣^{٣(س+٣)-١}}$

$= \frac{٣^{٣س+٢} \times ٣^{٢س+٥}}{٣^{٣س+٨}}$

$= ٣^{٣س+٢+٢س+٥-٣س-٨}$

$= ٣^{٢س-١} = د(س)$

١٨

① $د(س) = ٣^{س}$

المجال = ح ، المدى = $ح^{+}$ ، الدالة تزايدية على مجالها.

② $د(س) = ٢^{س}$

المجال = ح ، المدى = $ح^{+}$ ، الدالة تزايدية على مجالها.

③ $د(س) = (\frac{١}{٢})^{س}$

المجال = ح ، المدى = $ح^{+}$ ، الدالة تناقصية على مجالها.

④ $د(س) = ٢^{-(س-١)} = (\frac{١}{٢})^{س-١}$

المجال = ح ، المدى = $ح^{+}$ ، الدالة تناقصية على مجالها.

⑤ $د(س) = ٢^{س-١}$

المجال = ح ، المدى = $ح^{+}$ ، الدالة تزايدية على مجالها.

١٩

① من التمثيل البياني للدالتين :

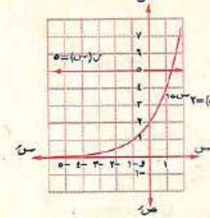
د : $د(س) = ٣^{س}$ ، ر(س) = ٣

∴ مجموعة الحل = {١}

② من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٢^{س+١}$ ، ر : ر (س) = ٥

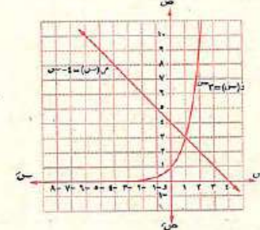
∴ س ≃ ١,٣ ∴ مجموعة الحل = {١,٣}



③ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٣^{س}$ ، ر : ر (س) = ٤ − س

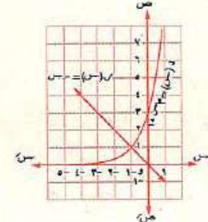
∴ مجموعة الحل = {١}



④ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٣^{س+١}$ ، ر (س) = − س

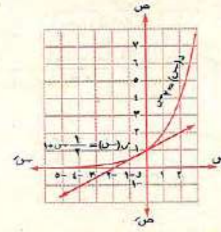
∴ مجموعة الحل = {−١}



⑤ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٢^{س}$ ، ر : ر (س) = $\frac{١}{٢}$ س + ١

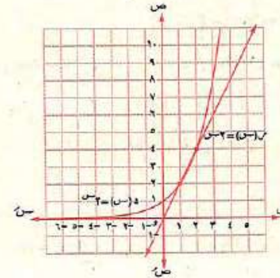
∴ مجموعة الحل = {٠ ، −١}



⑥ من التمثيل البيانى للدالتين :

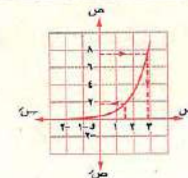
د : د (س) = $٢^{س}$ ، ر : ر (س) = ٢ س

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}



٢٠

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣
د (س)	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩



ومن الرسم :

① د $\left(\frac{٣}{٢}\right)$ ≃ ١,٧

② عندما $٣^{س-١}$ = ٧ $\frac{١}{٢}$ فإن : س ≃ ٢,٨

٢١

جملة المبلغ جـ = أ $\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

= ٨٠٠٠ $\left(١ + \frac{٠,٠٥}{١}\right)^{٧ × ١}$

≃ ١١٢٥٦,٨ جنيه

٢٢

① عدد السكان بعد مرور ن سنة من عام ٢٠٠٠

= أ $(١ + ر)^{ن}$

= ٤٣,٣ $\left(١ + \frac{١,٥}{١٠٠}\right)^{ن}$ = ٤٣,٣ $(١,٠١٥)^{ن}$

② عام ٢٠٢٠ يكون عدد السنين = ٢٠٢٠ − ٢٠٠٠

= ٢٠ سنة

∴ عدد السكان = ٤٣,٣ $(١,٠١٥)^{٢٠}$

≃ ٥٨,٢ مليون نسمة.

٢٣

أ = ٣٦٤٠٠ ، ر = $\frac{٤}{١٠٠}$ = ٠,٠٤ ، ن = عدد المباريات

عدد الحضور (ص) = أ $(١ − ر)^{ن}$

= ٣٦٤٠٠ $(١ − ٠,٠٤)^{ن}$

= ٣٦٤٠٠ $(٠,٩٦)^{ن}$

، فى المباراة العاشرة :

يكون عدد الحضور (ص) = ٣٦٤٠٠ $(٠,٩٦)^{١٠}$

≃ ٢٤٢٠٠ مُشجع.

٢٤

أ = ١٨٥٠ ، ر = $\frac{٩}{١٠٠}$ = ٠,٠٩

① الإنتاج بعد ن سنة : د (ن) = أ $(١ − ر)^{ن}$

= ١٨٥٠ $(١ − ٠,٠٩)^{ن}$

= ١٨٥٠ $(٠,٩١)^{ن}$

② الإنتاج بعد ٨ سنوات = ١٨٥٠ $(٠,٩١)^{٨}$

≃ ٨٧٠ كجم

٢٥

أ = ٢٠٠٠ ، ر = ٠,٠٧ ، ن = ١٠

∴ جملة المبلغ = أ $\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

= ٢٠٠٠ $\left(١ + \frac{٠,٠٧}{س}\right)^{١٠ س}$

① العائد سنوى

∴ س = ١

∴ جملة المبلغ = ٢٠٠٠ $(١ + ٠,٠٧)^{١٠}$

≃ ٣٩٣٤,٣ جنيه

② العائد نصف سنوى

∴ س = ٢

∴ جملة المبلغ = ٢٠٠٠ $\left(١ + \frac{٠,٠٧}{٢}\right)^{١٠ × ٢}$

≃ ٣٩٧٩,٥٨ جنيه

③ العائد شهرى

∴ س = ١٢

∴ جملة المبلغ = ٢٠٠٠ $\left(١ + \frac{٠,٠٧}{١٢}\right)^{١٠ × ١٢}$

≃ ٤٠١٩,٣٢ جنيه.

٢٦

∵ س = ١٦٠٠٠٠ $(٠,٩٥)^{ن}$

① ∵ السيارة جديدة ∴ ن = صفر

∴ س = ١٦٠٠٠٠ $(٠,٩٥)^{صفر}$

= ١٦٠٠٠٠ جنيه

② بعد مرور ٥ سنوات ∴ ن = ٥

∴ س = ١٦٠٠٠٠ $(٠,٩٥)^{٥}$ = ١٢٣٨٠٤,٩٥

∴ سعر السيارة بعد مرور ٥ سنوات

= ١٢٣٨٠٤,٩٥ جنيه.

٢٧

بعد مرور ٨ أسابيع ن = ٨

∴ عدد أسماك السلمون فى البحيرة :

د (٨) = ٢٠٠ $(١,٠٣)^{٨}$ = ٢٥٣ سمكة.

٢٨

$\text{أ} = ٤٫٦ ،\ \text{ر} = \frac{٤}{١٠٠} = ٠٫٠٤$

(١) دالة النمو المستقبلى بعد ن سنة = $\text{أ}(١ + \text{ر})^{\text{ن}}$

$= ٤٫٦ (١ + ٠٫٠٤)^{\text{ن}}$

$= ٤٫٦ (١٫٠٤)^{\text{ن}}$ مليون نسمة

(٢) بعد خمس سنوات :

عدد السكان = $٤٫٦ (١٫٠٤)^{٥} \simeq ٥٫٦$ مليون نسمة.

٢٩

$\text{أ} = ٤٠٠٠ ،\ \text{ر} = \frac{٨}{١٠٠} = ٠٫٠٨$

(١) سعر السلعة بعد مرور ن سنة

$\text{د}(\text{ن}) = \text{أ}(١ + \text{ر})^{\text{ن}}$

$= ٤٠٠٠ (١ + ٠٫٠٨)^{\text{ن}} = ٤٠٠٠ (١٫٠٨)^{\text{ن}}$

(٢) سعر السلعة بعد مرور ٤ سنوات :

$\text{د}(٤) = ٤٠٠٠ (١٫٠٨)^{٤} \simeq ٥٤٤٢$ جنيهًا.

٣٠

$\text{أ} = ١٠٠٠٠٠٠ ،\ \text{ر} = \frac{٦}{١٠٠} = ٠٫٠٦$

(١) دالة النمو د : $\text{د}(\text{ن}) = \text{أ}(١ + \text{ر})^{\text{ن}}$

$= ١٠٠٠٠٠٠ (١ + ٠٫٠٦)^{\text{ن}}$

$= ١٠٠٠٠٠٠ (١٫٠٦)^{\text{ن}}$

(٢) المبلغ بعد ١٠ سنوات :

$\text{د}(١٠) = ١٠٠٠٠٠٠ (١٫٠٦)^{١٠}$

$= ١٧٩٠٨٤٧٫٦٩٧$ جنيه.

٣١

$\text{أ} = ٢٠٠٠ ،\ \text{ر} = \frac{١٠}{١٠٠} = ٠٫١$

(١) دالة النمو الأسى التى تعبر عن سعر السلعة بعد ن سنة هى

د : $\text{د}(\text{ن}) = \text{أ}(١ + \text{ر})^{\text{ن}} = ٢٠٠٠ (١ + ٠٫١)^{\text{ن}}$

$= ٢٠٠٠ (١٫١)^{\text{ن}}$

(٢) $٢٠٠٠ (١٫١)^{\text{ن}} = ٢٤٢٠ \quad \therefore (١٫١)^{\text{ن}} = ١٫٢١$

$\therefore (١٫١)^{\text{ن}} = (١٫١)^{٢} \quad \therefore \text{ن} = ٢$

∴ يصبح سعر السلعة ٢٤٢٠ جنيهًا بعد سنتين.

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (د) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (د)

إرشادات الحل :

(١) ∵ الدالة متناقصة إذا كان : $٠ < ٢\text{أ} < ١$

$\therefore ٠ < \text{أ} < \frac{١}{٢} \quad \therefore \text{أ} \in]٠ ، \frac{١}{٢}[$

(٢) ∵ الدالة تزايدية $\therefore \frac{\text{أ}}{٣} > ١ \quad \therefore \text{أ} > ٣$

(٣) المنحنى يقطع محور السينات عندما ص = ٠

وبالتعويض عن د (س) = ٠ فى الدوال المعطاة

لا نحصل على أى قيمة للمتغير س الا فى الحالة رقم (جـ)

$٣^{\text{س}} - ١ = ٠ \quad \therefore ٣^{\text{س}} = ١ \quad \therefore \text{س} = ٠$

أى المنحنى يقطع محور السينات فى النقطة (٠ ، ٠)

(٤) $\because \text{د}(\text{س}) = \frac{٩^{\text{س}}}{٩^{\text{س}} + ٣}$

$\therefore \text{د}(١ - \text{س}) = \frac{٩^{١-\text{س}}}{٩^{١-\text{س}} + ٣}$

بالضرب بسطًا ومقامًا فى $٩^{\text{س}}$

$\therefore \text{د}(١ - \text{س}) = \frac{٩}{٩ + ٣ \times ٩^{\text{س}}}$

$= \frac{٩}{٣(٣ + ٩^{\text{س}})} = \frac{٣}{٣ + ٩^{\text{س}}}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) + \text{د}(١ - \text{س})$

$= \frac{٩^{\text{س}}}{٩^{\text{س}} + ٣} + \frac{٣}{٣ + ٩^{\text{س}}} = \frac{٩^{\text{س}} + ٣}{٩^{\text{س}} + ٣} = ١$

إجابات تمارين 9

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (د)
(٥) (د) (٦) (د) (٧) (أ) (٨) (أ)
(٩) (جـ) (١٠) (أ) (١١) (ب) (١٢) (د)
(١٣) (جـ) (١٤) (أ) (١٥) (د) (١٦) (جـ)
(١٧) (جـ) (١٨) (ب) (١٩) (ب) (٢٠) (ب)
(٢١) (أ) (٢٢) (جـ) (٢٣) (أ) (٢٤) (ب)
(٢٥) (ب) (٢٦) (جـ) (٢٧) (ب) (٢٨) (جـ)
(٢٩) (أ) (٣٠) (ب) (٣١) (أ) (٣٢) (جـ)
(٣٣) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) $٢^{٧} = ١٢٨$ (٢) $(٤٩)^{\frac{١}{٢}} = ٧$

(٣) $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{٢} = \frac{٤}{٢٥}$ (٤) $٣^{-٤} = \frac{١}{٨١}$

(٥) $(١٠)^{-٣} = ٠٫٠٠١$ (٦) $(٢)^{\frac{٥}{٢}} = ٤\sqrt{٢}$

٢

(١) $\text{لو}_{٥}\ ١٢٥ = ٣$ (٢) $\text{لو}_{٩}\ ٨١ = ٢$

(٣) $\text{لو}_{٥}\ ١ =$ صفر (٤) $\text{لو}_{\sqrt{٢}}\ ٤ = ٤$

(٥) $\text{لو}_{٥}\ \frac{١}{١٢٥} = -٣$ (٦) $\text{لو}_{٢}\ \text{حـ} = \text{ن}$

٣

(١) بفرض : $\text{لو}_{٧}\ ٧ = \text{س}$

$\therefore ٧^{\text{س}} = ٧ \quad \therefore \text{س} = ١$

$\therefore \text{لو}_{٧}\ ٧ = ١$

(٢) بفرض : $\text{لو}_{٥}\ ١ = \text{س}$

$\therefore ٥^{\text{س}} = ١ = ٥^{٠} \quad \therefore \text{س} = ٠$

$\therefore \text{لو}_{٥}\ ١ = ٠$

(٣) بفرض : $\text{لو}_{٣}\ ٩ = \text{س}$

$\therefore ٣^{\text{س}} = ٩ \quad \therefore ٣^{\text{س}} = ٣^{٢}$

$\therefore \text{س} = ٢ \quad \therefore \text{لو}_{٣}\ ٩ = ٢$

(٤) بفرض : $\text{لو}\ ٠٫٠٠٠٠١ = \text{س}$

$\therefore ١٠^{\text{س}} = ٠٫٠٠٠٠١ \quad \therefore ١٠^{\text{س}} = \frac{١}{١٠٠٠٠٠}$

$\therefore ١٠^{\text{س}} = ١٠^{-٥} \quad \therefore \text{س} = -٥$

$\therefore \text{لو}\ ٠٫٠٠٠٠١ = -٥$

(٥) بفرض : $\text{لو}_{٤}\ ٢\sqrt{٢} = \text{س}$

$\therefore ٤^{\text{س}} = ٢\sqrt{٢} \quad \therefore ٢^{٢\text{س}} = ٢^{\frac{٣}{٢}}$

$\therefore ٢\text{س} = \frac{٣}{٢} \quad \therefore \text{س} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore \text{لو}_{٤}\ ٢\sqrt{٢} = \frac{٣}{٤}$

(٦) بفرض : $\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\ ١٢٨ = \text{س}$

$\therefore \left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{س}} = ١٢٨ = ٢^{٧}$

$\therefore \left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{س}} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{-٧} \quad \therefore \text{س} = -٧$

$\therefore \text{لو}_{\frac{١}{٢}}\ ١٢٨ = -٧$

(٧) بفرض : $\text{لو}_{٩}\ \frac{١}{٢٧} = \text{س}$ $\quad \therefore ٩^{\text{س}} = \frac{١}{٢٧}$

$\therefore ٣^{٢\text{س}} = ٣^{-٣} \quad \therefore ٢\text{س} = -٣$

$\therefore \text{س} = \frac{-٣}{٢} \quad \therefore \text{لو}_{٩}\ \frac{١}{٢٧} = \frac{-٣}{٢}$

(٨) بفرض : $\text{لو}_{٠٫٢}\ ١٢٥ = \text{س}$

$\therefore (٠٫٢)^{\text{س}} = ١٢٥ = ٥^{٣}$

$\therefore \left(\frac{١}{٥}\right)^{\text{س}} = \left(\frac{١}{٥}\right)^{-٣} \quad \therefore \text{س} = -٣$

$\therefore \text{لو}_{٠٫٢}\ ١٢٥ = -٣$

(٩) بفرض : $\text{لو}_{\sqrt{٢}}\ ٨\sqrt{٢} = \text{س}$

$\therefore (\sqrt{٢})^{\text{س}} = ٨\sqrt{٢} = (\sqrt{٢})^{٧}$

$\therefore \text{س} = ٧ \quad \therefore \text{لو}_{\sqrt{٢}}\ ٨\sqrt{٢} = ٧$

٤

(١) $\left(\frac{١}{٣}\right)^{-١} = \text{س} \quad \therefore \text{س} = ٣$

(٢) $(\sqrt{٣})^{٤} = \text{س} \quad \therefore \text{س} = ٩$

(٣) $٣^{٤} = \text{س}^{٢} \quad \therefore ٨١ = \text{س}^{٢} \quad \therefore \text{س} = \pm ٩$

(٤) $(٨١)^{\frac{٣}{٤}} = \text{س} \quad \therefore \text{س} = ٢٧$

(٥) $(٨١)^{\frac{١}{٤}} = ٣\text{س} \quad \therefore ٣ = ٣\text{س} \quad \therefore \text{س} = ١$

(٦) $(٠٫٢)^{-٢} = \text{س} \quad \therefore \text{س} = \left(\frac{١٠}{٢}\right)^{٢} = ٢٥$

(٧) ٥$^{-٢}$ = $\frac{١}{س}$ ∴ $\frac{١}{٢٥}$ = $\frac{١}{س}$ ∴ س = ٢٥

(٨) $(\frac{١}{٢})^{-٤}$ = ٢^{س} ∴ ٢^{س} = ٢^{٤} ∴ س = ٤

(٩) (٣)^{٠} = ٢س - ٥   ∴ ١ = ٢س - ٥
∴ س = ٣

(١٠) س + ٥ = ٢^{٣} = ٨   ∴ س = ٣

(١١) س - ١ = ٣^{٢} = ٩   ∴ س = ١٠

(١٢) ٣س - ١ = ٥   ∴ ٣س = ٦
∴ س = ٢

(١٣) ٦$^{\frac{١}{٢}}$ = (س + ٤)$^{\frac{١}{٢}}$ ∴ س + ٤ = ٦
∴ س = ٢

(١٤) |س| = ٢   ∴ س = ± ٢

(١٥) ٥ = |٢س + ١|
∴ ٢س + ١ = ٥ أ، ٢س + ١ = -٥
∴ س = ٢ أ، س = -٣

(١٦) ٢^{٤} = س (س + ٦)
∴ س^{٢} + ٦س - ١٦ = ٠
∴ (س - ٢) (س + ٨) = ٠
∴ س = ٢ أ، س = -٨

(١٧) ٢^{٢} = (س - ١)^{٢} ∴ س - ١ = ± ٢
∴ س = ٣ أ، س = -١

(١٨) ٣ = س^{٢} - ٢س
∴ س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠
∴ (س - ٣) (س + ١) = ٠
∴ س = ٣ أ، س = -١

(١٩) (لو$_{٣}$ س - ٤) (لو$_{٣}$ س - ٥) = ٠
∴ لو$_{٣}$ س = ٤ ومنها س = ٣^{٤} = ٨١
أ، لو$_{٣}$ س = ٥ ومنها س = ٣^{٥} = ٢٤٣

(٢٠) لو$_{١٠}$ س - ٢ = ± ٢
∴ لو$_{١٠}$ س - ٢ = ٢ ومنها لو$_{١٠}$ س = ٤
∴ س = ١٠^{٤} أ، لو$_{١٠}$ س - ٢ = -٢
ومنها لو$_{١٠}$ س = ٠   ∴ س = ١

٥

(١) س^{٢} = ٩   ∴ س = ٣ (ويرفض الحل السالب)
∴ مجموعة الحل = {٣}

(٢) س$^{\frac{٢}{٣}}$ = ٩
∴ س = (٣^{٢})$^{\frac{٣}{٢}}$ = ٣^{٣} = ٢٧
∴ مجموعة الحل = {٢٧}

(٣) س$^{-\frac{٣}{٤}}$ = $\frac{١}{١٠٠٠}$
∴ س = (١٠$^{-٣}$)$^{-\frac{٤}{٣}}$ = ١٠٠٠٠
∴ مجموعة الحل = {١٠٠٠٠}

(٤) (-س)^{٤} = ٨١ = ٣^{٤}
∴ س = -٣   (ويرفض الحل الموجب)
∴ مجموعة الحل = {-٣}

(٥) (س - ١)^{٢} = ٩   ∴ س - ١ = ± ٣
∴ س = ٤ أ، -٢ (مرفوض)
∴ مجموعة الحل = {٤}

(٦) (س - ١)^{٣} = ٢٧ = ٣^{٣} ∴ س - ١ = ٣
∴ س = ٤   ∴ مجموعة الحل = {٤}

(٧) (س - ١)^{٢} = ٧ - س
∴ س^{٢} - ٢س + ١ = ٧ - س
∴ س^{٢} - س - ٦ = ٠
∴ (س + ٢) (س - ٣) = ٠
∴ س = -٢ (مرفوض) أ، س = ٣
∴ مجموعة الحل = {٣}

(٨) (س + ١)$^{\frac{٣}{٤}}$ = ٨
∴ س + ١ = (٢^{٣})$^{\frac{٤}{٣}}$ = ٢^{٤} = ١٦   ∴ س = ١٥
∴ مجموعة الحل = {١٥}

(٩) س^{٢} = ٥س   ∴ س^{٢} - ٥س = ٠
∴ س (س - ٥) = ٠   ∴ س = ٠ (مرفوض)
أ، س = ٥
∴ مجموعة الحل = {٥}

(١٠) س^{٢} = س + ٢   ∴ س^{٢} - س - ٢ = ٠
∴ (س + ١) (س - ٢) = ٠
∴ س = -١ (مرفوض) أ، س = ٢
∴ مجموعة الحل = {٢}

(١١) س^{٢} = ٢س + ٨
∴ س^{٢} - ٢س - ٨ = ٠
∴ (س - ٤) (س + ٢) = ٠
∴ س = ٤ أ، س = -٢ (مرفوض)
∴ مجموعة الحل = {٤}

(١٢) س = $\sqrt{س - ٢}$ + ٢
∴ $\sqrt{س - ٢}$ = س - ٢ وبتربيع الطرفين
∴ س - ٢ = س^{٢} - ٤س + ٤
∴ س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠
∴ (س - ٢) (س - ٣) = ٠
∴ س = ٢ أ، س = ٣
∴ مجموعة الحل = {٢ ، ٣}

٦

(١) ٣^{س} = (٢٧)$^{-١}$ = (٣)$^{-٣}$ ∴ س = -٣

(٢) ٥$^{س - ١}$ = ٦٢٥ = ٥^{٤} ∴ س - ١ = ٤
∴ س = ٥

(٣) ٣$^{س + ٢}$ = ٢٧ = ٣^{٣} ∴ س + ٢ = ٣
∴ س = ١

(٤) ٢٧$^{س^{٢}}$ = ١   ∴ س^{٢} = صفر
∴ س = صفر

(٥) ٤^{س} = ٨$\sqrt{٢}$ ∴ ٢^{٢س} = ٢$^{\frac{٧}{٢}}$
∴ ٢س = $\frac{٧}{٢}$ ∴ س = $\frac{٧}{٤}$

(٦) $(\sqrt{٥})^{س^{٢}}$ = ٦٢٥$\sqrt{٥}$ = $(\sqrt{٥})^{٩}$
∴ س^{٢} = ٩   ∴ س = ± ٣

٧

(١) ١,١٧٦١   (٢) ٤,٧٥٤٩   (٣) -٢,١٨٩٣

٨

(١) ١,٧١٥٩   (٢) ٢٥,٨٢٢٦   (٣) ٠,٥٠١٢

٩

(١) ٢س + ١ > ٠   ∴ س > -$\frac{١}{٢}$
∴ مجال الدالة =]-$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

(٢) س > ٠   ∴ مجال الدالة =]٠ ، ∞[

(٣) س - ٢ > ٠   ∴ س > ٢
∴ مجال الدالة =]٢ ، ∞[

(٤) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن
س > ٠
س ≠ ١
أى أن : مجال الدالة =]٠ ، ∞[- {١}

(٥) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن
س > ٠ ، س - ٢ > ٠ ، س - ٢ ≠ ١   أى أن : س > ٠ ، س > ٢ ، س ≠ ٣
أى أن : مجال الدالة =]٢ ، ∞[- {٣}

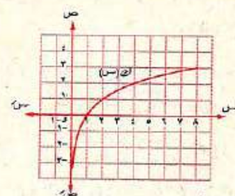
(٦) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق
س > ٠ ، ٢ - س > ٠ ، ٢ - س ≠ ١   أى أن : س > ٠ ، س < ٢ ، س ≠ ١
أى أن : مجال الدالة =]٠ ، ٢[- {١}

١٠

① نأخذ قيم س قوى العدد ٢ :

$٢^{-٢}$ ، $٢^{-١}$ ، $٢^{٠}$ ، $٢^{١}$ ، $٢^{٢}$

س	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤
هـ(س)	٢-	١-	٠	١	٢



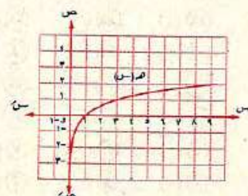
من الرسم :

* المدى = ح
* الدالة تزايدية على مجالها.

② نأخذ قيم س قوى العدد ٣ :

$٣^{-٢}$ ، $٣^{-١}$ ، $٣^{٠}$ ، $٣^{١}$ ، $٣^{٢}$

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
هـ(س)	٢-	١-	٠	١	٢



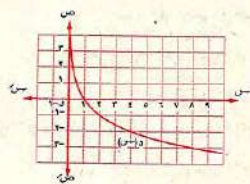
من الرسم :

* المدى = ح
* الدالة تزايدية على مجالها.

③ نأخذ قيم س قوى العدد $\frac{١}{٢}$:

$(\frac{١}{٢})^{-٢}$ ، $(\frac{١}{٢})^{-١}$ ، $(\frac{١}{٢})^{٠}$ ، $(\frac{١}{٢})^{١}$ ، $(\frac{١}{٢})^{٢}$

س	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$
د(س)	٢-	١-	٠	١	٢



من الرسم :

* المدى = ح
* الدالة تناقصية على مجالها.

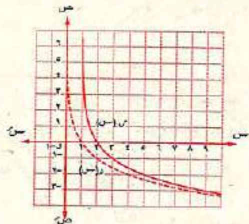
④ منحنى الدالة ى هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها وحدة واحدة في اتجاه $\overrightarrow{و س}$



من الرسم :

* المدى = ح
* الدالة تناقصية على مجالها.

⑤ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها وحدة واحدة في اتجاه $\overleftarrow{و س}$



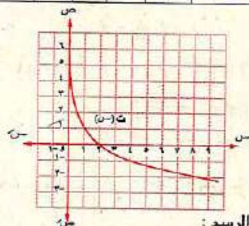
من الرسم :

* المدى = ح   * الدالة تناقصية على مجالها.

⑥ نأخذ قيم س قوى العدد ٢ :

$٢^{-٢}$ ، $٢^{-١}$ ، $٢^{٠}$ ، $٢^{١}$ ، $٢^{٢}$

س	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤
ت(س)	٣	٢	١	٠	١-



من الرسم :

* المدى = ح
* الدالة تناقصية على مجالها.

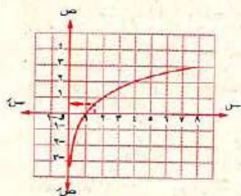
١١

∵ منحنى الدالة يمر بالنقطة (٤ ، ٢)

∴ ٢ = $لو_{أ}$ ٤   ∴ $أ^{٢}$ = ٤   ∴ أ = ٢

(ويرفض الحل السالب)

س	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨
د(س)	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣



من الرسم :

المدى = ح ، الدالة تزايدية على مجالها

، $لو_{٢}$ ١,٥ ≃ ٠,٦

١٢

∵ منحنى الدالة يمر بالنقطة (٨١ ، ٤)

∴ ٤ = $لو_{أ}$ ٨١   ∴ $أ^{٤}$ = ٨١   ∴ أ = ٣

(ويرفض الحل السالب)

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
د(س)	٢-	١-	٠	١	٢

من الرسم :

المجال = $ح^{+}$ ، المدى = ح

، الدالة تزايدية على مجالها

، نقطة التقاطع مع محور السينات (١ ، ٠)

، $لو_{٣}$ ٥ ≃ ١,٥

إجابات تمارين 10

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (جـ)	③ (ب)	④ (أ)
⑤ (أ)	⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (د)
⑨ (جـ)	⑩ (أ)	⑪ (ب)	⑫ (جـ)
⑬ (جـ)	⑭ (د)	⑮ (جـ)	⑯ (جـ)
⑰ (ب)	⑱ (ب)	⑲ (د)	⑳ (ب)
㉑ (أ)	㉒ (أ)	㉓ (ب)	㉔ (ب)
㉕ (جـ)	㉖ (ب)	㉗ (جـ)	㉘ (أ)
㉙ (أ)	㉚ (أ)	㉛ (أ)	㉜ (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

1

① لو$_{٢}$ ٢ + لو$_{٢}$ $\frac{١}{٢}$ = لو$_{٢}$ (٢ × $\frac{١}{٢}$) = لو$_{٢}$ ١ = ٠

حل آخر: لو$_{٢}$ ٢ + لو$_{٢}$ $\frac{١}{٢}$ = لو$_{٢}$ ٢ + لو$_{٢}$ ٢$^{-١}$

= لو$_{٢}$ ٢ − لو$_{٢}$ ٢ = ٠

② لو$_{٢}$ ٤ + لو$_{٢}$ ١٦ = ٢ + ٤ = ٦

حل آخر: لو$_{٢}$ ٤ + لو$_{٢}$ ١٦ = لو$_{٢}$ (٤ × ١٦) = لو$_{٢}$ ٦٤ = ٦

③ لو$_{٣}$ ٥^{٣} + لو$_{٣}$ $\frac{٢٤٣}{١٢٥}$ = لو$_{٣}$ $\frac{٥^{٣} × ٢٤٣}{١٢٥}$

= لو$_{٣}$ ٢٤٣ = لو$_{٣}$ ٣^{٥} = ٥ لو$_{٣}$ ٣ = ٥

④ لو$_{٣}$ ٨١ × لو$_{٩}$ ٣ = لو$_{٣}$ ٣^{٤} × لو$_{٩}$ ٩$^{\frac{١}{٢}}$ = ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٢

⑤ لو$_{٦}$ $\frac{٥٤}{٩}$ = لو$_{٦}$ ٦ = ١

⑥ لو$_{٢}$ (١٢ × $\frac{٢}{٣}$) = لو$_{٢}$ ٨ = لو$_{٢}$ ٢^{٣} = ٣ لو$_{٢}$ ٢ = ٣

⑦ لو $\frac{٤٨ × ١٢٥}{٦}$ = لو ١٠٠٠ = ٣

⑧ لو$_{٢}$ $\frac{١٤ × ١٥}{١٠٥}$ = لو$_{٢}$ ٢ = ١

⑨ لو$_{٢}$ $\frac{٢}{٢٥}$ + لو$_{٢}$ ٣١٢٥ + لو$_{٢}$ ٢٧ − لو$_{٢}$ $\frac{١٢٥}{١٢}$ − لو$_{٢}$ ٢٤٣

= لو$_{٢}$ $\frac{٢ × ٣١٢٥ × ٢٧ × ١٢}{٢٥ × ١٢٥ × ٢٤٣}$ = لو$_{٢}$ ٤ = ٢

⑩ لو$_{٢}$ ٢^{٤} + لو$_{٢}$ ٢$^{\frac{١}{٢}}$ + لو (١٠)$^{-١}$

= ٤ + $\frac{١}{٢}$ − ١ = ٣ $\frac{١}{٢}$

⑪ $\frac{\text{لو } ١٠ - \text{لو } ٢}{\text{لو } ٥^{٣}}$ = $\frac{\text{لو } ٥}{٣ \text{ لو } ٥}$ = $\frac{١}{٣}$

⑫ $\frac{\text{لو } ٧^{٢} + ٣ \text{ لو } ٧}{\text{لو } ٧}$ = $\frac{٢ \text{ لو } ٧ + ٣ \text{ لو } ٧}{\text{لو } ٧}$ = $\frac{٥ \text{ لو } ٧}{\text{لو } ٧}$ = ٥

⑬ ١ + لو ٣ − لو ٢ − لو ١٥

= ١ + لو ($\frac{٣}{٢ × ١٥}$) = ١ + لو $\frac{١}{١٠}$

= ١ + لو (١٠)$^{-١}$ = ١ − ١ = صفر

⑭ لو ٢٥ + $\frac{\text{لو } ٨ × \text{لو } ١٦}{\text{لو } ٦٤}$ = لو ٢٥ + $\frac{٣ \text{ لو } ٢ × ٤ \text{ لو } ٢}{٦ \text{ لو } ٢}$

= لو ٢٥ + ٢ لو ٢ = لو ٢٥ + لو ٤

= لو (٢٥ × ٤) = لو ١٠٠ = ٢

⑮ لو$_{س ص}$ س + لو$_{س ص}$ ص

= لو$_{س ص}$ س ص = ١

⑯ لو$_{أ ب جـ}$ أ + لو$_{أ ب جـ}$ ب + لو$_{أ ب جـ}$ جـ

= لو$_{أ ب جـ}$ أ ب جـ = ١

⑰ $\frac{١}{\text{لو}_{٢} ١٢}$ + $\frac{١}{\text{لو}_{٨} ١٢}$ + $\frac{١}{\text{لو}_{٩} ١٢}$

= لو$_{١٢}$ ٢ + لو$_{١٢}$ ٨ + لو$_{١٢}$ ٩

= لو$_{١٢}$ (٢ × ٨ × ٩) = لو$_{١٢}$ ١٤٤ = لو$_{١٢}$ (١٢)^{٢}

= ٢ لو$_{١٢}$ (١٢) = ٢

⑱ $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ أ + $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ ب + ٢ لو$_{٣}$ جـ

− لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أ ب}}$ − لو$_{٣}$ ٣ جـ^{٢}

= لو$_{٣}$ أ$^{\frac{١}{٢}}$ + لو$_{٣}$ ب$^{\frac{١}{٢}}$ + لو$_{٣}$ جـ^{٢} − لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أ ب}}$

− (لو$_{٣}$ ٣ + لو$_{٣}$ جـ^{٢})

= لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أ}}$ + لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{ب}}$ + لو$_{٣}$ جـ^{٢} − لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أ ب}}$

− لو$_{٣}$ ٣ − لو$_{٣}$ جـ^{٢}

= لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أ ب}}$ − لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أ ب}}$ − ١ = −١

2

① الطرف الأيمن = لو$_{٤}$ (١٦ × ٦٤) = لو$_{٤}$ ١٠٢٤

= لو$_{٤}$ ٤^{٥} = ٥ لو$_{٤}$ ٤ = ٥

② الطرف الأيمن = لو$_{٣}$ $\frac{٢٤٣}{٩}$ = لو$_{٣}$ ٢٧

= لو$_{٣}$ ٣^{٣} = ٣ لو$_{٣}$ ٣ = ٣

③ الطرف الأيمن = لو$_{٥}$ ٥^{٣} + لو ١٠ + لو$_{٣}$ ٣^{٣}

= ٣ + ١ + ٣ = ٧

④ الطرف الأيمن = لو$_{٢}$ $\frac{٧٧ × ١٣٠ × ٤}{١١ × ٧ × ٦٥}$ = لو$_{٢}$ ٨ = ٣

، الطرف الأيسر = لو$_{٥}$ ٥^{٣} = ٣

∴ الطرفان متساويان.

⑤ الطرف الأيمن = لو ١٢ − لو $\frac{١٦}{٤}$ = لو ١٢ − لو ٤

= لو $\frac{١٢}{٤}$ = لو ٣

⑥ الطرف الأيمن = (لو ١٠ − لو ٥) (لو ١٠٠ − لو ٢٥)

= (لو $\frac{١٠}{٥}$) (لو $\frac{١٠٠}{٢٥}$) = (لو ٢) (لو ٤)

= (لو ٢) (٢ لو ٢) = ٢ (لو ٢)^{٢}

⑦ الطرف الأيمن = $\frac{\text{لو}_{٢} ٣^{٥} - \text{لو}_{٢} ٢^{٥}}{\text{لو}_{٢} ٣^{٣} - \text{لو}_{٢} ٢^{٣}}$

= $\frac{٥ \text{ لو}_{٢} ٣ - ٥ \text{ لو}_{٢} ٢}{٣ \text{ لو}_{٢} ٣ - ٣ \text{ لو}_{٢} ٢}$ = $\frac{٥ (\text{لو}_{٢} ٣ - \text{لو}_{٢} ٢)}{٣ (\text{لو}_{٢} ٣ - \text{لو}_{٢} ٢)}$ = $\frac{٥}{٣}$

⑧ الطرف الأيمن = $\frac{(\text{لو } ٥)^{٢} - ٢ \text{ لو } ٥}{\text{لو } ٥ - ٢}$

= $\frac{(\text{لو } ٥)(\text{لو } ٥ - ٢)}{\text{لو } ٥ - ٢}$ = لو ٥

، الطرف الأيسر = لو ١٠ − لو ٢ = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥

∴ الطرفان متساويان.

3

① (س + ٢) لو ٣ = لو ٦

∴ س = $\frac{\text{لو } ٦ - ٢ \text{ لو } ٣}{\text{لو } ٣}$ ≃ −٠,٣٧

② (س − ١) لو ٥ = لو ٢

∴ س = $\frac{\text{لو } ٢ + \text{لو } ٥}{\text{لو } ٥}$ ≃ ١,٤٣

③ ٧$^{س - ٢}$ = $\frac{١}{٤}$

∴ (س − ٢) لو ٧ = لو $\frac{١}{٤}$

∴ س = $\frac{\text{لو } \frac{١}{٤} + ٢ \text{ لو } ٧}{\text{لو } ٧}$ ≃ ١,٢٩

④ س لو $\frac{٢}{٥}$ = لو ٠,٠٤٢ = ...

∴ س = $\frac{\text{لو } ٠,٠٤٢}{\text{لو } \frac{٢}{٥}}$ ≃ ٣,٤٦

⑤ (س + ١) لو ٧ = (س − ٢) لو ٣

∴ س (لو ٧ − لو ٣) = −٢ لو ٣ − لو ٧

∴ س = $\frac{-٢ \text{ لو } ٣ - \text{لو } ٧}{\text{لو } ٧ - \text{لو } ٣}$ ≃ −٤,٨٩

⑥ (٢س − ٣) لو ٣ = (١ − س) لو ١١

∴ س (٢ لو ٣ + لو ١١) = ٣ لو ٣ + لو ١١

∴ س = $\frac{٣ \text{ لو } ٣ + \text{لو } ١١}{٢ \text{ لو } ٣ + \text{لو } ١١}$ ≃ ١,٢٤

⑦ (س − ٢) لو ٢ = (س + ١) لو ٣

∴ س لو ٢ − ٢ لو ٢ = س لو ٣ + لو ٣

∴ س = $\frac{\text{لو } ٣ + ٢ \text{ لو } ٢}{\text{لو } ٢ - \text{لو } ٣}$ = −٧,٨٤

⑧ س$^{\frac{٨}{٥}}$ = ٩٤,٥ ∴ $\frac{٨}{٥}$ لو |س| = لو ٩٤,٥

∴ لو |س| = $\frac{\text{لو } ٩٤,٥}{\frac{٨}{٥}}$

∴ |س| = (١٠)$^{\frac{٥ \text{ لو } ٩٤,٥}{٨}}$ ≃ ١٧,١٧

∴ س = ± ١٧,١٧

⑨ ٧$^{س - ١}$ (٧^{٢} + ١) = ٣٠٠

∴ ٧$^{س - ١}$ = ٦ ∴ (س − ١) لو ٧ = لو ٦

∴ س = $\frac{\text{لو } ٦ + \text{لو } ٧}{\text{لو } ٧}$ ≃ ١,٩٢

(١٠) $٥^{٢س} - ٢٧ \times ٥^{س} + ٥٠ = ٠$

∴ $(٥^{س} - ٢٥)(٥^{س} - ٢) = ٠$

∴ إما $٥^{س} = ٥^{٢}$ ∴ س = ٢

أ، $٥^{س} = ٢$ ∴ س لو ٥ = لو ٢

∴ س = $\frac{\text{لو } ٢}{\text{لو } ٥}$ ≃ ٠,٤٣ ∴ س = ٢ أ، ٠,٤٣

٤

(١) لو$_{٢}$ ١٤ = لو$_{٢}$ (٧ × ٢) = لو$_{٢}$ ٧ + لو$_{٢}$ ٢

= ٢,٨٠٧ + ١ = ٣,٨٠٧

(٢) لو$_{٢}$ ٥٦ = لو$_{٢}$ (٧ × ٨) = لو$_{٢}$ ٧ + لو$_{٢}$ ٨

= لو$_{٢}$ ٧ + ٣ لو$_{٢}$ ٢

= ٢,٨٠٧ + ٣ = ٥,٨٠٧

(٣) لو$_{٢}$ $\frac{٧}{٤}$ = لو$_{٢}$ ٧ − لو$_{٢}$ ٤ = لو$_{٢}$ ٧ − ٢ لو$_{٢}$ ٢

= ٢,٨٠٧ − ٢ = ٠,٨٠٧

٥

(١) لو ٦ = لو ٢ + لو ٣ = ٠,٣٠١ + ٠,٤٧٧١ = ٠,٧٧٨١

(٢) لو ٩ = لو $٣^{٢}$ = ٢ لو ٣ = ٢ × ٠,٤٧٧١ = ٠,٩٥٤٢

(٣) لو ١٢ = لو ٣ + لو ٤ = لو ٣ + ٢ لو ٢

= ٠,٤٧٧١ + ٢ × ٠,٣٠١ = ١,٠٧٩١

٦

(١) لو س = لو (٣ × ١٠) ∴ س = ٣٠

∴ م.ح = {٣٠}

(٢) لو$_{٥}$ $\frac{س}{٢}$ = ٢ ∴ $\frac{س}{٢}$ = ٢٥

∴ س = ٥٠ ∴ م.ح = {٥٠}

(٣) لو$_{٣}$ (س + ٦) = لو$_{٣}$ $س^{٢}$ ∴ س + ٦ = $س^{٢}$

∴ $س^{٢}$ − س − ٦ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٢ (مرفوض) أ، س = ٣

∴ م.ح = {٣}

(٤) لو$_{٢}$ س (س + ٢) = ٣

∴ س (س + ٢) = $٢^{٣}$ = ٨

∴ $س^{٢}$ + ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٤ (مرفوض) أ، س = ٢

∴ م.ح = {٢}

(٥) لو $\frac{س + ٣}{٢}$ = لو س ∴ $\frac{س + ٣}{٢}$ = س

∴ س + ٣ = ٢ س ∴ ٢ س = ٣

∴ س = $\frac{٣}{٢}$ ∴ م.ح = {$\frac{٣}{٢}$}

(٦) لو$_{٤}$ $\frac{س - ١}{س - ٢}$ = ٢ ∴ $\frac{س - ١}{س - ٢}$ = ٤

∴ س − ١ = ٤ س − ٨ ∴ ٣ س = ٧

∴ س = $\frac{٧}{٣}$ ∴ م.ح = {$\frac{٧}{٣}$}

(٧) لو$_{٣}$ $س^{٢}$ = ٢ ∴ ٢ لو$_{٣}$ س = ٢

∴ لو$_{٣}$ س = ١ ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

(٨) لو (س + ١) (س − ١) = لو (س + ٥)

∴ $س^{٢}$ − ١ = س + ٥

∴ $س^{٢}$ − س − ٦ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = −٢ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٣}

(٩) لو $\frac{س + ٨}{س - ١}$ = ١ ∴ $\frac{س + ٨}{س - ١}$ = ١٠

∴ ١٠ س − ١٠ = س + ٨

∴ ٩ س = ١٨ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

(١٠) لو$_{٥}$ ٢ $س^{٢}$ = لو$_{٥}$ ١٨ ∴ ٢ $س^{٢}$ = ١٨

∴ $س^{٢}$ = ٩ ∴ س = ± ٣

∴ مجموعة الحل = {٣ ، −٣}

(١١) لو$_{٣}$ (٧ $س^{٢}$ − ٤) = لو$_{٣}$ ($س^{٢}$ × ٣)

∴ ٧ $س^{٢}$ − ٤ = ٣ $س^{٢}$ ∴ ٤ $س^{٢}$ = ٤

∴ س = ١ أ، س = −١ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {١}

(١٢) لو (س + ٢) (س − ٢) = لو ١٠ − لو ٢

∴ لو ($س^{٢}$ − ٤) = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥

∴ $س^{٢}$ − ٤ = ٥ ∴ $س^{٢}$ = ٩

∴ س = ٣ (والسالب مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٣}

(١٣) $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} = \frac{\text{لو ٩}}{\text{لو ٤}}$ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} = \frac{\text{٢ لو ٣}}{\text{٢ لو ٢}}$

∴ لو س = لو ٣ ∴ س = ٣

∴ م.ح = {٣}

(١٤) $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٣}} = \frac{\text{لو ٣}}{\text{لو س}}$ ∴ $(\text{لو س})^{٢} = (\text{لو ٣})^{٢}$

∴ لو س = لو ٣ ومنها س = ٣

أ، لو س = − لو ٣ = لو $٣^{-١}$

ومنها س = $\frac{١}{٣}$ ∴ م.ح = {٣ ، $\frac{١}{٣}$}

(١٥) لو س = $\frac{(\text{لو ٣})^{٢} - \text{٣ لو ٣}}{\text{لو ٣} - \text{لو ١٠٠٠}} = \frac{\text{لو ٣ (لو ٣} - ٣)}{\text{لو ٣} - ٣}$ = لو ٣

∴ س = ٣ ∴ مجموعة الحل = {٣}

(١٦) $(\text{لو س})^{٢}$ − لو $س^{٢}$ − ٣ = ٠

∴ $(\text{لو س})^{٢}$ − ٢ لو س − ٣ = ٠

∴ (لو س + ١) (لو س − ٣) = ٠

∴ لو س = −١ أ، لو س = ٣

∴ س = ٠,١ أ، س = ١٠٠٠

∴ م.ح = {٠,١ ، ١٠٠٠}

٧

(١) لو$_{س}$ ٢ + لو$_{س}$ ٣ = ٢ ∴ لو$_{س}$ ٦ = ٢

∴ $س^{٢}$ = ٦ ∴ س = ± $\sqrt{٦}$

ويرفض الحل السالب ∴ س = $\sqrt{٦}$

∴ مجموعة الحل = {$\sqrt{٦}$}

(٢) بالضرب × (لو س)

∴ $(\text{لو س})^{٢}$ − ٢ (لو س) − ٣ = ٠

∴ (لو س + ١) (لو س − ٣) = ٠

∴ لو س = −١ ومنها س = ٠,١

أ، لو س = ٣ ومنها س = ١٠٠٠

∴ مجموعة الحل = {٠,١ ، ١٠٠٠}

(٣) لو ٧ × لو $٣^{٦}$ = لو $٧^{٢}$ × لو $س^{٣}$

∴ ٦ لو ٧ لو ٣ = ٦ لو ٧ لو س

∴ لو ٣ = لو س ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

(٤) بفرض أن لو$_{٢}$ س = ك ∴ لو$_{س}$ ٢ = $\frac{١}{ك}$

∴ ك + $\frac{١}{ك}$ = ٢ ∴ $ك^{٢}$ − ٢ك + ١ = ٠

∴ $(ك - ١)^{٢}$ = ٠ ∴ ك = ١

∴ لو$_{٢}$ س = ١ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

(٥) $(\text{لو س})^{٢}$ = ٩ لو س

∴ $(\text{لو س})^{٢}$ − ٩ لو س = ٠

∴ لو س ($(\text{لو س})^{٢}$ − ٩) = ٠

∴ لو س (لو س − ٣) (لو س + ٣) = ٠

∴ لو س = ٠ ومنها س = ١

أ، لو س = ٣ ومنها س = ١٠٠٠

أ، لو س = −٣ ومنها س = ٠,٠٠١

∴ مجموعة الحل = {١ ، ١٠٠٠ ، ٠,٠٠١}

(٦) لو$_{٢}$ $\frac{س^{٢} + ٦ س + ٩}{س - ١}$ = لو$_{٥}$ $٥^{٤}$ = ٤

∴ $\frac{س^{٢} + ٦ س + ٩}{س - ١}$ = $٢^{٤}$ = ١٦

∴ $س^{٢}$ − ١٠ س + ٢٥ = ٠

∴ $(س - ٥)^{٢}$ = صفر ∴ س = ٥

∴ مجموعة الحل = {٥}

(٧) $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} + \frac{\text{لو س}}{\text{لو ٤}} = \frac{-٣}{٢}$

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} + \frac{\text{لو س}}{\text{٢ لو ٢}} = \frac{-٣}{٢}$

∴ $\frac{\text{٣ لو س}}{\text{٢ لو ٢}} = \frac{-٣}{٢}$ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} = -١$

∴ لو س = لو $٢^{-١}$ ∴ س = $\frac{١}{٢}$

∴ م.ح = $\{\frac{١}{٢}\}$

٨

(١) المحيط = ٢ ($\text{لو}_{٦}$ ٨ + $\text{لو}_{٦}$ ٢٧)

= ٢ ($\text{لو}_{٦}$ (٨ × ٢٧)) = ٢ $\text{لو}_{٦}$ ٢١٦

= ٢ $\text{لو}_{٦}$ $٦^{٣}$ = ٦ سم

(٢) المحيط = $\text{لو}_{\sqrt[٣]{١٠}}$ ٥ + $\text{لو}_{\sqrt[٣]{١٠}}$ ٥ + $\text{لو}_{\sqrt[٣]{١٠}}$ ٤

= $\text{لو}_{\sqrt[٣]{١٠}}$ ٥ × ٥ × ٤ = $\text{لو}_{\sqrt[٣]{١٠}}$ ١٠٠

= ٤ $\text{لو}_{\sqrt[٣]{١٠}}$ $\sqrt[٣]{١٠}$ = ٤ سم

٩

الطرف الأيمن = $\frac{\text{لو أ}}{\text{لو ب}} \times \frac{\text{لو ب}}{\text{لو حـ}} \times \frac{\text{لو حـ}}{\text{لو ء}} \times \frac{\text{لو ء}}{\text{لو أ}}$

= ١ = الطرف الأيسر.

، المقدار = $\frac{\text{لو ٣}}{\text{لو ٢}} \times \frac{\text{لو ٥}}{\text{لو ٣}} \times \frac{\text{لو ١٦}}{\text{لو ٥}} = \frac{\text{٤ لو ٢}}{\text{لو ٢}} = ٤$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (د) (٢) (د) (٣) (د) (٤) (جـ).

إرشادات الحل :

(١) ∵ لو ١ + لو ٢ + لو ٣ = صفر + لو ٢ × ٣ = لو ٦

، ∵ لو (١ + ٢ + ٣) = لو ٦

∴ لو (١ + ٢ + ٣) = لو ١ + لو ٢ + لو ٣

(٢) لو س = $\frac{\text{لو ٣٦ × لو ٥}}{\text{لو ٦}} = \frac{\text{٢ لو ٦ × لو ٥}}{\text{لو ٦}}$ = لو ٢٥

∴ س = ٢٥

، لو ص = $\frac{\text{لو ٦٤ × لو ٦}}{\text{لو ٣٦}} = \frac{\text{لو ٦٤ × لو ٦}}{\text{٢ لو ٦}}$ = لو ٨

∴ ص = ٨

∴ س + ص = ٢٥ + ٨ = ٣٣

(٣) المقدار = $\frac{١}{\text{لو}_{ب}\text{ ب} + \text{لو}_{ب}\text{ أ} + \text{لو}_{ب}\text{ حـ}}$

$+ \frac{١}{\text{لو}_{حـ}\text{ حـ} + \text{لو}_{حـ}\text{ أ} + \text{لو}_{حـ}\text{ ب}}$

$+ \frac{١}{\text{لو}_{أ}\text{ أ} + \text{لو}_{أ}\text{ ب} + \text{لو}_{أ}\text{ حـ}}$

= $\frac{١}{\text{لو}_{ب}\text{ أ ب حـ}} + \frac{١}{\text{لو}_{حـ}\text{ أ ب حـ}} + \frac{١}{\text{لو}_{أ}\text{ أ ب حـ}}$

= $\text{لو}_{أ ب حـ}$ ب + $\text{لو}_{أ ب حـ}$ حـ + $\text{لو}_{أ ب حـ}$ أ

= $\text{لو}_{أ ب حـ}$ أ ب حـ = ١

(٤) ∵ $\frac{١}{\text{لو}_{٢}\text{ س}} + \frac{١}{\text{لو}_{٤}\text{ س}} + \frac{١}{\text{لو}_{٨}\text{ س}} + \frac{١}{\text{لو}_{١٦}\text{ س}} = ٥$

∴ $\text{لو}_{س}$ ٢ + $\text{لو}_{س}$ ٤ + $\text{لو}_{س}$ ٨ + $\text{لو}_{س}$ ١٦ = ٥

∴ $\text{لو}_{س}$ (٢ × ٤ × ٨ × ١٦) = ٥

∴ $\text{لو}_{س}$ ١٠٢٤ = ٥

∴ $س^{٥}$ = ١٠٢٤ = $(٤)^{٥}$ ∴ س = ٤

إجابات التطبيقات الحياتية على الوحدة الثانية

١

أ = ١٠٠٠٠ جنيه ، ن = ٣ سنوات ، حـ = ١٢٥٩٧ جنيه

∴ ر = $\left(\frac{١٢٥٩٧}{١٠٠٠٠}\right)^{\frac{١}{٣}} - ١ \simeq ٠,٠٨$

∴ النسبة المئوية للفائدة = ٠,٠٨ × ١٠٠٪ = ٨٪

٢

ن = ٥ أشهر

∴ ع = ٧٥ $(٤,٢٢)^{\frac{٥}{٦}} \simeq ٢٤٩$

∴ عدد الأرانب المتوقع بعد ٥ أشهر = ٢٤٩ أرنبًا.

٣

ح = ١٣٣١ $\text{سم}^{٣}$

∴ ل = $\sqrt[٣]{١٣٣١}$ = ١١ سم

٤

الزيادة فى طول نصف القطر

= $\left(\frac{٣ \times ٣٦ \pi}{٤ \pi}\right)^{\frac{١}{٣}} - \left(\frac{٣ \times \frac{٣٢}{٣} \pi}{٤ \pi}\right)^{\frac{١}{٣}}$

= $(٢٧)^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}}$ = ١ وحدة طولية.

٥

(١) بعد مرور ٤ أسابيع :

عدد الكائنات (ص) = ٨١٩٢ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤-١}$

= ٨١٩٢ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$

= ١٠٢٤ كائنًا.

(٢) ∵ عدد الكائنات = ٢٥٦ كائنًا

∴ ٨١٩٢ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن-١}$ = ٢٥٦

∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن-١} = \frac{٢٥٦}{٨١٩٢}$ ∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن-١} = \frac{١}{٣٢}$

∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن-١} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥}$ ∴ ن − ١ = ٥

∴ ن = ٦

∴ يصبح عدد الكائنات ٢٥٦ كائنًا بعد ٦ أسابيع.

٦

دالة التكاثر د : ص = ٢٠٠٠٠ $(٢)^{ن}$

(١) عدد الخلايا بعد مرور ٥ ساعات (ص)

= ٢٠٠٠٠ $(٢)^{٥}$ = ٦٤٠٠٠٠ خلية.

(٢) ∵ عدد الخلايا = ٢٥٦٠٠٠٠ خلية.

∴ ٢٠٠٠٠ $(٢)^{ن}$ = ٢٥٦٠٠٠٠

∴ $٢^{ن}$ = ١٢٨ ∴ $٢^{ن} = ٢^{٧}$

∴ ن = ٧

∴ يصبح عدد الخلايا ٢ مليون و٥٦٠ ألف خلية بعد ٧ ساعات.

٧

(١) د (٠) = ٧٠ − ٤ $\text{لو}_{٢}$ ١ = ٧٠ درجة

(٢) د (٧) = ٧٠ − ٤ $\text{لو}_{٢}$ ٨ = ٥٨ درجة

٨

(١) د (٣٦٠٠) = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٣٦٠٠ = ٣٦٠ جنيهًا

(٢) د (٨٠٠٠) = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٨٠٠٠ + ١٠٠ لو (٨٠٠٠ − ٤٩٩٩)

= ١١٤٧,٧٣٦٦ جنيهًا.

٩

(١) أ هو عدد السكان الابتدائى ، ن عدد السنوات

∴ عدد السكان بعد ن سنة = أ $\left(١ + \frac{٧}{١٠٠}\right)^{ن}$

= أ $(١,٠٧)^{ن}$

∴ عدد السكان بعد عام = أ (١,٠٧)

(٢) عندما يتضاعف عدد السكان :

∴ ٢ أ = أ $(١,٠٧)^{ن}$ ∴ ٢ = $(١,٠٧)^{ن}$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ ن لو ١,٠٧ = لو٢ ∴ ن ≃ ١٠ سنوات.

١٠

ع = ٥١٠ $(١,٢)^{ن - ٢٠١٠}$

(١) عام ٢٠١٥ يكون عدد السكان

ع = ٥١٠ $(١,٣)^{٢٠١٥ - ٢٠١٠}$ = ٣٧١٢٩٣ نسمة.

(٢) عندما يصبح عدد السكان ١,٤ مليون نسمة

∴ ١,٤ × $١٠^{٦}$ = ٥١٠ $(١,٣)^{ن - ٢٠١٠}$

∴ $(١,٣)^{ن - ٢٠١٠}$ = ١٤

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ (ن − ٢٠١٠) لو ١,٢ = لو ١٤

∴ ن − ٢٠١٠ = ١٠ ∴ ن ≃ ٢٠٢٠

١١

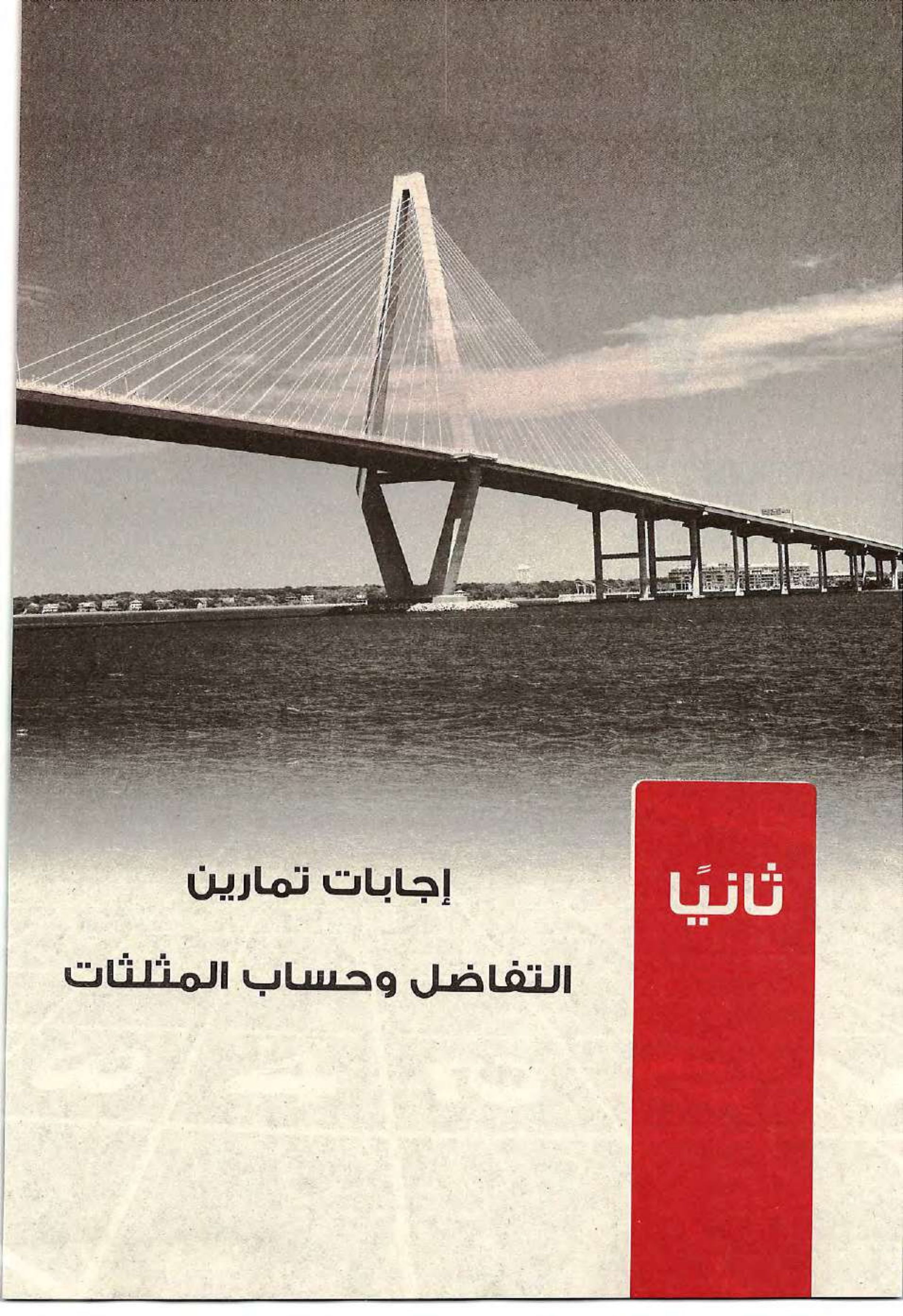
∵ ك = $ك_{٠}$ $(٠,٩)^{ن}$

∴ $\frac{٤٠}{١٠٠}$ $ك_{٠}$ = $ك_{٠}$ $(٠,٩)^{ن}$

∴ ٠,٤ = $(٠,٩)^{ن}$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ ن لو ٠,٩ = لو ٠,٤

∴ ن = $\frac{\text{لو ٠,٤}}{\text{لو ٠,٩}}$ ≃ ٩ سنوات.



ثانيًا

إجابات تمارين

التفاضل وحساب المثلثات

إجابات تمارين الوحدة الثالثة

النهايات



إجابات الوحدة الثالثة

إجابات تمارين 11

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (أ) ③ (د) ④ (جـ)

⑤ أولًا : (أ) ثانيًا : (جـ)
ثالثًا : (د) رابعًا : (د)

⑥ أولًا : (د) ثانيًا : (د)
ثالثًا : (ب) رابعًا : (أ)

⑦ أولًا : (د) ثانيًا : (جـ)
ثالثًا : (د) رابعًا : (ب)
خامسًا : (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

1

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د (س)	١٣,٥	١٣,٩٥	١٣,٩٩٥	←	١٤	→	١٤,٠٠٥	١٤,٠٥	١٤,٥

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ د (س) = ١٤

2

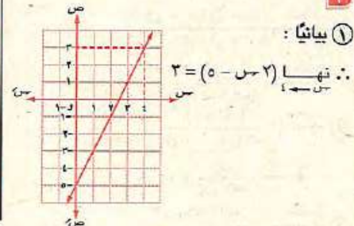
س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د (س)	٠,٢٥٦	٠,٢٥١	٠,٢٥	←	٠,٢٥	→	٠,٢٤٩٩	٠,٢٤٩	٠,٢٤٤

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^٢ - ٤} = \frac{١}{٤}$

3

① بيانيًا :

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهــا}}$ (٢ س − ٥) = ٣



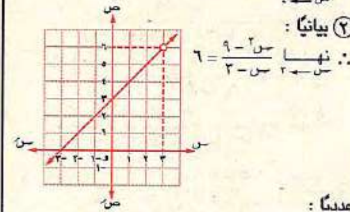
عدديًا :

س	٣,٩	٣,٩٩	٣,٩٩٩	←	٤	→	٤,٠٠١	٤,٠١	٤,١
د (س)	٢,٨	٢,٩٨	٢,٩٩٨	←	٣	→	٣,٠٠٢	٣,٠٢	٣,٢

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهــا}}$ (٢ س − ٥) = ٣

② بيانيًا :

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} - ٣} = ٦$



عدديًا :

س	٢,٩	٢,٩٩	٢,٩٩٩	←	٣	→	٣,٠٠١	٣,٠١	٣,١
د (س)	٥,٩	٥,٩٩	٥,٩٩٩	←	٦	→	٦,٠٠١	٦,٠١	٦,١

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} - ٣} = ٦$

4

① صفر ② غير موجودة. ③ −١
④ ٢ ⑤ ٣ ⑥ ١

5

① صفر ② ٣ ③ ٢ ④ ٢

6

① ١ ② غير موجودة.

7

① ٢ ② ١ ③ ١,٥ ④ ١,٥

8

① ١ ② غير موجودة.

9

① غير معرفة. ② ∞

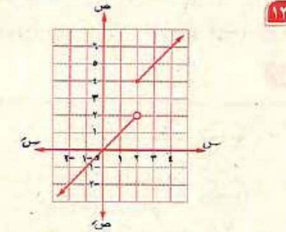
10

① غير معرفة. ② غير موجودة.

11

① ١ ② غير موجودة.
③ غير معرفة. ④ ٢

12



من الرسم نجد أن :

$\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ د (س) غير موجودة.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ) ② (د) ③ (أ) ④ (د)

إرشادات الحل :

① لاحظ أن كلًا من الأشكال (أ) ، (ب) ، (د) تحتوى على قفزة عند س = ٢ وبالتالى لا توجد للدالة نهاية عند س = ٢

أما شكل (جـ) يحتوى على فجوة عند س = ٢ وبالتالى توجد للدالة نهاية عند س = ٢

② عندما θ ← $\frac{\pi}{٢}$

∴ ص ← $\sqrt{(١٠)^٢ + (١٠)^٢}$

أى أن : ص ← ١٠ $\sqrt{٢}$

③ ∵ المنحنى يقطع محور السينات عند س = ٢

∴ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٠)

، ∵ الدالة كثيرة حدود

∴ لا تحتوى على قفزات أو فجوات

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ د (س) = صفر

④ ∵ المنحنى يقطع محور الصادات عند ص = ٣

∴ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٣)

، ∵ الدالة كثيرة حدود.

∴ لا تحتوى على قفزات أو فجوات.

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ د (س) = ٣

إجابات تمارين 12

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (ب) ③ (جـ) ④ (د)
⑤ (ب) ⑥ (ب) ⑦ (ب) ⑧ (ب)
⑨ (ب) ⑩ (أ) ⑪ (ب) ⑫ (د)
⑬ (ب) ⑭ (جـ) ⑮ (جـ) ⑯ (ب)
⑰ (د) ⑱ (جـ) ⑲ (أ) ⑳ (أ)
㉑ (جـ) ㉒ (جـ) ㉓ (جـ) ㉔ (د)
㉕ (د) ㉖ (أ) ㉗ (أ) ㉘ (ب)

ثانيًا الأسئلة المقالية

1

① $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٥)}{(\text{س} - ٥)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} (\text{س} + ٥)$

$= ١٠$

② $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ٢)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} (\text{س} - ٥)$

$= -٣$

③ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢ (٣ \text{س} - ٢)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{١}{٣ \text{س} - ٢}$

$= \frac{-١}{٢}$

④ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{٥ (\text{س} - ٢)}{٤ (\text{س} - ٢)} = \frac{٥}{٤}$

⑤ $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهــا}} \frac{٤ (\text{س} - ٤)(\text{س} + ٤)}{(\text{س} - ٤)}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهــا}} ٤ (\text{س} + ٤) = ٣٢$

⑥ $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهــا}} \frac{٢ (\text{س} - ٤)}{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٣)}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهــا}} \frac{٢}{\text{س} + ٣} = \frac{٢}{٧}$

⑦ $\lim\limits_{س \to -1} \frac{(س - 1)(س + 1)}{س(س + 1)}$

$= \lim\limits_{س \to -1} \frac{س - 1}{س} = 2$

⑧ $\lim\limits_{س \to 5} \frac{س(س^2 - 25)}{(س - 5)}$

$= \lim\limits_{س \to 5} \frac{س(س - 5)(س + 5)}{(س - 5)} = 50$

⑨ $\lim\limits_{س \to -3} \frac{(س + 3)(س + 1)}{(س - 3)(س + 3)}$

$= \lim\limits_{س \to -3} \frac{س + 1}{س - 3} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

⑩ $\lim\limits_{س \to 2} \frac{س(س - 2)}{(س - 2)(س + 1)}$

$= \lim\limits_{س \to 2} \frac{س}{س + 1} = \frac{2}{3}$

⑪ $\lim\limits_{س \to -1} \frac{(س - 4)(س + 1)}{(س - 2)(س + 1)}$

$= \lim\limits_{س \to -1} \frac{س - 4}{س - 2} = \frac{5}{3}$

⑫ $\lim\limits_{س \to \frac{1}{2}} \frac{(2س - 1)(س - 2)}{(2س - 1)}$

$= \lim\limits_{س \to \frac{1}{2}} (س - 2) = -\frac{3}{2}$

⑬ $\lim\limits_{س \to \frac{3}{2}} \frac{(2س - 3)(س + 1)}{(2س - 3)(2س + 3)}$

$= \lim\limits_{س \to \frac{3}{2}} \frac{س + 1}{2س + 3} = \frac{5}{12}$

⑭ $\lim\limits_{س \to -3} \frac{(2س - 1)(س + 3)}{(س - 2)(س + 3)}$

$= \lim\limits_{س \to -3} \frac{2س - 1}{س - 2} = \frac{7}{5}$

⑮ $\lim\limits_{س \to 9} \frac{-(س - 9)}{(س - 9)(س + 9)}$

$= \lim\limits_{س \to 9} \frac{-1}{س + 9} = \frac{-1}{18}$

٢

① $\lim\limits_{س \to 0} \frac{(س + 2 - 2)(س + 2 + 2)}{س(س + 1)}$

$= \lim\limits_{س \to 0} \frac{س + 4}{س + 1} = 4$

② $\lim\limits_{س \to 0} \frac{4س^2 - 4س}{5س}$

$= \lim\limits_{س \to 0} \frac{4س(س - 1)}{5س}$

$= \lim\limits_{س \to 0} \frac{4(س - 1)}{5} = \frac{-4}{5}$

③ $\lim\limits_{س \to 2} \frac{(س - 3 - 1)(س - 3 + 1)}{(س - 2)(2س + 1)}$

$= \lim\limits_{س \to 2} \frac{س - 4}{2س + 1} = \frac{-2}{5}$

④ $\lim\limits_{س \to -2} \frac{(س + 5 - 3)(س + 5 + 3)}{(س + 2)(س - 2)}$

$= \lim\limits_{س \to -2} \frac{س + 8}{س - 2} = \frac{-3}{2}$

⑤ $\lim\limits_{س \to 2} \frac{(س^2 - 4)(س^2 + 5)}{س - 2}$

$= \lim\limits_{س \to 2} \frac{(س - 2)(س + 2)(س^2 + 5)}{(س - 2)}$

$= \lim\limits_{س \to 2} (س + 2)(س^2 + 5) = 36$

⑥ $\lim\limits_{س \to 2} \frac{(س - 2)^2(س + 2)^2}{(س - 2)}$

$= \lim\limits_{س \to 2} (س - 2)(س + 2)^2 =$ صفر

⑦ $\lim\limits_{س \to -2} \frac{(س + 2)}{(س + 2)(س - 2)(س^2 + 4)}$

$= \lim\limits_{س \to -2} \frac{1}{(س - 2)(س^2 + 4)} = -\frac{1}{32}$

⑧ $\lim\limits_{س \to 1} \frac{س^{\frac{1}{2}}(س^3 - 1)}{س(س - 1)}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{س^{\frac{1}{2}}(س - 1)(س^2 + س + 1)}{س(س - 1)}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{س^2 + س + 1}{س^{\frac{1}{2}}} = 3$

⑨ $\lim\limits_{س \to 1} \frac{س^2(س - 1) + 2(س - 1)}{(س - 1)}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{(س - 1)(س^2 + 2)}{(س - 1)}$

$= \lim\limits_{س \to 1} (س^2 + 2) = 3$

⑩ $\lim\limits_{س \to -1} \frac{2س^3 - 2س - س^2 + 1}{س^3 + 1}$

$= \lim\limits_{س \to -1} \frac{2س(س^2 - 1) - (س^2 - 1)}{(س^3 + 1)}$

$= \lim\limits_{س \to -1} \frac{(س^2 - 1)(2س - 1)}{(س^3 + 1)}$

$= \lim\limits_{س \to -1} \frac{(س - 1)(س + 1)(2س - 1)}{(س + 1)(س^2 - س + 1)}$

$= \lim\limits_{س \to -1} \frac{(س - 1)(2س - 1)}{س^2 - س + 1} = 2$

⑪ $\lim\limits_{س \to 3} \frac{5}{س} + \lim\limits_{س \to 3} \frac{س(س - 3)}{س - 3}$

$= \frac{5}{3} + 3 = \frac{14}{3}$

⑫ $\lim\limits_{س \to -1} \frac{س^2 - 3س - 4}{س^2 - 1}$

$= \lim\limits_{س \to -1} \frac{(س + 1)(س - 4)}{(س + 1)(س - 1)}$

$= \lim\limits_{س \to -1} \frac{س - 4}{س - 1} = \frac{5}{2}$

⑬ $\lim\limits_{س \to 1} \left(\frac{1}{س - 1} - \frac{3}{(س - 1)(س^2 + س + 1)}\right)$

$= \lim\limits_{س \to 1} \left(\frac{س^2 + س + 1 - 3}{(س - 1)(س^2 + س + 1)}\right)$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{(س - 1)(س + 2)}{(س - 1)(س^2 + س + 1)}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{س + 2}{س^2 + س + 1} = 1$

٣

* باستخدام القسمة المطولة فى المسائل التالية نقسم كلاً من البسط والمقام على العامل الصفرى فنجد أن :

① $\lim\limits_{س \to 4} \frac{(س - 4)(س^2 + 4س + 1)}{س - 4}$

$= \lim\limits_{س \to 4} (س^2 + 4س + 1) = 33$

② $\lim\limits_{س \to 4} \frac{س(س - 4)(س^2 + 4س - 5)}{(س - 4)}$

$= \lim\limits_{س \to 4} س(س^2 + 4س - 5) = 108$

③ $\lim\limits_{س \to 2} \frac{(س - 2)(س^2 + س - 3)}{س - 2}$

$= \lim\limits_{س \to 2} (س^2 + س - 3) = 3$

④ $\lim\limits_{س \to -3} \frac{(س + 3)(س^2 - 3س - 1)}{(س + 3)(س - 1)}$

$= \lim\limits_{س \to -3} \frac{س^2 - 3س - 1}{س - 1} = \frac{-17}{4}$

⑤ $\lim\limits_{س \to -2} \frac{(س + 2)(2س^2 - س + 2)}{(س + 2)(س^2 - 2س + 4)}$

$= \lim\limits_{س \to -2} \frac{(2س^2 - س + 2)}{س^2 - 2س + 4} = \frac{12}{12} = 1$

⑥ $\lim\limits_{س \to -2} \frac{(س + 2)^2}{(س - 3)(س + 2)^2}$

$= \lim\limits_{س \to -2} \frac{1}{س - 3} = \frac{-1}{5}$

٤

① $\lim\limits_{س \to 9} \frac{(\sqrt{س} - 3)(\sqrt{س} + 3)}{(س - 9)(\sqrt{س} + 3)}$

$= \lim\limits_{س \to 9} \frac{س - 9}{(س - 9)(\sqrt{س} + 3)}$

$= \lim\limits_{س \to 9} \frac{1}{\sqrt{س} + 3} = \frac{1}{6}$

② $\lim\limits_{س \to 5} \frac{(\sqrt{س - 1} - 2)(\sqrt{س - 1} + 2)}{(س - 5)(\sqrt{س - 1} + 2)}$

$= \lim\limits_{س \to 5} \frac{س - 1 - 4}{(س - 5)\left[\sqrt{س - 1} + 2\right]}$

$= \lim\limits_{س \to 5} \frac{1}{\sqrt{س - 1} + 2} = \frac{1}{4}$

③ $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{س + ١}{\sqrt{س + ٥} - ٢} \times \dfrac{\sqrt{س + ٥} + ٢}{\sqrt{س + ٥} + ٢}$

$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ١)\left(\sqrt{س + ٥} + ٢\right)}{س + ٥ - ٤}$

$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س + ٥} + ٢\right) = ٤$

④ $\underset{س \to ٦}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ٦)\left(\sqrt{س - ٢} + ٢\right)}{\left(\sqrt{س - ٢} - ٢\right)\left(\sqrt{س - ٢} + ٢\right)}$

$= \underset{س \to ٦}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ٦)\left(\sqrt{س - ٢} + ٢\right)}{(س - ٢ - ٤)}$

$= \underset{س \to ٦}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س - ٢} + ٢\right) = ٤$

⑤ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(\sqrt{س + ٣} - ٢\right)\left(\sqrt{س + ٣} + ٢\right)}{(س - ١)\left(\sqrt{س + ٣} + ٢\right)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ٣ - ٤)}{(س - ١)\left(\sqrt{س + ٣} + ٢\right)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\sqrt{س + ٣} + ٢} = \dfrac{١}{٤}$

⑥ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(\sqrt{٤س - ٣} - ٣\right)\left(\sqrt{٤س - ٣} + ٣\right)}{(س - ٣)\left(\sqrt{٤س - ٣} + ٣\right)}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٤س - ٣ - ٩}{(س - ٣)\left(\sqrt{٤س - ٣} + ٣\right)}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٤}{\sqrt{٤س - ٣} + ٣} = \dfrac{٢}{٣}$

⑦ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(\sqrt{٢س + ٩} - ٣\right)\left(\sqrt{٢س + ٩} + ٣\right)}{س(س + ١)\left(\sqrt{٢س + ٩} + ٣\right)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س + ٩ - ٩}{س(س + ١)\left(\sqrt{٢س + ٩} + ٣\right)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢}{(س + ١)\left(\sqrt{٢س + ٩} + ٣\right)} = \dfrac{١}{٣}$

⑧ $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{س(س - ٥)}{\left(\sqrt{س + ٤} - ٣\right)} \times \dfrac{\left(\sqrt{س + ٤} + ٣\right)}{\left(\sqrt{س + ٤} + ٣\right)}$

$= \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{س(س - ٥)\left(\sqrt{س + ٤} + ٣\right)}{س + ٤ - ٩}$

$= \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} س\left(\sqrt{س + ٤} + ٣\right) = ٣٠$

⑨ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(\sqrt{س} - ١\right)\left(\sqrt{س} + ١\right)}{(س - ١)(س + ٢)\left(\sqrt{س} + ١\right)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س - ١}{(س - ١)(س + ٢)\left(\sqrt{س} + ١\right)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{(س + ٢)\left(\sqrt{س} + ١\right)} = \dfrac{١}{٨}$

⑩ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ٣)(س + ٢)\left(\sqrt{٥س - ٦} + ٣\right)}{\left(\sqrt{٥س - ٦} - ٣\right)\left(\sqrt{٥س - ٦} + ٣\right)}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ٣)(س + ٢)\left(\sqrt{٥س - ٦} + ٣\right)}{٥س - ٦ - ٩}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ٣)(س + ٢)\left(\sqrt{٥س - ٦} + ٣\right)}{٥(س - ٣)}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ٢)\left(\sqrt{٥س - ٦} + ٣\right)}{٥} = ٦$

⑪ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}\right)\left(\sqrt{١ + س} + \sqrt{١ - س}\right)}{٢س\left(\sqrt{١ + س} + \sqrt{١ - س}\right)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ + س - ١ + س}{٢س\left(\sqrt{١ + س} + \sqrt{١ - س}\right)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\sqrt{١ + س} + \sqrt{١ - س}} = \dfrac{١}{٢}$

⑫ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(\sqrt{س + ١} - ٢\right)\left(\sqrt{س + ١} + ٢\right)\left(\sqrt{س - ٢} + ١\right)}{\left(\sqrt{س - ٢} - ١\right)\left(\sqrt{س + ١} + ٢\right)\left(\sqrt{س - ٢} + ١\right)}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ١ - ٤)\left(\sqrt{س - ٢} + ١\right)}{(س - ٢ - ١)\left(\sqrt{س + ١} + ٢\right)}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س - ٢} + ١}{\sqrt{س + ١} + ٢} = \dfrac{١}{٢}$

---

٥ $\because \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$ (لها وجود)

، $\because \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (س - ٢) = ٠$

$\therefore \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} [د(س) - ٥] =$ صفر

$\therefore \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} د(س) = \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (٥) = ٥$

٦ $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ١)(س - أ)}{(س + ١)} = ٤$

$\therefore \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} (س - أ) = ٤$

$\therefore -١ - أ = ٤ \qquad \therefore أ = -٥$

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (أ) ② (د) ③ (د)

إرشادات الحل :

① $\because س\left(د(س) + ١\right) = د(س) + س^٢$

$\therefore س\,د(س) + س = د(س) + س^٢$

$\therefore س\,د(س) - د(س) = س^٢ - س$

$\therefore (س - ١)\,د(س) = س(س - ١)$

$\therefore د(س) = \dfrac{س(س - ١)}{(س - ١)} = س$

حيث $س \neq ١$

$\therefore \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} د(س) = ١$

② $\because \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٢ + أس + ب}{س - ١}$ موجودة وتساوى ٥

، $\because$ المقام = صفر عند س = ١

$\therefore$ البسط = صفر عند س = ١

$\therefore ١ + أ + ب = ٠ \qquad \therefore ب = -أ - ١$

$\therefore \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٢ + أس - أ - ١}{س - ١} = ٥$

$\therefore \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(س^٢ - ١) + (أس - أ)}{س - ١} = ٥$

$\therefore \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ١)(س + ١) + أ(س - ١)}{(س - ١)} = ٥$

$\therefore \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ١)(س + ١ + أ)}{(س - ١)} = ٥$

$\therefore ٢ + أ = ٥ \qquad \therefore أ = ٣$ ومنها $ب = -٤$

$\therefore أ - ب = ٧$

③ $\because ٢ \underset{س \to أ}{\text{نهـا}} د(س)$

$- ٥ \underset{س \to أ}{\text{نهـا}} هـ(س) = ١٠$ (١)

، $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} د(س) + \underset{س \to أ}{\text{نهـا}} هـ(س) = ٦$ (٢)

وبضرب المعادلة (٢) × ٥

$\therefore ٥ \underset{س \to أ}{\text{نهـا}} د(س)$

$+ ٥ \underset{س \to أ}{\text{نهـا}} هـ(س) = ٣٠$ (٣)

بحل (١) ، (٣) : $\therefore ٧ \underset{س \to أ}{\text{نهـا}} د(س) = ٤٠$

$\therefore \underset{س \to أ}{\text{نهـا}} د(س) = \dfrac{٤٠}{٧}$

وبالتعويض فى (٢) :

$\therefore \underset{س \to أ}{\text{نهـا}} هـ(س) = ٦ - \dfrac{٤٠}{٧} = \dfrac{٢}{٧}$

$\therefore \underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \dfrac{د(س)}{هـ(س)} = \dfrac{\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} د(س)}{\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} هـ(س)} = \dfrac{\frac{٤٠}{٧}}{\frac{٢}{٧}}$

$= ٢٠$

إجابات تمارين 13

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (د) ③ (أ) ④ (أ) ⑤ (د)

⑥ (أ) ⑦ (جـ) ⑧ (أ) ⑨ (ب) ⑩ (جـ)

⑪ (ب) ⑫ (د) ⑬ (جـ) ⑭ (ب) ⑮ (د)

⑯ (د) ⑰ (ب) ⑱ (أ) ⑲ (ب) ⑳ (أ)

㉑ (ب) ㉒ (جـ) ㉓ (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٣ - ٢^٣}{س - ٢} = ٣(٢)^٢ = ١٢$

② $\underset{س \to -٥}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٤ - (-٥)^٤}{س - (-٥)} = \dfrac{٤}{١}(-٥)^{٤-١} = -٥٠٠$

(٣) $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^5 - \text{أ}^5}{\text{س} - \text{أ}} = 5\,\text{أ}^4$

(٤) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^5 - 2^5}{\text{س}^2 - 2^2} = \frac{5}{2}(2)^{5-2} = 20$

(٥) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^7 - 2^7}{\text{س}^3 - 2^3} = \frac{7}{3}(2)^{7-3} = \frac{112}{3}$

(٦) $\underset{\text{س}\to \frac{1}{2}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3}{\text{س}^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3}{4}$

(٧) $\underset{\text{س}\to -3}{\text{نها}} \frac{\text{س}^5 - (-3)^5}{\text{س} - (-3)} = 5(-3)^4 = 405$

(٨) $\underset{\text{س}\to -3}{\text{نها}} \frac{\text{س}^4 - (-3)^4}{\text{س}^5 - (-3)^5} = \frac{4}{5}(-3)^{4-5} = \frac{-4}{15}$

(٩) $\underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^5 - (-2)^5}{\text{س}^3 - (-2)^3} = \frac{5}{3}(-2)^{5-3} = \frac{20}{3}$

(١٠) $\underset{\text{س}\to 4}{\text{نها}} \frac{2(\text{س}^3 - 64)}{\text{س}^2 - 16}$

$= 2\underset{\text{س}\to 4}{\text{نها}} \frac{\text{س}^3 - (4)^3}{\text{س}^2 - (4)^2} = 2 \times \frac{3}{2}(4) = 12$

(١١) $\underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^6 - 64}{2(\text{س} + 2)}$

$= \frac{1}{2}\underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^6 - (-2)^6}{\text{س} - (-2)}$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times (-2)^5 = -64$

(١٢) $\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}} \frac{\text{س}(\text{س}^9 + 1)}{\text{س}(\text{س}^6 - 1)}$

$= \underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^9 - (-1)^9}{\text{س}^6 - (-1)^6}$

$= \frac{9}{6}(-1)^3 = -\frac{3}{2}$

(١٣) $-1 \times \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^9 - (1)^9}{\text{س}^7 - (1)^7}$

$= -1 \times \frac{9}{7}(1)^{9-7} = \frac{-9}{7}$

(١٤) $\underset{2\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{(2\text{س})^7 - (1)^7}{(2\text{س})^5 - (1)^5} = \frac{7}{5}(1)^{7-5} = \frac{7}{5}$

(١٥) $\underset{2\text{س}\to -1}{\text{نها}} \frac{(2\text{س})^5 - (-1)^5}{(2\text{س})^6 - (-1)^6} = \frac{5}{6}(-1)^{-1}$

$= -\frac{5}{6}$

(١٦) $\underset{3\text{س}\to -2}{\text{نها}} \frac{(3\text{س})^5 - (-2)^5}{(3\text{س})^3 - (-2)^3}$

$= \frac{5}{3}(-2)^{5-3} = \frac{20}{3}$

٢

(١) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{-7} - (2)^{-7}}{\text{س} - 2} = -7(2)^{-8} = \frac{-7}{256}$

(٢) $\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{-4} - (-1)^{-4}}{\text{س}^{-18} - (-1)^{-18}} = \frac{-4}{-18}(-1)^{14} = \frac{2}{9}$

(٣) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{-5} - (2)^{-5}}{\text{س}^{-7} - (2)^{-7}} = \frac{-5}{-7}(2)^2 = \frac{20}{7}$

(٤) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{-8} - (2)^{-8}}{\text{س} - 2} = \frac{-8}{1} \times (2)^{-8-1}$

$= \frac{-1}{64}$

(٥) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{\frac{1}{7}} - 1^{\frac{1}{7}}}{\text{س} - 1} = \frac{1}{7}$

(٦) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}}{\text{س} - 2} = \frac{1}{3}(2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

(٧) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{\frac{1}{2}}\left[\text{س}^{10} - 1\right]}{\text{س}^{\frac{2}{3}}\left[\text{س}^4 - 1\right]}$

$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \text{س}^{-\frac{1}{6}} \times \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{10} - (1)^{10}}{\text{س}^4 - (1)^4}$

$= 1 \times \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

(٨) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{17} - (1)^{17}}{(3\text{س} + 5)(\text{س} - 1)}$

$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{1}{3\text{س} + 5} \times \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{17} - (1)^{17}}{\text{س} - 1}$

$= \frac{1}{8} \times 17(1)^{16} = \frac{17}{8}$

٣

(١) $\underset{(1+\text{س})\to 1}{\text{نها}} \frac{(1 + \text{س})^{10} - (1)^{10}}{(1 + \text{س})^7 - (1)^7}$

$= \frac{10}{7}(1)^3 = \frac{10}{7}$

(٢) $\underset{(\text{س}-5)\to 1}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - 5)^7 - 1^7}{(\text{س} - 5) - 1} = 7(1)^6 = 7$

(٣) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{(\text{س} + 2)^5 - 2^5}{\text{س}} = 5(2)^4 = 80$

(٤) $\frac{1}{6}\underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نها}} \frac{(3 + \text{هـ})^4 - 3^4}{\text{هـ}}$

$= \frac{1}{6} \times 4(3)^3 = 18$

(٥) $4\underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نها}} \frac{(1 + 4\text{هـ})^8 - (1)^8}{4\text{هـ}}$

$= 4\underset{(1+4\text{هـ})\to 1}{\text{نها}} \frac{(1 + 4\text{هـ})^8 - (1)^8}{(1 + 4\text{هـ}) - (1)}$

$= 4 \times 8(1)^7 = 32$

(٦) $\underset{(\text{س}+2)\to 3}{\text{نها}} \frac{(\text{س} + 2)^4 - 3^4}{(\text{س} + 2) - 3}$

$= 4 \times 3^3 = 108$

(٧) $\frac{-2}{5}\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{(1 - 2\text{س})^5 - 1^5}{-2\text{س}}$

$= \frac{-2}{5}\underset{(1-2\text{س})\to 1}{\text{نها}} \frac{(1 - 2\text{س})^5 - 1^5}{(1 - 2\text{س}) - 1}$

$= \frac{-2}{5} \times 5(1)^4 = -2$

(٨) $2\underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نها}} \frac{(\text{س} + 2\text{هـ})^5 - \text{س}^5}{2\text{هـ}}$

$= 2\underset{(\text{س}+2\text{هـ})\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{(\text{س} + 2\text{هـ})^5 - \text{س}^5}{(\text{س} + 2\text{هـ}) - \text{س}}$

$= 3 \times 5\,\text{س}^4 = 15\,\text{س}^4$

(٩) $\frac{3}{2}\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{1 + 3\text{س}} - 1}{3\text{س}}$

$= \frac{3}{2}\underset{(1+3\text{س})\to 1}{\text{نها}} \frac{(1 + 3\text{س})^{\frac{1}{3}} - (1)^{\frac{1}{3}}}{(1 + 3\text{س}) - (1)}$

$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}(1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

(١٠) $\underset{\text{س}-4\to -2}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - 4)^5 - (-2)^5}{(\text{س} - 4) - (-2)}$

$= \left(\frac{5}{1}\right) \times (-2)^{5-1} = 80$

(١١) $\underset{(\text{س}+3)\to 8}{\text{نها}} \frac{(\text{س} + 3)^{\frac{1}{3}} - (8)^{\frac{1}{3}}}{(\text{س} + 3) - 8}$

$= \frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{12}$

(١٢) $3\underset{(3\text{س}+2)\to -1}{\text{نها}} \frac{(3\text{س} + 2)^9 - (-1)^9}{(3\text{س} + 2) - (-1)}$

$= 3 \times 9(-1)^8 = 27$

(١٣) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{19} - 1 + \text{س}^8 - 1}{\text{س} - 1}$

$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{19} - (1)^{19}}{\text{س} - 1}$

$+ \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^8 - (1)^8}{\text{س} - 1}$

$= 19(1)^{18} + 8(1)^7 = 27$

(١٤) $\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^7 + 1 + \text{س}^9 + 1}{\text{س} + 1}$

$= \underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^7 - (-1)^7}{\text{س} - (-1)}$

$+ \underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^9 - (-1)^9}{\text{س} - (-1)}$

$= 7(-1)^6 + 9(-1)^8 = 16$

٤

(١) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^3 - 2^3}{\text{س}^5 - 2^5} + \underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^4 - 2^4}{\text{س}^7 - 2^7}$

$= \frac{3}{5}(2)^{-2} + \frac{4}{7}(2)^{-3} = \frac{31}{140}$

(٢) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س} - 2}{\text{س}^2 - 4} \times \frac{\text{س}^5 - 243}{\text{س} - 3} \right)$

$= \underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{1}{\text{س} + 2} \times \underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^5 - 3^5}{\text{س} - 3}$

$= \frac{1}{5} \times 5 \times 3^4 = 81$

(٣) $\left(\underset{\text{س}\to -3}{\text{نها}} \frac{\text{س}^4 - (-3)^4}{\text{س}^3 - (-3)^3} \right)^3 = \left[\frac{4}{3}(-3)\right]^3 = -64$

٥

$\because \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{12} - \text{أ}^{12}}{\text{س}^{10} - \text{أ}^{10}} = 30$

$\therefore \frac{12}{10}(\text{أ})^2 = 30 \qquad \therefore \text{أ}^2 = 25$

$\therefore \text{أ} = \pm 5$

$$\lim_{\text{س}\to -1} \frac{\text{س}^{15} - (-1)^{15}}{\text{س} - (-1)} = 15\,(-1)^{14} = 15$$

، $\because \lim_{\text{س}\to \text{ك}} \frac{\text{س}^{5} - \text{ك}^{5}}{\text{س}^{3} - \text{ك}^{3}} = \frac{5}{3}(\text{ك})^{2}$

$\therefore \frac{5}{3}\text{ك}^{2} = 15 \qquad \therefore \text{ك} = \pm 3$

$\because$ النهاية موجودة $\therefore 64 = 2^{\text{ن}}$

$\therefore \text{ن} = 6 \qquad \therefore$ النهاية $= \frac{6}{1} \times 2^{6-1}$

$\therefore \text{ل} = 192$

إجابات تمارين 14

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د)	(٢) (ب)	(٣) (د)	(٤) (د)
(٥) (أ)	(٦) (جـ)	(٧) (د)	(٨) (جـ)
(٩) (أ)	(١٠) (أ)	(١١) (جـ)	(١٢) (جـ)
(١٣) (ب)	(١٤) (د)	(١٥) (ب)	(١٦) (أ)
(١٧) (د)	(١٨) (أ)	(١٩) (د)	(٢٠) (ب)
(٢١) (ب)	(٢٢) (جـ)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (أ)
(٢٥) (أ)	(٢٦) (ب)	(٢٧) (جـ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) بقسمة كل من البسط والمقام على س

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{2 - \frac{5}{\text{س}}}{3 + \frac{8}{\text{س}}} = \frac{2}{3}$$

(٢) بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{2}{\text{س}} - \frac{5}{\text{س}^2}}{2 + \frac{8}{\text{س}^2}} = \text{صفر}$$

(٣) بقسمة كل من البسط والمقام على س

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{2\text{س} - \frac{5}{\text{س}}}{3 + \frac{8}{\text{س}}} = \infty$$

٢

(١) بقسمة كل من البسط والمقام على س

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{5 - \frac{4}{\text{س}}}{3 - \frac{2}{\text{س}}} = \frac{5}{3}$$

(٢) بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{2 + \frac{5}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}^2}}{3 - \frac{7}{\text{س}^2}} = \frac{2}{3}$$

(٣) بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{5}{\text{س}^2} - \frac{6}{\text{س}} - 3}{2 + \frac{1}{\text{س}} + \frac{4}{\text{س}^2}} = \frac{-3}{2}$$

(٤) عند $\text{س} \to \infty$ فإن $|\text{س}| = \text{س}$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^2 - 2}{\text{س}^2 + 1}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{\text{س}^2}}{1 + \frac{1}{\text{س}^2}} = 1$$

(٥) بقسمة كل من البسط والمقام على س^4

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{2 + \frac{2}{\text{س}^2} - \frac{1}{\text{س}^4}}{\frac{5}{\text{س}^4} - \frac{1}{\text{س}^2} - 2} = -1$$

(٦) بقسمة كل من البسط والمقام على س^3

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{7}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}^3}}{4 - \frac{8}{\text{س}^2} + \frac{1}{\text{س}^3}} = \frac{\text{صفر}}{4} = \text{صفر}$$

(٧) بقسمة كل من البسط والمقام على س^4

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{2\text{س} + \frac{3}{\text{س}^3} - \frac{2}{\text{س}^4}}{3 + \frac{5}{\text{س}^2} - \frac{1}{\text{س}^4}} = \frac{\infty}{3} = \infty$$

(٨) بقسمة كل من البسط والمقام على س^4

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{5\text{س}^3 + \frac{2}{\text{س}^3} - \frac{1}{\text{س}^4}}{6 + \frac{13}{\text{س}^4}} = \frac{\infty}{6} = \infty$$

(٩) بقسمة كل من البسط والمقام على س^{14}

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{5}{\text{س}^{14}} - \frac{7}{\text{س}^6} + 2}{\frac{7}{\text{س}^{14}} - 6 + \frac{2}{\text{س}^8}} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

(١٠) $\lim_{\text{س}\to\infty} \left(\frac{7}{\text{س}^2} + \frac{2}{\text{س}} - 3\right) = -3$

(١١)
$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{5}{\text{س}^3} + \frac{4}{\text{س}^2} - 3}{\frac{7}{\text{س}^3} - \frac{2}{\text{س}^2} + 8} = \frac{-3}{8}$$

(١٢) عند $\text{س} \to \infty$ فإن: $|2\text{س}|^2 \to (2\text{س})^2$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{5\text{س}^3 - 4\text{س}^2 + 2}{7 - \text{س} + 8\text{س}^3}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على س^3

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{5 - \frac{4}{\text{س}} + \frac{2}{\text{س}^3}}{\frac{7}{\text{س}^3} - \frac{1}{\text{س}^2} + 8} = \frac{5}{8}$$

(١٣) $\lim_{\text{س}\to\infty} (\text{س}^3 + 5\text{س}^2 + 1)$

$= \infty + \infty + 1 = \infty$

(١٤) $\lim_{\text{س}\to\infty} (\text{س}^2 - \text{س} + 5) = \infty - \infty$

= كمية غير معينة

$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \text{س}^2 \left(1 - \frac{1}{\text{س}} + \frac{5}{\text{س}^2}\right)$

$= \lim_{\text{س}\to\infty} \text{س}^2 \times \lim_{\text{س}\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\text{س}} + \frac{5}{\text{س}^2}\right)$

$= \infty \times 1 = \infty$

٣

(١) بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{3 - \frac{4}{\text{س}} + \frac{5}{\text{س}^2}}{\left(1 + \frac{2}{\text{س}}\right)^2} = \frac{3}{1} = 3$$

(٢) بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\left(2 + \frac{3}{\text{س}}\right)^2}{\frac{5}{\text{س}^2} - \frac{3}{\text{س}} - 1} = \frac{4}{-1} = -4$$

(٣) بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{6 - \frac{5}{\text{س}}}{\left(\frac{3}{\text{س}} - 1\right)\left(\frac{2}{\text{س}} + 1\right)} = \frac{6}{-1} = -6$$

(٤) بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)\left(5 - \frac{3}{\text{س}}\right)}{1 + \frac{3}{\text{س}^2}} = 5$$

(٥) بقسمة كل من البسط والمقام على س^3

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{8 - \frac{1}{\text{س}^2} + \frac{1}{\text{س}^3}}{\left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)\left(2 - \frac{3}{\text{س}^2}\right)} = \frac{8}{2} = 4$$

(٦) بقسمة كل من البسط والمقام على س^3

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{1 - \frac{4}{\text{س}^2} + \frac{5}{\text{س}^3}}{\left(2 - \frac{1}{\text{س}}\right)^3} = \frac{1}{8}$$

(٧) بقسمة كل من البسط والمقام على س^3

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\left(2 + \frac{3}{\text{س}}\right)\left(4 - \frac{5}{\text{س}^2}\right)}{\left(3 - \frac{8}{\text{س}^2}\right)\left(5 - \frac{3}{\text{س}}\right)} = \frac{8}{15}$$

⑧ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{(٢+\frac{٣}{\text{س}})(٥-\frac{١}{\text{س}})(١-\frac{٢}{\text{س}})}{١\times(١+\frac{١}{\text{س}})(٣-\frac{١}{\text{س}})}=\frac{١٠}{٣}$$

⑨ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}=\sqrt{\text{س}^٢}$

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{(\frac{٧}{\sqrt{\text{س}}}+١)(\frac{٣}{\sqrt{\text{س}}}+١)}{٤-\frac{٣}{\text{س}}}=\frac{١}{٤}$$

٤

① بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}=\sqrt{\text{س}^٢}$

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{١+\frac{٢}{\text{س}}}{\sqrt{٩+\frac{٢٥}{\text{س}^٢}}}=\frac{١}{٣}$$

② بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٢=\sqrt{\text{س}^٤}$

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\frac{٤}{\text{س}^٢}-٣}{\sqrt{١+\frac{٥}{\text{س}^٤}}}=-٣$$

③ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{٣}{\text{س}^٢}+٤}}{١}=\sqrt{٤}=٢$$

④ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}=\sqrt{\text{س}^٢}$

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٢+\frac{١}{\text{س}}}{\sqrt{٤+\frac{٣}{\text{س}}-\frac{٤}{\text{س}^٢}}}=\frac{٢}{٢}=١$$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}=\sqrt[٣]{\text{س}^٣}$

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٢-\frac{٣}{\text{س}}}{\sqrt[٣]{١٢٥+\frac{٥}{\text{س}^٣}}}=\frac{٢}{٥}$$

⑥ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}=\sqrt[٣]{\text{س}^٣}$

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\sqrt[٣]{٨+\frac{٥}{\text{س}^٢}-\frac{٢}{\text{س}^٣}}}{٣+\frac{٢}{\text{س}}}=\frac{٢}{٣}$$

⑦ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٢=\sqrt{\text{س}^٦}$

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\frac{٤}{\text{س}^٣}-٣}{\sqrt{١+\frac{٩}{\text{س}^٦}}}=-٣$$

⑧ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}=\sqrt{\text{س}^٢}=\sqrt[٣]{\text{س}^٣}$

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\sqrt{٩-\frac{٣}{\text{س}}+\frac{٨}{\text{س}^٢}}}{\sqrt[٣]{\frac{٣}{\text{س}}+١٢٥+\frac{٢}{\text{س}^٣}}}=\frac{٣}{٥}$$

⑨ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{\text{س}^٢}=\sqrt[٤]{\text{س}^٤}$

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\sqrt{١+\frac{١}{\text{س}^٢}}}{\sqrt[٤]{١+\frac{٢}{\text{س}^٤}}}=\frac{١}{١}=١$$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}=\sqrt{\text{س}^٢}$

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\sqrt{٤+\frac{٧}{\text{س}^٢}}+٣}{٢+\frac{٩}{\text{س}}}=\frac{٥}{٢}$$

٥

① $\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٢}{\text{س}}+\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{١-\frac{١}{\text{س}}}{١-\frac{١}{\text{س}^٢}}$

= صفر + ١ = ١

② $\lim_{\text{س}\to\infty}٧+\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٢\text{س}^٢}{(\text{س}+٣)^٢}$

$=٧+\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٢}{(١+\frac{٣}{\text{س}})^٢}$

$=٧+٢=٩$

③ $\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\text{س}}{٢\text{س}+١}+\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٣\text{س}^٢}{(\text{س}-٣)^٢}$

$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{١}{٢+\frac{١}{\text{س}}}+\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٣}{(١-\frac{٣}{\text{س}})^٢}$

$=\frac{١}{٢}+٣=\frac{٧}{٢}$

④ $\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٢}{٣}-\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٣\text{س}}{٢\text{س}+٧}$

$=\frac{٢}{٣}-\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٣}{٢+\frac{٧}{\text{س}}}$

$=\frac{٢}{٣}-\frac{٣}{٢}=-\frac{٥}{٦}$

⑤ $\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٣}{\text{س}}+\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٢\text{س}^٥+١}{\text{س}^٥+٢\text{س}^٢}$

$=$ صفر $+\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٢+\frac{١}{\text{س}^٥}}{١+\frac{٢}{\text{س}^٣}}=٢$

⑥ $\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٢\text{س}^٣-٢\text{س}^٣-\text{س}}{٢\text{س}^٢+١}$

$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{-\text{س}}{٢\text{س}^٢+١}$

$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\frac{-١}{\text{س}}}{٢+\frac{١}{\text{س}^٢}}=\frac{\text{صفر}}{٢}=$ صفر

⑦ $\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{(\text{س}^٢-١)(\text{س}-٢)-(\text{س}^٢+١)(\text{س}+٢)}{\text{س}^٢-٤}$

$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\text{س}^٣-٢\text{س}^٢-\text{س}+٢-\text{س}^٣-٢\text{س}^٢-\text{س}-٢}{\text{س}^٢-٤}$

$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{-٤\text{س}^٢-٢\text{س}}{\text{س}^٢-٤}$

$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{-٤-\frac{٢}{\text{س}}}{١-\frac{٤}{\text{س}^٢}}=-٤$

⑧ $\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{(\sqrt{\text{س}^٢-٢}-\sqrt{\text{س}^٢+\text{س}})(\sqrt{\text{س}^٢-٢}+\sqrt{\text{س}^٢+\text{س}})}{\sqrt{\text{س}^٢-٢}+\sqrt{\text{س}^٢+\text{س}}}$

$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\text{س}^٢-٢-\text{س}^٢-\text{س}}{\sqrt{\text{س}^٢-٢}+\sqrt{\text{س}^٢+\text{س}}}$

$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{-٢-\text{س}}{\sqrt{\text{س}^٢-٢}+\sqrt{\text{س}^٢+\text{س}}}$

$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\frac{-٢}{\text{س}}-١}{\sqrt{١-\frac{٢}{\text{س}^٢}}+\sqrt{١+\frac{١}{\text{س}}}}=-\frac{١}{٢}$

⑨ $\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{(\sqrt{\text{س}^٢+\text{س}-١}-\sqrt{\text{س}^٢-\text{س}+١})(\sqrt{\text{س}^٢+\text{س}-١}+\sqrt{\text{س}^٢-\text{س}+١})}{\sqrt{\text{س}^٢+\text{س}-١}+\sqrt{\text{س}^٢-\text{س}+١}}$

$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\text{س}^٢+\text{س}-١-\text{س}^٢+\text{س}-١}{\sqrt{\text{س}^٢+\text{س}-١}+\sqrt{\text{س}^٢-\text{س}+١}}$

$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٢\text{س}-٢}{\sqrt{\text{س}^٢+\text{س}-١}+\sqrt{\text{س}^٢-\text{س}+١}}$

$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٢-\frac{٢}{\text{س}}}{\sqrt{١+\frac{١}{\text{س}}-\frac{١}{\text{س}^٢}}+\sqrt{١-\frac{١}{\text{س}}+\frac{١}{\text{س}^٢}}}$

$=\frac{٢}{١+١}=١$

⑩ $\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\sqrt{٤\text{س}^٢+١}-\sqrt{\text{س}^٢+١}}{\text{س}}$

$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\sqrt{٤+\frac{١}{\text{س}^٢}}-\sqrt{١+\frac{١}{\text{س}^٢}}}{١}=\frac{٢-١}{١}=١$

⑪ $\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{(\sqrt{\text{س}^٢+٥\text{س}}-\text{س})(\sqrt{\text{س}^٢+٥\text{س}}+\text{س})}{\sqrt{\text{س}^٢+٥\text{س}}+\text{س}}$

$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\text{س}^٢+٥\text{س}-\text{س}^٢}{\sqrt{\text{س}^٢+٥\text{س}}+\text{س}}$

$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٥\text{س}}{\sqrt{\text{س}^٢+٥\text{س}}+\text{س}}$

$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{٥}{\sqrt{١+\frac{٥}{\text{س}}}+١}=\frac{٥}{١+١}=\frac{٥}{٢}$

(١٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س}\left(\sqrt{٤\text{س}^{٢}+١} - ٢\text{س}\right)\left(\sqrt{٤\text{س}^{٢}+١} + ٢\text{س}\right)}{\left(\sqrt{٤\text{س}^{٢}+١} + ٢\text{س}\right)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س}\left(٤\text{س}^{٢} + ١ - ٤\text{س}^{٢}\right)}{\left(\sqrt{٤\text{س}^{٢}+١} + ٢\text{س}\right)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{١}{\sqrt{٤ + \frac{١}{\text{س}^{٢}}} + ٢} = \dfrac{١}{٤}$

٦

∵ النهاية موجودة وتساوى ٣

∴ درجة البسط = درجة المقام ∴ $\text{ن} = ٢$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{٤\text{أ}\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٥}{٣ - ٩\text{س} + ٨\text{س}^{٢}} = ٣$

بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^{٢}$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{٤\text{أ} - \frac{٤}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}^{٢}}}{\frac{٣}{\text{س}^{٢}} - \frac{٩}{\text{س}} + ٨} = ٣$

∴ $\dfrac{٤\text{أ}}{٨} = ٣$ ∴ $\text{أ} = ٦$

٧

$\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{أ} + \frac{٣}{\text{س}^{٣}}}}{\sqrt{٤ + \frac{٧}{\text{س}^{٢}}}} = -١$ ∴ $\dfrac{\sqrt[٣]{\text{أ}}}{٢} = -١$

∴ $\sqrt[٣]{\text{أ}} = -٢$ ∴ $\text{أ} = -٨$

إجابات تمارين الوحدة الرابعة

حساب المثلثات



إجابات الوحدة الرابعة

إجابات تمارين 15

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (جـ)	③ (أ)	④ (أ)
⑤ (د)	⑥ (أ)	⑦ (جـ)	⑧ (أ)
⑨ (ب)	⑩ (أ)	⑪ (ب)	⑫ (جـ)
⑬ (أ)	⑭ (ب)	⑮ (ب)	⑯ (ب)
⑰ (جـ)	⑱ (أ)	⑲ (جـ)	⑳ (د)
(٢١) (أ)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (ب)
(٢٥) (جـ)	(٢٦) (د)	(٢٧) (أ)	(٢٨) (ب)
(٢٩) (د)	(٣٠) (د)	(٣١) (جـ)	(٣٢) (ب)
(٣٣) (د)	(٣٤) (ب)	(٣٥) (د)	(٣٦) (أ)
(٣٧) (د)	(٣٨) (أ)	(٣٩) (جـ)	(٤٠) (جـ)
(٤١) (د)			

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

∵ ق(∠ع) = ١٨٠° − (٨٠° + ٦٠°) = ٤٠°

∴ $\frac{\text{سَ}}{\text{جا ٨٠°}} = \frac{\text{صَ}}{\text{جا ٦٠°}} = \frac{\text{١٠}}{\text{جا ٤٠°}}$

∴ سَ = $\frac{\text{١٠ جا ٨٠°}}{\text{جا ٤٠°}}$ ≃ ١٥ سم

، صَ = $\frac{\text{١٠ جا ٦٠°}}{\text{جا ٤٠°}}$ ≃ ١٣ سم

٢

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١١٢° + ٣٣°) = ٣٥°

∴ $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ٣٣°}} = \frac{\text{١٩}}{\text{جا ٣٥°}}$

∴ بَ = $\frac{\text{١٩ جا ٣٣°}}{\text{جا ٣٥°}}$ ≃ ١٨,٠٤ سم ، ٢ نق = $\frac{\text{١٩}}{\text{جا ٣٥°}}$

∴ نق = $\frac{\text{١٩}}{\text{٢ جا ٣٥°}}$ ≃ ١٦,٥٦ سم

٣

① ∵ ق(∠س) = ١٨٠° − (١٠٠° + ٤٠°) = ٤٠°

∴ $\frac{\text{سَ}}{\text{جا ٤٠°}} = \frac{\text{٦٨,٤}}{\text{جا ١٠٠°}}$

∴ سَ = $\frac{\text{٦٨,٤ جا ٤٠°}}{\text{جا ١٠٠°}}$ ≃ ٤٤,٦٤ سم

② ٢ نق = $\frac{\text{٦٨,٤}}{\text{جا ١٠٠°}}$ ∴ نق ≃ ٣٤,٧٣ سم

③ مساحة Δ س ص ع = $\frac{١}{٢}$ سَ صَ جا ع

= $\frac{١}{٢}$ × ٤٤,٦٤ × ٦٨,٤ جا ٤٠°

≃ ٩٨١ سم^{٢}

٤

∵ ق(∠ب) = ١٨٠° − (٤٠° + ٨٠°) = ٦٠°

∴ ∠حـ أكبر الزوايا قياسًا

∴ حَ طول أكبر الأضلاع ∴ $\frac{\text{حَ}}{\text{جا ٨٠°}} = \frac{\text{١٠}}{\text{جا ٦٠°}}$

∴ حَ = $\frac{\text{١٠ جا ٨٠°}}{\text{جا ٦٠°}}$ ≃ ١١ سم

٥

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١٠٠° + ١٥°) = ٦٥°

∴ ∠ب أصغر الزوايا قياسًا

∴ بَ طول أصغر الأضلاع ∴ $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ١٥°}} = \frac{\text{٤,٥}}{\text{جا ٦٥°}}$

∴ بَ = $\frac{\text{٤,٥ جا ١٥°}}{\text{جا ٦٥°}}$ ≃ ١,٣ سم

٦

① ∵ $\frac{\text{س}}{\text{جا ٤٨°}} = \frac{\text{١٠}}{\text{جا ٩٣°}}$

∴ س = $\frac{\text{١٠ جا ٤٨°}}{\text{جا ٩٣°}}$ ≃ ٧,٤ سم

② ∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٢١° + ٤٨°) = ١١١°

∴ $\frac{\text{س}}{\text{جا ١١١°}} = \frac{\text{٧,٣}}{\text{جا ٤٨°}}$

∴ س = $\frac{\text{٧,٣ جا ١١١°}}{\text{جا ٤٨°}}$ ≃ ٩,٢ سم

٧

∵ نق = $\frac{\text{٧ }\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢ جا ٦٠°}}$ = ٧ سم

∴ مساحة الدائرة = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧^{٢} = ١٥٤ سم^{٢}

، محيط الدائرة = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٤٤ سم

٨

∵ نق = $\frac{\text{١٣}}{\text{٢ جا ٥٣° ٨َ}}$ ≃ ٨,١ سم ، $\frac{\text{١٣}}{\text{جا ٥٣° ٨َ}} = \frac{\text{١٥}}{\text{جا حـ}}$

∴ جا حـ = $\frac{\text{١٥ جا ٥٣° ٨َ}}{\text{١٣}}$ (موجبة)

∴ ∠حـ حادة أو منفرجة

∴ ق(∠حـ) ≃ ٦٧° ٢٣َ ٩ً ، ١١٢° ٣٦َ ٥١ً

٩

∵ $\frac{\text{٨}}{\text{جا ٣٥°}} = \frac{\text{٦}}{\text{جا ب}}$ ∴ جا ب = $\frac{\text{٦ جا ٣٥°}}{\text{٨}}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٢٥° ٢٨َ ٤٥ً والحل الآخر مرفوض

١٠

∵ ق(∠ب) = ١٨٠° − (٦٧° ٢٢َ + ٤٤° ٣٣َ) = ٦٨° ٥َ

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ٦٧° ٢٢َ}} = \frac{\text{١٠٠}}{\text{جا ٦٨° ٥َ}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا ٤٤° ٣٣َ}}$

∴ أ = $\frac{\text{١٠٠ جا ٦٧° ٢٢َ}}{\text{جا ٦٨° ٥َ}}$ ≃ ٩٩ سم

، حَ = $\frac{\text{١٠٠ جا ٤٤° ٣٣َ}}{\text{جا ٦٨° ٥َ}}$ ≃ ٧٦ سم

∴ محيط المثلث = ١٠٠ + ٩٩ + ٧٦ = ٢٧٥ سم

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ × ٩٩ جا ٤٤° ٣٣َ ≃ ٣٤٧٣ سم^{٢}

١١

∵ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٣٥° + ٧٠°) = ٧٥°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ٧٥°}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ٣٥°}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا ٧٠°}}$ = ٣٢

∴ أ = ٣٢ جا ٧٥° ≃ ٣٠,٩ سم

، بَ = ٣٢ جا ٣٥° ≃ ١٨,٤ سم

، حَ = ٣٢ جا ٧٠° = ٣٠ سم

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٣٠,٩ × ١٨,٤ × جا ٧٠°

≃ ٢٦٧ سم^{٢}

، محيط المثلث = ٣٠,٩ + ١٨,٤ + ٣٠ ≃ ٧٩ سم

١٢

∵ Δ أ ب حـ متساوى الساقين

∴ ق(∠ب) = ق(∠حـ) = ٣٠°

، ∵ $\frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{\text{حَ}}{\text{جا ٣٠°}}$ = ٢٤

∴ حَ = ٢٤ جا ٣٠° = ١٢ سم ∴ بَ = حَ = ١٢ سم

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٢ جا ١٢٠° = ٦٢,٤ سم^{٢}

١٣

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١٥° + ١٥°) = ١٥٠°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ١٥°}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ١٥°}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا ١٥٠°}}$

∴ إحدى النسب = $\frac{\text{أ + بَ + حَ}}{\text{جا ١٥° + جا ١٥° + جا ١٥٠°}}$

= $\frac{\text{٢٥}}{\text{جا ١٥° + جا ١٥° + جا ١٥٠°}}$ ≃ ٢٤,٥٧

∴ ٢ نق ≃ ٢٤,٥٧ ∴ نق = ١٢,٢٨٥ سم

∴ مساحة الدائرة = π × (١٢,٢٨٥)^{٢} ≃ ٤٧٤ سم^{٢}

١٤

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٤٤° + ٦٦°) = ٧٠°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ٤٤°}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ٦٦°}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا ٧٠°}}$

= $\frac{\text{٤٠}}{\text{جا ٤٤° + جا ٦٦° + جا ٧٠°}}$

∴ أ ≃ ١٠,٩ سم ، بَ ≃ ١٤,٣ سم ، حَ ≃ ١٤,٨ سم

١٥

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٢٠° + ٦٠°) = ١٠٠°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ٢٠°}} = \frac{\text{١٢}}{\text{جا ١٠٠°}}$ ∴ أ = $\frac{\text{١٢ جا ٢٠°}}{\text{جا ١٠٠°}}$ = ٤,٢ سم

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٤,٢ × ١٢ × جا ٦٠° ≃ ٢٢ سم^{٢}

١٦

∵ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٨٢° + ٥٦°) = ٤٢°

، ∵ مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ ب جا جـ

∴ ٤٥٠ = $\frac{1}{2}$ أ ب جا ٥٦° ∴ ب = $\frac{\text{٩٠٠}}{\text{أ جا ٥٦°}}$

، ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ٤٢°}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٨٢°}}$ ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ٤٢°}} = \frac{\text{٩٠٠}}{\text{أ جا ٥٦° جا ٨٢°}}$

∴ $\text{أ}^2 = \frac{\text{٩٠٠ جا ٤٢°}}{\text{جا ٥٦° جا ٨٢°}}$ ∴ أ ≃ ٢٧ سم

١٧

∵ ٤٣,٢ = $\frac{1}{2}$ × أ ب × ١٢ × ٠,٦ ∴ أ ب = ١٢ سم

، ∵ ق(∠أ) ≃ ٣٦° ٥٢´

∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) = $\frac{\text{١٨٠° − ٣٦° ٥٢´}}{\text{٢}}$ = ٧١° ٣٤´

∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{٠,٦}} = \frac{\text{١٢}}{\text{جا ٧١° ٣٤´}}$

∴ ب جـ = $\frac{\text{١٢ جا ٣٦° ٥٢´}}{\text{جا ٧١° ٣٤´}}$ ≃ ٧,٦ سم

١٨

∵ $\frac{\text{٧}}{\text{جا ٦٠°}} = \frac{\text{٨}}{\text{جا ب}}$ ∴ ق(∠ب) ≃ ٨١° ٤٧´ ١٢˝

(ويرفض الحل الآخر لأن المثلث حاد الزوايا)

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٨١° ٤٧´ ١٢˝) = ٣٨° ١٢´ ٤٨˝

∴ $\frac{\text{٧}}{\text{جا ٦٠°}} = \frac{\text{محيط Δ أ ب جـ}}{\text{جا ٦٠° + جا ٨١° ٤٧´ ١٢˝ + جا ٣٨° ١٢´ ٤٨˝}}$

∴ محيط Δ أ ب جـ ≃ ٢٠ سم

١٩

(١) ٢ نق = $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{٢١}}{\text{جا ٧٥°}}$ ≃ ٢١,٧ سم

(٢) ٢ نق = $\frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{جـ − ب}}{\text{جا جـ − جا ب}}$

= $\frac{\text{٦}}{\text{جا ٦٥° − جا ٥٠°}}$ ≃ ٤٢,٨ سم

٢٠

∵ ظا جـ = $\frac{4}{3}$ ∴ ق(∠جـ) = ٥٣° ٧´ ٤٨˝

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٥٣° ٧´ ٤٨˝) = ٩٦° ٥٢´ ١٢˝

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ٩٦° ٥٢´ ١٢˝}} = \frac{\text{٥}}{\text{جا ٣٠°}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا ٥٣° ٧´ ٤٨˝}}$

∴ أ = $\frac{\text{٥ جا ٩٦° ٥٢´ ١٢˝}}{\text{جا ٣٠°}}$ ≃ ١٠ سم

، جـ = $\frac{\text{٥ جا ٥٣° ٧´ ٤٨˝}}{\text{جا ٣٠°}}$ = ٨ سم

، مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ جا ب

= $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ٨ × جا ٣٠°

= ٢٠ سم²

٢١

∵ $\frac{\text{س + ص + ع}}{\text{جا س + جا ص + جا ع}}$ = ٢ نق

∴ نق = $\frac{\text{٥٦,٨٨}}{\text{٢ × ٢,٣٧}}$ = ١٢ سم

٢٢

∵ جا أ : جا ب : جا جـ = ٢ : ٤ : ٥

∴ أ : ب : جـ = ٢ : ٤ : ٥

∴ أ = ٢ ك ، ب = ٤ ك ، جـ = ٥ ك

، ∵ جـ − ب = ٥ ك − ٤ ك = ك = ٣

∴ أ = ٦ سم ، ب = ١٢ سم

٢٣

∵ ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠جـ) = ٣ : ٤ : ٣

∴ ق(∠أ) = ٣ ك ، ق(∠ب) = ٤ ك ، ق(∠جـ) = ٣ ك

∵ ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

∴ ٣ ك + ٤ ك + ٣ ك = ١٨٠° ∴ ك = ١٨°

∴ $\frac{\text{٥}}{\text{جا ٥٤°}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٧٢°}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا ٥٤°}}$

= $\frac{\text{محيط Δ أ ب جـ}}{\text{جا ٥٤° + جا ٧٢° + جا ٥٤°}}$

∴ محيط Δ أ ب جـ = ١٥,٩ سم

٢٤

∵ ق(∠س) + $\frac{3}{2}$ ق(∠س) + ٢ ق(∠س) = ١٨٠°

∴ ق(∠س) = ٤٠° ، ق(∠ص) = ٦٠° ، ق(∠ع) = ٨٠°

، ∵ $\frac{\text{س}}{\text{جا ٤٠°}} = \frac{\text{ص}}{\text{جا ٦٠°}} = \frac{\text{ع}}{\text{جا ٨٠°}}$ = ٢٠

∴ س = ٢٠ جا ٤٠° ، ص = ٢٠ جا ٦٠°

∴ مساحة Δ س ص ع

= $\frac{1}{2}$ × ٢٠ جا ٤٠° × ٢٠ جا ٦٠° × جا ٨٠° ≃ ١١٠ سم²

٢٥

∵ ٦ جا أ = ٤ جا ب = ٣ جا جـ

بالقسمة على ١٢ ∴ $\frac{\text{جا أ}}{\text{٢}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{٣}} = \frac{\text{جا جـ}}{\text{٤}}$

وبوضع أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، جـ = ٤ ك

∴ ٢ ك + ٣ ك + ٤ ك = ٤٥ ∴ ك = ٥

∴ أ = ١٠ سم ، جـ = ٢٠ سم

٢٦

في Δ أ ب جـ

∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}}$

= ٢ نق

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{٥٢,١}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{٤٣,٥}}{\text{جا جـ}}$ = ١٠٠

∴ جا ب = $\frac{\text{٥٢,١}}{\text{١٠٠}}$ ∴ ق(∠ب) ≃ ٣١° ٢٤´

، جا جـ = $\frac{\text{٤٣,٥}}{\text{١٠٠}}$ ∴ ق(∠جـ) ≃ ٢٥° ٤٧´

∴ ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠° − (٣١° ٢٤´ + ٢٥° ٤٧´)

= ١٢٢° ٤٩´

، ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ١٢٢° ٤٩´}}$ = ١٠٠

∴ أ = ١٠٠ جا ١٢٢° ٤٩´ ≃ ٨٤ سم

٢٧

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع

∴ ق(∠جـ) = ٥٠°

في Δ ب د جـ :

ق(∠ب د جـ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°

∴ $\frac{\text{٨}}{\text{جا ٥٠°}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٦٠°}} = \frac{\text{د جـ}}{\text{جا ٧٠°}}$

∴ ب جـ ≃ ٩ سم ، د جـ ≃ ٩,٨ سم

∴ محيط متوازي الأضلاع = ٢ (ب جـ + جـ د)

≃ ٣٨ سم

٢٨

في Δ أ ب م : ق(∠أ م ب)

= ١٨٠° − (٤٤° ٣٨´ + ٣٦° ٢٢´)

= ٩٩°

∴ $\frac{\text{١٨,٦}}{\text{جا ٩٩°}} = \frac{\text{أ م}}{\text{جا ٤٤° ٣٨´}}$

∴ أ م = $\frac{\text{١٨,٦ × جا ٤٤° ٣٨´}}{\text{جا ٩٩°}}$

∴ أ جـ = ٢ (أ م) ≃ ٢٦,٤٦ سم

، مساحة ▱ أ ب جـ د = ٢ × $\frac{1}{2}$ × ١٨,٦ × ٢٦,٤٦ جا ٣٦° ٢٢´

≃ ٢٩٢ سم²

٢٩

في Δ أ ب م :

ق(∠م) = ٥٠°

، ق(∠ب) = ١٨٠° − (٨٥° + ٥٠°) = ٤٥°

∴ $\frac{\text{١٠}}{\text{جا ٤٥°}} = \frac{\text{ب م}}{\text{جا ٨٥°}}$

∴ ب م = $\frac{\text{١٠ جا ٨٥°}}{\text{جا ٤٥°}}$ ≃ ١٤,١ سم

∴ ب د = ٢ ب م = ٢٨,٢ سم

، مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ د

= ٤ × $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ١٤,١ جا ٥٠° = ٢١٦ سم²

٣٠

∵ $\overline{\text{أء}} // \overline{\text{بحـ}}$

∴ ق(∠أءحـ)

\+ ق(∠ءحـب) = ١٨٠°

∴ ق(∠ءحـب) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

∴ ق(∠ءحـأ) = ٦٠° − ٢٣° ٢٥َ = ٣٦° ٣٥َ

∴ في المثلث أءحـ : $\frac{\text{٢٠}}{\text{جا ٣٦° ٣٥َ}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{جا ١٢٠°}}$

∴ أحـ = $\frac{\text{٢٠ جا ١٢٠°}}{\text{جا ٣٦° ٣٥َ}}$ = ٢٩ سم

، في المثلث أبحـ :

∵ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٦٢° + ٢٣° ٢٥َ) = ٩٤° ٣٥َ

∴ $\frac{\text{٢٩}}{\text{جا ٦٢°}} = \frac{\text{بحـ}}{\text{جا ٩٤° ٣٥َ}}$

∴ بحـ = $\frac{\text{٢٩ جا ٩٤° ٣٥َ}}{\text{جا ٦٢°}}$ ≃ ٣٣ سم

٣١

في Δ بءحـ :

ق(∠ءبحـ) = ١٨٠° − (٣٢° + ٨٥°)

= ٦٣°

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{جا ٨٥°}} = \frac{\text{١٠٠}}{\text{جا ٦٣°}}$

∴ بء = $\frac{\text{١٠٠ جا ٨٥°}}{\text{جا ٦٣°}}$ ≃ ١١٢ سم

، في Δ أءحـ :

ق(∠ءأحـ) = ١٨٠° − (٤٩° + ٨٧°) = ٤٤°

∴ $\frac{\text{أحـ}}{\text{جا ٨٧°}} = \frac{\text{١٠٠}}{\text{جا ٤٤°}}$

∴ أحـ = $\frac{\text{١٠٠ جا ٨٧°}}{\text{جا ٤٤°}}$ ≃ ١٤٤ سم

٣٢

في المثلث أبء :

∵ أب = أء

∴ ق(∠أبء)

= ق(∠أءب) = $\frac{\text{١٨٠° − ٨٠°}}{\text{٢}}$ = ٥٠°

∴ $\frac{\text{١٠}}{\text{جا ٥٠°}} = \frac{\text{بء}}{\text{جا ٨٠°}}$

∴ بء = $\frac{\text{١٠ جا ٨٠°}}{\text{جا ٥٠°}}$ ≃ ١٢,٨٦ سم

، ∵ ق(∠أبحـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ءبحـ) = ٩٠° − ٥٠° = ٤٠°

∴ مساحة Δ أبء = $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ١٠ × جا ٨٠° ≃ ٤٩ سم²

، مساحة Δ ءبحـ = $\frac{1}{2}$ × ١٢,٨٦ × ١٢,٨٦ × جا ٤٠°

≃ ٥٣ سم²

∴ مساحة الشكل أبحـء = ٤٩ + ٥٣ = ١٠٢ سم²

٣٣

∵ الشكل خماسي منتظم

∴ ق(∠ب) = ١٠٨°

، ق(∠بأحـ)

= ق(∠بحـأ)

= $\frac{\text{١٨٠° − ١٠٨°}}{\text{٢}}$ = ٣٦°

∴ $\frac{\text{أحـ}}{\text{جا ١٠٨°}} = \frac{\text{١٨,٢٦}}{\text{جا ٣٦°}}$ ∴ أحـ ≃ ٢٩,٥ سم

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (د)   ② (جـ)   ③ (جـ)   ④ (ب)

إرشادات الحل :

① ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق = ٦

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} \times \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٦ × ٦ × ٦

∴ $\frac{\text{أ ب حـ}}{\text{جا أ جا ب جا حـ}}$ = ٢١٦

② ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق

∴ أ قتا أ = ب قتا ب = حـ قتا حـ = ٢ نق

∴ أ قتا أ + ب قتا ب + حـ قتا حـ = ٦ نق

③ ∵ $\frac{\text{أ + ب + حـ}}{\text{جا أ + جا ب + جا حـ}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{جا ب + جا حـ + جا أ}}{\text{جا أ + جا ب + جا حـ}}$ = ٢ نق

∴ ٢ نق = ١   ∴ نق = $\frac{1}{2}$

∴ محيط الدائرة المارة برؤوس Δ أبحـ

= ٢ π نق = ٢ π × $\frac{1}{2}$ = π

④ ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{جا أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جا حـ}}{\text{حـ}} = \frac{\text{١}}{\text{٢ نق}}$

وبضرب مقدمات وتوالي النسبة الأولى × أ

، النسبة الثانية × ب ، النسبة الثالثة × حـ

وجمع المقدمات والتوالي

∴ $\frac{\text{أ جا أ + ب جا ب + حـ جا حـ}}{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{حـ}^2} = \frac{\text{١}}{\text{٢ نق}}$

إجابات تمارين 16

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (أ)	③ (ب)	④ (د)
⑤ (أ)	⑥ (ب)	⑦ (د)	⑧ (د)
⑨ (أ)	⑩ (أ)	⑪ (جـ)	⑫ (أ)
⑬ (ب)	⑭ (ب)	⑮ (د)	⑯ (د)
⑰ (د)	⑱ (ب)	⑲ (جـ)	⑳ (ب)
㉑ (جـ)	㉒ (ب)	㉓ (جـ)	㉔ (د)
㉕ (د)	㉖ (ب)	㉗ (ب)	㉘ (ب)
㉙ (ب)	㉚ (جـ)		

ثانيا الأسئلة المقالية

١

∵ ع² = (١٣)² + (١٦)² − ٢ × ١٣ × ١٦ × جتا ٩٥° ≃ ٤٦١,٢٦

∴ ع ≃ ٢١,٥ سم

٢

∵ ب² = (٣)² + (٥)² − ٢ × ٣ × ٥ جتا ٣٦° ٤١َ = ٩,٨

∴ ب ≃ ٣ سم

٣

① ∵ جتا حـ = $\frac{(\text{٣})^2 + (\text{٥})^2 - (\sqrt{\text{١٩}})^2}{\text{٢ × ٣ × ٥}} = \frac{1}{2}$

∴ ق(∠حـ) = ٦٠°

② مساحة Δ أبحـ = $\frac{1}{2}$ × ٣ × ٥ × جا ٦٠°

= $\frac{\text{١٥}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}}$ سم²

٤

∵ (طول الضلع الثالث)² = $(\sqrt{\text{١٠}} + \text{٢})^2 + (\sqrt{\text{١٠}} - \text{٢})^2$

− ٢ $(\sqrt{\text{١٠}} + \text{٢})(\sqrt{\text{١٠}} - \text{٢})$ جتا ٦٠° = ٢٢

∴ طول الضلع الثالث = $\sqrt{\text{٢٢}}$ سم

٥

∵ حـ² = (٤)² + (٦)² − ٢ × ٤ × ٦ جتا ٥٧° = ٢٥,٩

∴ حـ ≃ ٥ سم

∴ محيط المثلث = ٤ + ٦ + ٥ = ١٥ سم

٦

∵ جتا أ = $\frac{(\text{٥,٨})^2 + (\text{٣,٤})^2 - (\text{٧,٦})^2}{\text{٢ (٥,٨) (٣,٤)}}$

∴ ق(∠أ) ≃ ١٠٨° ٣٤َ

، جتا ب = $\frac{(\text{٧,٦})^2 + (\text{٣,٤})^2 - (\text{٥,٨})^2}{\text{٢ (٧,٦) (٣,٤)}}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٤٦° ٢٠َ

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١٠٨° ٣٤َ + ٤٦° ٢٠َ) = ٢٥° ٦َ

٧

∵ جتا ب = $\frac{(\text{١٣})^2 + (\text{١٥})^2 - (\text{١٤})^2}{\text{٢ (١٣) (١٥)}}$

∴ ق(∠ب) = ٥٩° ٢٩َ

∴ مساحة Δ أبحـ = $\frac{1}{2}$ × ١٣ × ١٥ × جا ٥٩° ٢٩َ = ٨٤ سم²

٨

∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع

∴ حتا س = $\frac{(٢٧)^٢ + (٢٤)^٢ - (١٨)^٢}{٢ \times ٢٧ \times ٢٤}$

∴ ق(∠ س) ≃ ٤٠° ٤٨َ

، ∵ نق = $\frac{١٨}{٢ \text{ حا } ٤٠° ٤٨َ}$

∴ مساحة الدائرة = π $\left(\frac{١٨}{٢ \text{ حا } ٤٠° ٤٨َ}\right)^٢$ ≃ ٥٩٦ سم^٢

٩

∵ أكبر زاوية قياسًا تقابل أكبر ضلع طولًا

∴ حتا حـ = $\frac{(٩)^٢ + (١٥)^٢ - (٢١)^٢}{٢ \times ٩ \times ١٥}$ = $-\frac{١}{٢}$

∴ ق(∠ حـ) = ١٢٠°

∴ حتا حـ − ٥ $\sqrt{٣}$ حا حـ + ٨

= حتا ١٢٠° − ٥ $\sqrt{٣}$ حا ١٢٠° + ٨ = صفر

١٠

حـَ = ٥٢ − (١٣ + ١٧) = ٢٢ سم

∵ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع

∴ حتا حـ = $\frac{(١٣)^٢ + (١٧)^٢ - (٢٢)^٢}{٢ (١٣)(١٧)}$

∴ ق(∠ حـ) ≃ ٩٣° ٢٢َ

، مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٣ × ١٧ × حا ٩٣° ٢٢َ

≃ ١١٠ سم^٢

١١

∵ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع

∴ حتا س = $\frac{(١٨)^٢ + (١٠)^٢ - (٢٤,٥)^٢}{٢ \times ١٨ \times ١٠}$

∴ ق(∠ س) ≃ ١١٩° ١٩َ

، ∵ نق = $\frac{٢٤,٥}{٢ \text{ حا } ١١٩° ١٩َ}$ ≃ ١٤ سم

∴ محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع

= ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ = ٨٨ سم

١٢

بفرض أن سَ = ٤ ك ، صَ = ٥ ك ، عَ = ٦ ك

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع

∴ حتا س = $\frac{٢٥ ك^٢ + ٣٦ ك^٢ - ١٦ ك^٢}{٢ \times ٥ ك \times ٦ ك}$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ ق(∠ س) ≃ ٤١° ٢٥َ

١٣

∵ سَ : صَ : عَ = حا س : حا ص : حا ع = ٧ : ٨ : ١٢

ويفرض أن : سَ = ٧ ك ، صَ = ٨ ك ، عَ = ١٢ ك

، ∵ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع

∴ حتا ع = $\frac{(٧ ك)^٢ + (٨ ك)^٢ - (١٢ ك)^٢}{٢ \times ٧ ك \times ٨ ك}$ = $\frac{-٣١}{١١٢}$

∴ ق(∠ ع) ≃ ١٠٦° ٤َ

١٤

∵ حـَ^{٢} = (٤)^٢ + (٥)^٢ − ٢ × ٤ × ٥ × $\frac{-١}{٢}$ = ٦١

∴ حـَ ≃ ٧,٨ سم

، ∵ حتا حـ = $-\frac{١}{٢}$ ∴ ق(∠ حـ) = ١٢٠°

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٥ × حا ١٢٠° = ٥ $\sqrt{٣}$ سم^٢

١٥

بالقسمة على ١٢ ∴ $\frac{\text{حا أ}}{٦} = \frac{\text{حا ب}}{٤} = \frac{\text{حا حـ}}{٣}$

∴ أ : ب : حـ = ٦ : ٤ : ٣

، بفرض أن : أَ = ٦ ك ، بَ = ٤ ك ، حـَ = ٣ ك

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع

∴ حتا حـ = $\frac{(٦ ك)^٢ + (٤ ك)^٢ - (٣ ك)^٢}{٢ \times ٦ ك \times ٤ ك}$ = $\frac{٤٣}{٤٨}$

∴ ق(∠ حـ) ≃ ٢٦° ٢٣َ

١٦

∵ أ : ب : حـ = ٣ : ٤ : ٥

، ويفرض أن : أَ = ٣ ك ، بَ = ٤ ك ، حـَ = ٥ ك

∴ حتا حـ = $\frac{(٣ ك)^٢ + (٤ ك)^٢ - (٥ ك)^٢}{٢ \times ٣ ك \times ٤ ك}$ = ٠

∴ ق(∠ حـ) = ٩٠°

∵ ٣ ك + ٤ ك + ٥ ك = ٢٤ ∴ ك = ٢

∴ أَ = ٦ سم ، بَ = ٨ سم ، حـَ = ١٠ سم

، مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم^٢

١٧

في المثلث أ ب حـ :

∵ ق(∠ أ)

= ١٨٠° − (٢٩° + ٧٣°) = ٧٨°

∴ $\frac{٢٠}{\text{حا } ٧٨°} = \frac{\text{أ ب}}{\text{حا } ٢٩°}$

∴ أ ب = $\frac{٢٠ \text{ حا } ٧٣°}{\text{حا } ٧٨°}$ = ١٩,٥٥ سم

، (أ ء)^٢ = (١٩,٥٥)^٢ + (١٠)^٢ − ٢ × ١٩,٥٥ × ١٠ حتا ٢٩°

∴ أ ء ≃ ١١,٨٤ سم

١٨

في المثلث أ ب حـ :

∵ حتا ب = $\frac{(٨)^٢ + (٩)^٢ - (٧)^٢}{٢ \times ٨ \times ٩}$

= $\frac{٢}{٣}$

∴ ق(∠ ب) ≃ ٤٨° ١١َ

∴ في المثلث أ ب ء :

(أ ء)^٢ = (٩)^٢ + (٤)^٢ − ٢ × ٩ × ٤ حتا ٤٨° ١١َ ≃ ٤٩

∴ أ ء = ٧ سم ، نق = $\frac{٧}{٢ \text{ حا } ٤٨° ١١َ}$ ≃ ٤,٧ سم

١٩

∵ (أ ب)^٢

= (٨)^٢ + (١٠)^٢ − ٢ × ٨ × ١٠ حتا ٥٠°

∴ أ ب ≃ ٨ سم

في المثلث أ م ء :

∵ ق(∠ أ م ء) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠°

∴ (أ ء)^٢ = (٨)^٢ + (١٠)^٢ − ٢ × ٨ × ١٠ حتا ١٣٠°

∴ أ ء ≃ ١٦ سم

٢٠

في Δ أ ب حـ :

∵ حتا ب

= $\frac{(٩)^٢ + (١٣)^٢ - (٢٠)^٢}{٢ (٩)(١٣)}$

∴ ق(∠ ب) ≃ ١٢٩° ٥٢َ

∴ ق(∠ ب أ ء) = ١٨٠° − ١٢٩° ٥٢َ ≃ ٥٠° ٨َ

في Δ أ ب ء :

(ب ء)^٢ = (٩)^٢ + (١٣)^٢ − ٢ (٩)(١٣) × حتا ٥٠° ٨َ

∴ ب ء ≃ ١٠ سم

٢١

في Δ أ ب ء :

(ب ء)^٢ = (٣٠)^٢ + (٤٢)^٢

− ٢ × ٣٠ × ٤٢ حتا ١٠٠°

∴ ب ء = ٥٥,٧ سم

، حتا (∠ أ ء ب) = $\frac{(٥٥,٧)^٢ + (٤٢)^٢ - (٣٠)^٢}{٢ \times ٥٥,٧ \times ٤٢}$

≃ ٠,٨٤٨

، ∵ $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ ق(∠ ء ب حـ) = ق(∠ أ ء ب) (بالتبادل)

∴ حتا (∠ ء ب حـ) = ٠,٨٤٨

∴ (حـ ء)^٢

= (٥٥,٧)^٢ + (٤٨)^٢ − ٢ × ٥٥,٧ × ٤٨ × ٠,٨٤٨

∴ حـ ء ≃ ٣٠ سم

٢٢

في Δ أ ب حـ :

حتا ب = $\frac{(٩)^٢ + (٥)^٢ - (١١)^٢}{٢ \times ٩ \times ٥}$

= $-\frac{١}{٦}$

، في Δ أ ء حـ :

حتا ء = $\frac{(٩)^٢ + (٨)^٢ - (١١)^٢}{٢ \times ٩ \times ٨}$ = $\frac{١}{٦}$

∴ جتاب + جتاء = ٠
∴ ق(∠ب) + ق(∠ء) = ١٨٠°
∴ الشكل رباعى دائرى.

٢٣

فى المثلث أ ب حـ:

جتا(∠ب أ حـ) = $\frac{(٦)^2 + (١٦)^2 - (١٤)^2}{٢ \times ٦ \times ١٦} = \frac{١}{٢}$

، فى المثلث ب حـ ء:

جتا(∠ب ء حـ) = $\frac{(١٠)^2 + (١٦)^2 - (١٤)^2}{٢ \times ١٠ \times ١٦} = \frac{١}{٢}$

∴ ق(∠ب أ حـ) = ق(∠ب ء حـ)
∴ الشكل رباعى دائرى.

٢٤

فى Δ أ ء حـ:

جتا(∠ء أ حـ) = $\frac{(١٢)^2 + (١٨)^2 - (٨)^2}{٢ \times ١٢ \times ١٨} = \frac{١٠١}{١٠٨}$

، فى Δ حـ أ ب:

جتا(∠حـ أ ب) = $\frac{(٢٧)^2 + (١٨)^2 - (١٢)^2}{٢ (٢٧)(١٨)} = \frac{١٠١}{١٠٨}$

∴ ق(∠ء أ حـ) = ق(∠حـ أ ب)
أى أن: $\overrightarrow{أحـ}$ ينصف ∠ء أ ب

٢٥

فى Δ أ ء ب:

أ ب = $\sqrt{(١٠)^2 - (٨)^2}$ = ٦ سم

، جتا ب = $\frac{٣}{٥}$ ∴ ق(∠ب) ≈ ٥٣° ٨َ

فى Δ ء ب حـ: ء ب = $\frac{١}{٢}$ ء حـ

∴ ء حـ = ٢٠ سم ، ب حـ = ١٠$\sqrt{٣}$ سم

فى Δ أ ب حـ:

ق(∠أ ب حـ) = ٩٠° + ٥٣° ٨َ = ١٤٣° ٨َ

∴ (أحـ)² = (٦)² + (١٠$\sqrt{٣}$)² − ٢ (٦) (١٠$\sqrt{٣}$) جتا ١٤٣° ٨َ

∴ أحـ ≈ ٢٢ سم

٢٦

∵ (أء)² = (٢٥)² + (١٦)² − ٢ × ٢٥ × ١٦ جتا ٣٦° ٥٢َ

∴ أء = ١٦ سم

، ∵ فى Δ أ ب حـ

∴ (٢٥)² = (١٥)² + (٢٠)²

∴ ق(∠ب) = ٩٠°

∴ مساحة الشكل الرباعى أ ب حـ ء

= مساحة Δ أ ب حـ + مساحة Δ أ حـ ء

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ × ١٥ + $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ × ١٦ × جا ٣٦° ٥٢َ

= ٢٧٠ سم²

٢٧

∵ حـ² = (٣ب)² + ب² − ٢ × ٣ب × ب جتا ٦٠°

= ٧ب²

∴ حـ = $\sqrt{٧}$ ب

∴ جتاب = $\frac{٧ب^2 + ٩ب^2 - ب^2}{٢ \times \sqrt{٧}ب \times ٣ب} = \frac{١٥}{٦\sqrt{٧}} = \frac{٥}{٢\sqrt{٧}}$

∴ ق(∠ب) = ١٩° ٦َ

، ∵ ق(∠أ) + ق(∠ب) = ١٢٠°

∴ ق(∠أ) = ١٠٠° ٥٤َ

٢٨

∵ ١٠$\sqrt{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × حـ جا ١٢٠°

∴ حـ = ٨ سم

∴ ب² = (٥)² + (٨)² − ٢ × ٥ × ٨ جتا ١٢٠° = ١٢٩

∴ ب = $\sqrt{١٢٩}$ ≈ ١١,٣٦ سم

∴ جتا أ = $\frac{١٢٩ + (٨)^2 - (٥)^2}{٢ \times \sqrt{١٢٩} \times ٨}$

∴ ق(∠أ) ≈ ٢٥° ٣٢َ

٢٩

∵ ع − أ = ٨ سم ، ع − ب = ٦ سم

، ع − حـ = ٤ سم ، بالجمع

∴ ٣ع − (أ + ب + حـ) = ١٨

∴ ٣ع − ٢ع = ١٨ ∴ ع = ١٨

∴ ١٨ − أ = ٨ ∴ أ = ١٠ سم

، ١٨ − ب = ٦ ∴ ب = ١٢ سم

١٨ − حـ = ٤ ∴ حـ = ١٤ سم

، ∵ طول أكبر ضلع فى المثلث هو حـ

∴ جتا حـ = $\frac{(١٠)^2 + (١٢)^2 - (١٤)^2}{٢ \times ١٠ \times ١٢} = \frac{١}{٥}$

∴ ق(∠حـ) = ٧٨° ٢٨َ

٣٠

∵ ع − أ = ٢٦ ، ع + أ = ٩٨ وبالطرح

∴ ٢أ = ٧٢ ∴ أ = ٣٦ سم ومنها ع = ٦٢

∴ المحيط = ١٢٤ سم

، ∵ ب = ٢٨ سم

∴ حـ = ١٢٤ − (٣٦ + ٢٨) = ٦٠ سم

، ∵ طول أصغر ضلع فى المثلث هو ب

∴ جتا ب = $\frac{(٣٦)^2 + (٦٠)^2 - (٢٨)^2}{٢ \times ٣٦ \times ٦٠}$

∴ ق(∠ب) ≈ ١٧° ٥١َ

٣١

∵ ب : حـ = ٣ : ٤

وبفرض أن: ب = ٣ك ، حـ = ٤ك

، ∵ مساحة Δ أ ب حـ = ٦٤

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٣ك × ٤ك × جا ٣٠° = ٦٤

∴ ك = $\frac{٨}{\sqrt{٣}}$ ∴ ب = $\frac{٢٤}{\sqrt{٣}}$ سم ، حـ = $\frac{٣٢}{\sqrt{٣}}$ سم

∴ أ² = $\left(\frac{٣٢}{\sqrt{٣}}\right)^2 + \left(\frac{٢٤}{\sqrt{٣}}\right)^2$

− ٢ × $\frac{٣٢}{\sqrt{٣}}$ × $\frac{٢٤}{\sqrt{٣}}$ × جتا ٣٠°

∴ أ ≈ ٩,٥ سم

∴ محيط Δ أ ب حـ ≈ ٤١,٨ سم

٣٢

∵ جا أ : جا ب : جا حـ = ٣ : ٥ : ٧

∴ أ : ب : حـ = ٣ : ٥ : ٧

وبفرض أن: أ = ٣ك ، ب = ٥ك ، حـ = ٧ك

∴ جتا أ = $\frac{(٥ك)^2 + (٧ك)^2 - (٣ك)^2}{٢ \times ٥ك \times ٧ك} = \frac{١٣}{١٤}$

، جتا ب = $\frac{(٣ك)^2 + (٧ك)^2 - (٥ك)^2}{٢ \times ٣ك \times ٧ك} = \frac{١١}{١٤}$

، جتا حـ = $\frac{(٣ك)^2 + (٥ك)^2 - (٧ك)^2}{٢ \times ٣ك \times ٥ك} = -\frac{١}{٢}$

∴ جتا أ : جتا ب : جتا حـ = $\frac{١٣}{١٤} : \frac{١١}{١٤} : \frac{-١}{٢}$ = ١٣ : ١١ : −٧

٣٣

∵ ٣٤ = ١٢ + (٦ + حـ) + حـ

∴ حـ = ٨ سم ، ب = ١٤ سم

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع وهو حـ

، ∵ جتا حـ = $\frac{(١٢)^2 + (١٤)^2 - (٨)^2}{٢ \times ١٢ \times ١٤} = \frac{٢٣}{٢٨}$

∴ ق(∠حـ) = ٣٤° ٤٦َ ١٩ً

، مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٤ جا ٣٤° ٤٦َ ١٩ً

≈ ٤٧,٩ سم²

٣٤

∵ ص² = ع² − ٢ ع س + س² + ع س

∴ ص² = ع² + س² − ع س

، ∵ ص² = ع² + س² − ٢ س ع جتا ص

∴ س ع = ٢ س ع جتا ص

∴ جتا ص = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق(∠ص) = ٦٠°

٣٥

حل زياد خطأ لأن قانون الجيب يجعل جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائمًا موجبًا رغم أن الزاوية هنا منفرجة ويؤكد ذلك استخدام قاعدة جيب التمام فى حل كريم.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ) ② (د) ③ (ب) ④ (ب)

إرشادات الحل :

① $\because$ جتا أ $= \frac{ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب ح}$

$\therefore$ $ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢} = ٢ ب ح$ جتا أ

$\therefore$ $(ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢})$ ظا أ

$= ٢ ب ح$ جتا أ $\times \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}} = ٢ ب ح$ جا أ

$= ٤ \times \left(\frac{١}{٢} ب ح \text{ جا أ}\right) = ٤ \times ١٢ = ٤٨$

② $\left(١ + \frac{أ}{ح} + \frac{ب}{ح}\right)\left(١ + \frac{ح}{ب} - \frac{أ}{ب}\right)$

$= \left(\frac{ح + أ + ب}{ح}\right)\left(\frac{ب + ح - أ}{ب}\right)$

$= \frac{(ب + ح)^{٢} - أ^{٢}}{ب ح} = \frac{ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢} + ٢ ب ح}{ب ح}$

$= \frac{ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢}}{ب ح} + ٢$

$= ٢$ جتا أ $+ ٢ = ٢\left(\frac{١}{٢}\right) + ٢ = ٣$

③ $\because \frac{أ^{٣} + ب^{٣} + ح^{٣}}{أ + ب + ح} = أ^{٢}$

$\therefore أ^{٣} + ب^{٣} + ح^{٣} = أ^{٣} + ب أ^{٢} + ح أ^{٢}$

$\therefore ب^{٣} + ح^{٣} = ب أ^{٢} + ح أ^{٢}$

$\therefore (ب + ح)(ب^{٢} - ب ح + ح^{٢}) = أ^{٢}(ب + ح)$

$\therefore أ^{٢} = ب^{٢} - ب ح + ح^{٢}$

$\therefore ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢} = ب ح$

$\therefore \frac{ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب ح} = \frac{١}{٢}$ $\therefore$ جتا أ $= \frac{١}{٢}$

$\therefore$ ق(∠أ) $= ٦٠^\circ$

④ بفرض طول ضلع المربع الصغير = ل سم

$\therefore$ طول ضلع المربع الأكبر = ٣ ل سم

$\therefore$ س هـ $= \sqrt{ل^{٢} + ل^{٢}} = \sqrt{٢}$ ل سم

، ب س $= \sqrt{ل^{٢} + (٣ ل)^{٢}}$

$= \sqrt{١٠}$ ل سم

، ب هـ = ٤ ل سم

$\therefore$ جتا (∠ب س هـ)

$= \frac{(\sqrt{٢} ل)^{٢} + (\sqrt{١٠} ل)^{٢} - (٤ ل)^{٢}}{٢ \times \sqrt{٢} ل \times \sqrt{١٠} ل}$

$= \frac{-٤ ل^{٢}}{٤ \sqrt{٥} ل^{٢}} = \frac{-١}{\sqrt{٥}}$

$\therefore$ جا (∠ب س هـ) $= \frac{٢}{\sqrt{٥}}$

إجابات تمارين 17

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (جـ)

③ (جـ) ④ أولًا : (أ) ثانيًا : (د)

⑤ (أ) ⑥ (ب) ⑦ (أ) ⑧ (أ)

⑨ (أ) ⑩ (ب) ⑪ (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

مسائل على الحالة الأولى لحل المثلث (طول ضلع وقياسا زاويتين)

١

ق(∠ب) $= ١٨٠^\circ - (٦٧^\circ + ٤٦^\circ) = ٦٧^\circ$

$\therefore \frac{أ}{\text{جا } ٦٧^\circ} = \frac{١١}{\text{جا } ٦٧^\circ} = \frac{ح}{\text{جا } ٤٦^\circ}$

$\therefore$ أ = ١١ سم ، ح ≃ ٨,٦ سم

٢

ق(∠ح) $= ١٨٠^\circ - (٦٠^\circ + ٤٠^\circ) = ٨٠^\circ$

$\therefore \frac{٨}{\text{جا } ٦٠^\circ} = \frac{ب}{\text{جا } ٤٠^\circ} = \frac{ح}{\text{جا } ٨٠^\circ}$

$\therefore$ ب ≃ ٥,٩٤ سم ، ح ≃ ٩,١ سم

٣

ق(∠ح) $= ١٨٠^\circ - (٤٩^\circ\ ١١' + ٦٧^\circ\ ١٧') = ٦٣^\circ\ ٣٢'$

$\therefore \frac{أ}{\text{جا }(٤٩^\circ\ ١١')} = \frac{ب}{\text{جا }(٦٧^\circ\ ١٧')} = \frac{١١,٢٢}{\text{جا } ٦٣^\circ\ ٣٢'}$

$\therefore$ أ = ٩,٥ سم ، ب = ١١,٦ سم

٤

ق(∠أ) $= ٨٠^\circ$ ، ق(∠ب) $= ٤٠^\circ$

$\therefore$ ق(∠ح) $= ١٨٠^\circ - (٨٠^\circ + ٤٠^\circ) = ٦٠^\circ$

$\therefore \frac{ب ح}{\text{جا } ٨٠^\circ} = \frac{أ ح}{\text{جا } ٤٠^\circ} = \frac{٩}{\text{جا } ٦٠^\circ}$

$\therefore$ ب ح ≃ ١٠,٢ سم ، أ ح ≃ ٦,٧ سم

، مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times$ ب ح × أ ح × جا ح

$= \frac{١}{٢} \times ١٠,٢ \times ٦,٧ \times$ جا ٦٠°

≃ ٣٠ سم²

٥

ق(∠ع) $= ١٨٠^\circ - (١٢' ٧٥^\circ + ١٥' ٤٨^\circ) = ٣٣' ٥٦^\circ$

$\therefore \frac{ص ع}{\text{جا } ٧٥^\circ\ ١٢'} = \frac{س ع}{\text{جا } ٤٨^\circ\ ١٥'} = \frac{٤٠}{\text{جا } ٥٦^\circ\ ٣٣'}$

$\therefore$ ص ع ≃ ٤٦,٤ سم ، س ع ≃ ٣٥,٨ سم

، الارتفاع المطلوب = ص ع × جا ص

= ٤٦,٤ جا $٤٩^\circ\ ١٥'$ ≃ ٣٤,٦ سم

مسائل على الحالة الثانية لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة)

٦

$(س ص)^{٢} = (١٣)^{٢} + (١٦)^{٢} - ٢ \times ١٣ \times ١٦$ جتا ٦٠°

$\therefore$ س ص $= \sqrt{٢١٧} = ١٤,٧$ سم

$\therefore$ جتا س $= \frac{(١٦)^{٢} + ٢١٧ - (١٣)^{٢}}{٢ \times ١٦ \times \sqrt{٢١٧}}$

$\therefore$ ق(∠س) $= ٤٩^\circ\ ٥١'$

$\therefore$ ق(∠ص) $= ١٨٠^\circ - (٦٠^\circ + ٤٩^\circ\ ٥١') = ٧٠^\circ\ ٩'$

٧

$ح^{٢} = (٥)^{٢} + (٧)^{٢} - ٢ (٥)(٧)$ جتا ٦٥°

$\therefore$ ح ≃ ٦,٧ سم

$\therefore$ جتا ب $= \frac{(٥)^{٢} + (٦,٧)^{٢} - (٧)^{٢}}{٢ \times ٥ \times ٦,٧}$

$\therefore$ ق(∠ب) ≃ $٧١^\circ\ ٥٠'$

$\therefore$ ق(∠أ) $= ١٨٠^\circ - (٧١^\circ\ ٥٠' + ٦٥^\circ) ≃ ٤٣^\circ\ ١٠'$

٨

$أ^{٢} = (٦)^{٢} + (٦)^{٢} - ٢ \times ٦ \times ٦ \times$ جتا $١٥٣^\circ\ ١٢'$

$\therefore$ أ ≃ ١١,٦٧ سم

، ق(∠ب) = ق(∠ح) $= \frac{١٨٠^\circ - ١٥٣^\circ\ ١٢'}{٢}$

$= ١٣^\circ\ ٢٤'$

٩

ق(∠م) $= ٢,١^{ء} ≃ ١٢٠^\circ$ ... $≃ ٦٨^\circ\ ٤٥'$

$\therefore م^{٢} = (١٢,٥)^{٢} + (٧,٢٥)^{٢} - ٢ \times ١٢,٥$

$\times ٧,٢٥$ جتا $٦٨^\circ\ ٤٥'$

$\therefore$ م ≃ ١١,٩٦ سم

$\therefore$ جتا ل $= \frac{(١١,٩٦)^{٢} + (٧,٢٥)^{٢} - (١٢,٥)^{٢}}{٢ \times ١١,٩٦ \times ٧,٢٥}$

$\therefore$ ق(∠ل) ≃ $٧٦^\circ\ ٥٣'$

$\therefore$ ق(∠ن) $= ١٨٠^\circ - (٦٨^\circ\ ٤٥' + ٧٦^\circ\ ٥٣') = ٣٤^\circ\ ٢٢'$

١٠

$(ل ن)^{٢} = (٤٨,٥)^{٢} + (٤٦)^{٢} - ٢ \times ٤٨,٥ \times ٤٦$

$\times (-٠,٦)$

$\therefore$ ل ن = ٨٤,٥٣ سم

، جتا ل $= \frac{(٤٨,٥)^{٢} + (٨٤,٥٣)^{٢} - (٤٦)^{٢}}{٢ \times ٤٨,٥ \times ٨٤,٥٣}$

$\therefore$ ق(∠ل) ≃ $٢٥^\circ\ ٤٨'$ ، ق(∠م) $= ١٢٦^\circ\ ٥٢'$

$\therefore$ ق(∠ن) $= ٢٧^\circ\ ٢٠'$

مسائل على الحالة الثالثة لحل المثلث (أطوال ثلاثة أضلاع)

11

① $\text{حتا أ} = \frac{(٢٧)^٢ + (٢٤)^٢ - (١٥)^٢}{٢ \times ٢٧ \times ٢٤}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٣٣° ٣٣َ

، $\text{حتا ب} = \frac{(١٥)^٢ + (٢٧)^٢ - (٢٤)^٢}{٢ \times ١٥ \times ٢٧}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٦٢° ١١َ

، ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٣٣° ٣٣َ + ٦٢° ١١َ) ≃ ٨٤° ١٦َ

② $\text{حتا أ} = \frac{(٣٥)^٢ + (١٧)^٢ - (٢٨)^٢}{٢ \times ٣٥ \times ١٧}$

∴ ق(∠أ) = ٥٢° ٦َ

، $\text{حتا ب} = \frac{(٢٨)^٢ + (١٧)^٢ - (٣٥)^٢}{٢ \times ٢٨ \times ١٧}$

∴ ق(∠ب) = ٩٩° ١١َ ، ق(∠حـ) = ٢٨° ٤٩َ

12

$\text{حتا أ} = \frac{(١٤)^٢ + (١٥)^٢ - (١٣)^٢}{٢ \times ١٤ \times ١٥}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٥٣° ٨َ

، $\text{حتا ب} = \frac{(١٥)^٢ + (١٣)^٢ - (١٤)^٢}{٢ \times ١٥ \times ١٣}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٥٩° ٢٩َ

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٥٣° ٨َ + ٥٩° ٢٩َ) = ٦٧° ٢٣َ

13

$\text{حتا أ} = \frac{(٨)^٢ + (٤)^٢ - (٥)^٢}{٢ (٨) (٤)}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٣٠° ٤٥َ

، $\text{حتا ب} = \frac{(٥)^٢ + (٤)^٢ - (٨)^٢}{٢ (٥) (٤)}$

∴ ق(∠ب) ≃ ١٢٥° ٦َ

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٣٠° ٤٥َ + ١٢٥° ٦َ) = ٢٤° ٩َ

14

$\text{حتا أ} = \frac{(٤\sqrt{٢})^٢ + (٢\sqrt{٥})^٢ - (٢)^٢}{٢ \times ٤\sqrt{٢} \times ٢\sqrt{٥}}$

∴ ق(∠أ) ≃ ١٨° ٢٦َ

، $\text{حتا ب} = \frac{(٢)^٢ + (٢\sqrt{٥})^٢ - (٤\sqrt{٢})^٢}{٢ \times ٢ \times ٢\sqrt{٥}}$

∴ ق(∠ب) = ١١٦° ٣٤َ

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١٨° ٢٦َ + ١١٦° ٣٤َ) = ٤٥°

15

$\text{حتا س} = \frac{(١٥)^٢ + (٣٠)^٢ - (٢٥)^٢}{٢ \times ١٥ \times ٣٠}$

∴ ق(∠س) = ٥٦° ١٥َ

، $\text{حتا ص} = \frac{(١٥)^٢ + (٢٥)^٢ - (٣٠)^٢}{٢ \times ١٥ \times ٢٥}$

∴ ق(∠ص) ≃ ٩٣° ٤٩َ

∴ ق(∠ع) = ١٨٠° − (٥٦° ١٥َ + ٩٣° ٤٩َ) = ٢٩° ٥٦َ

مسائل على النشاط

16

$\frac{١٠}{\text{حا أ}} = \frac{٩}{\text{حا }٥٧°} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}}$ ∴ $\text{حا أ} = \frac{١٠ \text{ حا } ٥٧°}{٩}$

∴ ق(∠أ) = ٦٨° ٤٤َ أ، ق(∠أ) = ١١١° ١٦َ

ومنها ق(∠حـ) = ٥٤° ١٦َ أ، ق(∠حـ) = ١١° ٤٤َ

، ∵ $\frac{٩}{\text{حا }٥٧°} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}}$

∴ حَ = ٨,٧ سم أ، حَ = ٢,٢ سم

17

$\frac{٤}{\text{حا }٥٠°} = \frac{٣}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}}$ ∴ $\text{حا ب} = \frac{٣ \text{ حا } ٥٠°}{٤}$

∴ ق(∠ب) = ٣٥° ٤َ

أ، ق(∠ب) = ١٤٤° ٥٦َ (مرفوض)

∴ ق(∠حـ) = ٩٤° ٥٦َ

∴ $\frac{\text{حَ}}{\text{حا }٩٤° ٥٦َ} = \frac{٤}{\text{حا }٥٠°}$ ∴ حَ ≃ ٥,٢ سم

18

$\frac{١٢}{\text{حا }١١٦°} = \frac{١٠}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}}$ ∴ $\text{حا أ} = \frac{١٠ \text{ حا } ١١٦°}{١٢}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٤٨° ٣٠َ

أ، ق(∠أ) ≃ ١٣١° ٣٠َ (مرفوض)

، ق(∠ب) = ١٨٠° − (٤٨° ٣٠َ + ١١٦°) ≃ ١٥° ٣٠َ

∴ $\frac{\text{ب}}{\text{حا }١٥° ٣٠َ} = \frac{١٢}{\text{حا }١١٦°}$ ∴ بَ ≃ ٣,٦ سم

19

① ∵ ∠أ منفرجة ، أَ > بَ ∴ يوجد حل وحيد

∴ $\frac{١٥}{\text{حا }١٢٠°} = \frac{١٠}{\text{حا ب}}$ ∴ $\text{حا ب} = \frac{١٠ \text{ حا } ١٢٠°}{١٥}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٣٥°

، ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٣٥° + ١٢٠°) = ٢٥°

∴ $\frac{\text{حَ}}{\text{حا }٢٥°} = \frac{١٥}{\text{حا }١٢٠°}$ ∴ حَ ≃ ٧,٣ سم

② ∵ ∠أ منفرجة ، أ < بَ

∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق

③ ∵ ∠أ حادة ، ع = ٢٨ حا ٤٢° ≃ ١٨,٧ سم

، ١٨,٧ < ٢٠ < ٢٨ ∴ يوجد للمثلث حلان

∴ $\frac{٢٠}{\text{حا }٤٢°} = \frac{٢٨}{\text{حا ب}}$

∴ ق(∠ب) = ٧٠° أ، ق(∠ب) = ١١٠°

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٧٠° + ٤٢°) = ٦٨°

أ، ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١١٠° + ٤٢°) = ٢٨°

، ∵ $\frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}} = \frac{٢٠}{\text{حا }٤٢°}$

∴ حَ ≃ ٢٧,٧ سم أ، حَ ≃ ١٤ سم

④ ∵ ∠أ حادة ، ع = ٧ حا ٦٠° ≃ ٦,١ سم

∴ أ < ع

∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق

⑤ ∵ ∠أ حادة ، أَ > حَ ∴ يوجد حل وحيد

∴ $\frac{١٢}{\text{حا }٢٧°} = \frac{٧}{\text{حا حـ}}$ ∴ ق(∠حـ) ≃ ١٥°

∴ ق(∠ب) = ١٨٠° − (١٥° + ٢٧°) = ١٣٨°

∴ $\frac{\text{ب}}{\text{حا }١٣٨°} = \frac{١٢}{\text{حا }٢٧°}$ ∴ بَ = ١٧,٧ سم

مسائل متنوعة

20

∵ Δ أ ب حـ متساوى الساقين ، ق(∠أ) = ١١٠°

∴ ق(∠ب) = ق(∠حـ) = $\frac{١٨٠° - ١١٠°}{٢}$ = ٣٥°

∴ $\frac{٨}{\text{حا }١١٠°} = \frac{\text{ب}}{\text{حا }٣٥°} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا }٣٥°}$

∴ ب = حَ ≃ ٤,٩ سم

21

∵ حتا ب = $\frac{٣}{٥}$ (موجبة) ∴ ∠ب حادة

∴ ق(∠ب) = ٥٣° ٨َ ، ق(∠حـ) = ٢٢° ٣٧َ

∴ ق(∠أ) = ١٠٤° ١٥َ

∴ $\frac{٢١}{\text{حا }١٠٤° ١٥َ} = \frac{\text{ب}}{\text{حا }٥٣° ٨َ} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا }٢٢° ٣٧َ}$

∴ ب = ١٧,٣ سم ، حَ ≃ ٨,٣ سم

22

∵ مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ حَ حا ب

∴ ١٠$\sqrt{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٥ حَ حا ١٢٠° ∴ حَ = ٨ سم

∴ ب^٢ = (٥)^٢ + (٨)^٢ − ٢ × ٥ × ٨ حتا ١٢٠°

∴ ب = ١١,٣٦ سم

∴ $\text{حتا أ} = \frac{(١١,٣٦)^٢ + (٨)^٢ - (٥)^٢}{٢ \times ١١,٣٦ \times ٨}$

∴ ق(∠أ) = ٢٢° ٢٤َ ∴ ق(∠حـ) = ٣٧° ٣٦َ

23

ق(∠أ) = $\frac{٤}{١٥}$ × ١٨٠° = ٤٨°

، ق(∠ب) = $\frac{٥}{١٥}$ × ١٨٠° = ٦٠°

، ق(∠حـ) = $\frac{٦}{١٥}$ × ١٨٠° = ٧٢°

، ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}} = \frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{حَ}}{\text{حا أ} + \text{حا ب} + \text{حا حـ}}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{حا }٤٨°} = \frac{\text{ب}}{\text{حا }٦٠°} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا }٧٢°} = \frac{٥٠}{٢.٥٦}$

∴ أ ≃ ١٤,٥ سم ، ب = ١٦,٩ سم ، حَ ≃ ١٨,٦ سم

24

بفرض أن :

حا أ = ٣ ك ، حا ب = ٤ ك ، حا حـ = ٦ ك

∴ $\frac{\text{أ}}{٣\text{ك}} = \frac{\text{ب}}{٤\text{ك}} = \frac{\text{حَ}}{٦\text{ك}} = \frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{حَ}}{١٣\text{ك}}$

∴ $\frac{\text{أَ}}{٣} = \frac{\text{بَ}}{٤} = \frac{\text{حَ}}{٦} = \frac{٥٢}{١٣}$

∴ أَ = ١٢ سم ، بَ = ١٦ سم ، حَ = ٢٤ سم

∴ $\text{جتا أ} = \frac{(١٦)^٢ + (٢٤)^٢ - (١٢)^٢}{٢ \times ١٦ \times ٢٤}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٢٦ َ٣٣°

، $\text{جتا ب} = \frac{(١٢)^٢ + (٢٤)^٢ - (١٦)^٢}{٢ \times ١٢ \times ٢٤}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٢٠ َ٣٦° ∴ ق(∠حـ) = ١٧ َ١١٧°

٢٥

$\frac{٢١}{\text{جا أ}} = \frac{٢٥}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}} = ٢٨$

∴ ق(∠أ) ≃ ٣٥ َ٤٨° ، ق(∠ب) ≃ ١٤ َ٦٣°

∴ ق(∠حـ) = ١١ َ٦٨°

∴ حَ = ٢٨ جا ١١ َ٦٨° ≃ ٢٦ سم

إجابات التطبيقات الحياتية على الوحدة الرابعة

١

∵ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٣٣° + ٥٢°) = ٩٥°

∴ $\frac{\text{أحـ}}{\text{جا } ٥٢°} = \frac{٢٠}{\text{جا } ٣٣°} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{جا } ٩٥°}$

∴ أحـ ≃ ٢٩ كم أى أن المسافة بين السفينة والمنارة (أ) تساوى ٢٩ كم

، ب حـ ≃ ٣٦,٦ كم أى أن المسافة بين السفينة والمنارة (ب) تساوى ٣٦,٦ كم

٢

∵ ق(∠ب أ حـ) = ٤٢° − ٢٥ َ٣٠° = ٢٥ َ٢١°

∴ فى Δ أ ب حـ يكون $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا } ٢٥َ\ ٣٠°} = \frac{٥٠}{\text{جا } ٢٥َ\ ٢١°}$

∴ أ ب ≃ ٤٨,١ متر

، فى Δ أ ب ء يكون $\frac{\text{أ ء}}{\text{جا } ٤٢°} = \frac{٤٨,١}{\text{جا } ٩٠°}$

∴ أ ء ≃ ٣٢,٢ متر

∴ ارتفاع المئذنة ≃ ٣٢,٢ متر.

٣

∵ ق(∠ص) = ١٨٠° − (٤٠° + ١٠٥°) = ٣٥°

∴ $\frac{\text{س ع}}{\text{جا } ٣٥°} = \frac{٩}{\text{جا } ١٠٥°}$

∴ $\text{س ع} = \frac{٩ \text{ جا } ٣٥°}{\text{جا } ١٠٥°} \simeq ٥,٣$ كم

∴ المسافة بين الموقع س والموقع ع ≃ ٥,٣ كم

∴ مساحة Δ س ص ع = $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ٥,٣ جا ٤٠°

≃ ١٥ كم^٢

٤

∵ (مقدار الإزاحة)^٢ = (٨)^٢ + (٩)^٢ − ٢ × ٨ × ٩ جتا ٨٠°

∴ مقدار الإزاحة ≃ ١١ كم

٥

∵ $\text{جتا حـ} = \frac{(٢١٠)^٢ + (١٤٠)^٢ - (٣٠٠)^٢}{٢ \times ٢١٠ \times ١٤٠}$

∴ ق(∠حـ) ≃ ٣٤ َ١١٦°

∴ مساحة الأرض = $\frac{١}{٢}$ × ٢١٠ × ١٤٠ × جا ٣٤ َ١١٦°

≃ ١٣١٤٨ م^٢